

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii

ZASTOSOWANIE MODELU HELBINGA W SYMULACJI EWAKUACJI

Autor:
MARCIN MATUSZAK

Praca wykonana pod kierunkiem:
dr hab. Katarzyny Weron
dr Macieja Matyki

Wrocław, styczeń 2010

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przez mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Streszczenie

Punktem wyjścia niniejszej pracy jest model Helbinga opisujący zachowanie ludzi podczas ewakuacji. Przy pomocy symulacji komputerowej, implementującej algorytm zaproponowany we wspomnianej publikacji, zbadany został wpływ różnych czynników na zachowanie modelu. Otrzymane wyniki mogą posłużyć poprawie bezpieczeństwa ludzi w sytuacjach zagrożenia życia podczas ewakuacji.

Abstract

The starting point of this work is the Helbing's model describing human behavior during evacuation. With the help of computer simulations, implementing its algorithm, the impact of various factors on the behavior of the model has been examined. The results obtained can be used to improve the safety of people in life-threatening situations during the evacuation.

Słowa kluczowe

symulacje komputerowe, socjofizyka, ewakuacja ludzi, model Helbinga

Tytuł pracy w języku angielskim

Simulating panic escape using Helbing's model

Pani dr hab. Katarzynie Weron za poświęcony czas, merytoryczną pomoc w trakcie pisania pracy, a także za możliwość szczerzej rozmowy, otrzymania rady i wsparcia.

Panu dr Maciejowi Matyce za wszechstronną pomoc i tworzenie niepowtarzalnej, koleżeńskiej atmosfery w czasie pracy.

Spis treści

1	Wstęp	15
1.1	Klasyfikacja tłumu	15
1.2	Struktura pracy	18
1.3	Cel pracy	18
2	Przegląd modeli zachowania tłumu	19
2.1	Dynamika płynów	19
2.2	Automaty komórkowe	19
2.3	Systemy stadne	20
2.4	Zastosowania	20
3	Podstawy fizyczne modelu Helbinga	23
3.1	Wielocząsteczkowe układy z siłami kierującymi	23
3.2	Samonapędzające się systemy wielocząsteczkowe	24
3.3	Model materii granulowanej Ristowa	25
4	Model Helbinga	27
5	Wyniki	29
5.1	Algorytm	29
5.2	Warunki początkowe	29
5.3	Siła kierująca	30
5.4	Sposób otrzymania wyników	32
5.5	Porównanie wyników	35
5.6	Wpływ wielkości populacji	39
5.7	Wpływ masy	40
5.8	Szerokość wyjścia	43
5.9	Termalizacja	49
6	Wnioski	51
A	Obliczanie błędu	53
B	Współczynnik asymetrii - skośność	54
C	Test Shapiro-Wilka	54
D	Zmienny krok całkowania	55

Spis rysunków

1	Ewakuacja ze stadionu w Sheffield	17
2	Oddziaływanie pomiędzy dwiema cząstkami	25
3	Siły oddziałujące pomiędzy dwiema cząstkami	28
4	Zrzut ekranu konfiguracji początkowej symulacji	30
5	Geometria pomieszczenia	31
6	Histogram czasów ucieczki	32
7	Porównanie rozkładu normalnego o różnych skośnościach	33
8	Wykres qq dla prędkości $v_0 = 0.5$ oraz $v_0 = 1.0$	34
9	Porównanie wyników z publikacją	35
10	Otrzymane wyniki wraz z prędkościami charakterystycznymi dla człowieka	36
11	Zrzut ekranu symulacji	37
12	Czasy opuszczania pomieszczenia każdej z cząstek	38
13	Powiększenie obszaru zaznaczonego na wykresie 12	38
14	Średni czas ucieczki	39
15	Wpływ wielkości populacji na zmianę zachowania układu	40
16	Wpływ rozkładu masy na czas ewakuacji	42
17	Wpływ szerokości drzwi na czas ewakuacji	43
18	Wpływ szerokości drzwi na czas ewakuacji - skale logarytmiczne	44
19	Wartość strumienia ludzi w zależności od szerokości wyjścia	45
20	Wartość strumienia ludzi w zależności od szerokości wyjścia	46
21	Zmiana wartości strumienia w zależności od szerokości drzwi	46
22	Zmiana wartości strumienia w zależności od szerokości drzwi	47
23	Zależność strumienia od populacji	48
24	Wpływ termalizacji na czasu ewakuacji	49
25	Schemat blokowy symulacji	57

Spis tablic

1	Test Shapiro – Wilka	33
2	Prędkość poruszana się człowieka	35
3	Rozkład mas	41
4	Różnice czasów ucieczki	49

1 Wstęp

Tłum jako zjawisko społeczne jest obecne w nauce od kilku dekad (zajmowali się nim m.in. Hankin i Wright w roku 1958 [HW58]; Oeding w roku 1963 [Oed63]; Hoel, 1968 [Hoe68]; Older, 1968 [Old68]; O’Flaherty i Parkinson w roku 1972 [OP72]; Weidmann, 1993 [Wei93]). Metody badawcze oparte były na bezpośredniej obserwacji, zdjęciach lub filmowaniu poklatkowym (ang. *time-lapse films*). Poza obserwacją zachowania, celem było rozwinięcie ogólnych wytycznych dotyczących sposobu zagospodarowania przestrzeni użytkowej oraz zachowania się w niej. Te reguły, nie zawsze jednak sprawdzały się w sytuacjach ekstremalnych, takich jak ewakuacja.

Przez lata zostało zaproponowanych kilkanaście różnych modeli opisujących zachowanie pieszych [Hel01], m.in.:

- modele kolejkowania (ang. *queueing models*) [YS89], [HT01],
- modele macierzy przejścia (ang. *transistion matrix models*) [Gar73],
- modele stochastyczne [May54].

W roku 1971 Henderson [HEN71], [HL72], [HJ73] zaproponował potraktowanie zachowania tłumu jak cząstek gazu lub płynu. W takim podejściu należy uwzględnić występowanie poprawek związanych z oddziaływaniem między cząsteczkowym (np. unikanie przeszkód, hamowanie), które powodują złamanie zasady zachowania energii oraz momentu pędu. Wykorzystał on równania Naviera – Stokesa opisujące ruch nieturbulentnej cieczy newtonowskiej.

1.1 Klasyfikacja tłumu

Oprócz prób badania i symulacji zachowania tłumu wielu naukowców, głównie nauk społecznych, zajmowało się jego klasyfikacją. Najpopularniejszy podział możemy znaleźć w książce „Collective Behavior” H. Blumera z roku 1951 [Blu51]. Autor wyróżnił następujące rodzaje tłumu:

- Tłum przypadkowy charakteryzujący się słabymi oddziaływaniami pomiędzy uczestnikami lub wręcz ich brakiem. Jest to jednostka, którą przyciągnęło jakieś (często przypadkowe) wydarzenie. Przykładem takiego tłumu są osoby przyglądające się wypadkom czy też osoby zgromadzone wokół stoiska w hipermarkecie.
- Tłum konwencjonalny to zbiór jednostek zebranych w jakimś celu, który to cel jest jednak osiągany przez każdą z nich z osobna. Przykładem takiego tłumu są pasażerowie na przystanku lub widzowie w kinie. Tłum konwencjonalny czasem

nazywany jest publicznością. Publiczność charakteryzuje to, że zdania na temat osiąganego celu mogą być różne.

- Tłum ekspresyjny to taki, w którym szczególną rolę ma jakiś ładunek emocjonalny i na nim oparte są oddziaływania. Przykładem takiego tłumu są uczestnicy karnawału w Rio czy zabaw sylwestrowych na rynkach miast. Tłum taki może przejawiać zachowania normalnie niedopuszczalne.
- Tłum aktywny jest nastawiony na działalność niszczycielską, której celem jest rozładowanie emocji i/lub zniszczenie jakiegoś zła czy przeciwnika. Przykładem takiego tłumu są agresywni kibice na meczach piłkarskich.
- Tłum protestujący jest szczególnym przykładem tłumu, który wykazuje cechy tłumu konwencjonalnego (dość dobra organizacja) oraz tłumu aktywnego (działalność destruktywna).

W sytuacji zagrożenia powyższy podział przestaje obowiązywać, ponieważ cel lub motyw zgromadzenia tłumu przestają być ważne, na pierwsze miejsce wysuwa się zazwyczaj potrzeba opuszczenia zagrożonego miejsca.

Dużo trafniejszy, od powyższego, opis tłumu w sytuacjach zagrożenia kryje się pod pojęciem zaproponowanym przez R. E. Parka [Par67], a następnie rozwiniętym przez Blumera [Blu51]. Pojęcie „zachowanie zbiorowe” (ang. „collective behavior”) opisuje działanie pośrednie pomiędzy zachowaniem konformistycznym (zgodnym z normami), a zachowaniem odstępującym od norm. Zachowanie zbiorowe, jako trzecia forma działania, zachodzi gdy normy są sprzeczne ze sobą, lub gdy jest ich brak. Oznacza to, że wielka ilość wzajemnie obcych sobie ludzi, którzy w tym samym czasie znaleźli się w tym samym miejscu (np. w sali kinowej) w wyniku nagłej zmiany sytuacji (np. wybuchu pożaru), może przekształcić się w „masę”. Pojęcie „masa” wg Le Bona cechuje się anonimowością jednostki, określonością emocjonalną, obniżeniem poziomu inteligencji oraz odpowiedzialności osobistej:

Zatem każdą jednostkę w tłumie cechuje: zanik świadomości swego „ja”, przewaga czynników nieświadomych, utrata autonomii w kierowaniu myślami i uczuciami pod wpływem sugestii i przeniesienia, a nadto dążność do jak najszybszego urzeczywistnienia sugerowanych idei. Jednostka przestaje być sobą, staje się automatem, którym kieruje wola narzucona, nigdy zaś własna[Bon07].

Na podstawie obserwacji oraz dostępnych materiałów zachowanie tłumu w czasie sytuacji panicznych można podsumować w następujących punktach:

- ludzie starają się poruszać się szybciej niż w warunkach normalnych,
- ludzie wpadają na siebie, odpychając się,

- sposób poruszania staje się bardziej chaotyczny,
- wyjście blokuje się, tworzą się łuki,
- tworzą się zatory,
- siła oddziaływania pomiędzy ludźmi osiąga wartość aż do 4450 N/m^1 ,
- prędkość ucieczki jest spowalniana przez „rannych”,
- ludzie mają skłonność do podążania za tłumem.

Poprzez „sytuację normalną” rozumiemy zachowanie w momencie bezstresowym, poruszanie się spokojnym chodem ze stałą prędkością.

Podsumowując, podczas typowej ewakuacji ludzie starają się poruszać znacznie szybciej niż normalnie, popychają się oraz wpadają na siebie wzajemnie. Ucieczka przyjmuje charakter chaotyczny, przez co tworzą się zatory. Przy wyjściu tworzą się charakterystyczne łuki, które blokują na moment możliwość wyjścia innym. Siły oddziaływania pomiędzy ludźmi dochodzą do wartości kilku tysięcy niutonów. Jeśli osoba zostanie ranna, co uniemożliwi jej ewakuację, powoduje spowolnienie ucieczki innych, działając jak przeszkoda.



Rysunek 1: Tłum fanów podczas ucieczki ze stadionu w Sheffield w roku 1981, obraz pochodzi z kamery przemysłowej. Można zauważyć zablokowanie drzwi przez osoby, co utrudnia ewakuację.

¹ N/m jest jednostką napięcia powierzchniowego

1.2 Struktura pracy

Praca została podzielona na trzy główne części. Pierwsza część teoretyczna to wstęp, zawierający teoretyczny opis tłumy widziany głównie oczami socjologów oraz charakterystykę zachowania w warunkach ekstremalnych.

Druga część, również teoretyczna, opisuje podstawy fizyczne na jakich oparta jest praca Helbinga, która stała się punktem wyjścia moich rozważań. Znajdzie się w niej opis jego wcześniejszych prac (rozdział 3.1 oraz 3.2) oraz publikacji o materii granulowanej autorstwa Ristowa (rozdział 3.3). W części tej zawarty będzie opis układów wielocząsteczkowych w stanach nierównowagowych, który będzie punktem wyjściowym dalszych rozważań, następnie zostanie wprowadzona siła samonapędzająca, która zastąpi siły zewnętrzne.

Ostatnia część będzie poświęcona zbadaniu właściwości modelu Helbinga. Otrzymane wyniki w większości nie były nigdzie publikowane dlatego stanowią oryginalny wkład w dziedzinie badań nad ewakuacją z miejsc zagrożenia.

Na końcu tej pracy znajdują się wnioski podsumowujące przeprowadzone badania oraz załączniki opisujące dodatkowe zagadnienia, takie jak sposób obliczania niektórych parametrów oraz opis implementacji algorytmu.

1.3 Cel pracy

Celem pracy jest zbadanie modelu zaproponowanego przez Helbinga i współautorów [HFV00b] z uwzględnieniem pewnych zmian oraz dokładne zbadanie zjawisk, które nie zostały ujęte w oryginalnej pracy, takich jak:

- wpływ charakterystyki rozkładu masy na mierzone wielkości fizyczne,
- zagadnienie termalizacji układu,
- problem optymalizacji szerokości wyjścia.

2 Przegląd modeli zachowania tłumu

Na przestrzeni lat zostały zaproponowane różne model oraz algorytmy symulacji zachowania zbiorowisk ludzkich. Część z nich polegała na adaptacji istniejących modeli poprzez dokonywanie uogólnień dotyczących oddziaływań, np. traktowanie ludzi jako rozrzedzonego gazu. Poniżej przytaczam kilka przykładów takich modeli oraz ich zastosowanie w świecie rzeczywistym.

2.1 Dynamika płynów

Prawa fizyki opisujące dynamikę płynów są wykorzystane do modelowania i symulacji zachowania tłumu [Tas08], [TCP05]. Poprzez zastosowanie pewnych uproszczeń można odnaleźć analogię pomiędzy zachowaniem ludzi oraz cząstek w cieczech lub w gazach. Różne podejścia można znaleźć w pracach:

- Hughes odwzorował zachowanie tłumu przy pomocy ciągłego pola gęstości (ang. *continuous density field*). Funkcja potencjalna jest czynnikiem kierującym pole gęstości do celu [Hug03];
- Chenney wykorzystał kafelki przepływu (ang. *flow tiles*) [Che04]. Obszar symulacji podzielony jest na małe kafelki, wewnątrz których każdemu punktowi przyporządkowana jest funkcja opisująca pole wektorowe prędkości.
- model tłumów ciągłych (ang. *continuum crowds*) oparty jest na dynamice ciągłej. Opublikowany został przez Treuille w czasopiśmie SIGGRAPH. W tym przypadku również występuje funkcja potencjalna kierująca cząstki do celu [TCP05].

2.2 Automaty komórkowe

Jest to model o dyskretnych danych, w którym stan danej komórki zależy od stanu jej sąsiadów oraz prostych zasad rządzących ruchem. System oparty jest na regularnej sieci o identycznych komórkach. Jego twórcami byli János Neumann oraz Stanisław Ulam. Najśłynniejszym automatem jest „Gra w Życie” Johna Conwaya. Istnieje kilka reguł, które są niezmiennie i muszą istnieć: sąsiedztwo (Moore’a oraz von Neumanna), warunki brzegowe (w przypadku ludzi będą to reguły odbijające), przestrzeń stanów oraz warunki przejścia. Przykład można znaleźć w pracach Hamagamiiego oraz Hirata, którzy połączyli modele automatów komórkowych z systemami wieloagentowymi (ang. *multi-agent systems*) [HH03].

2.3 Systemy stadne

Tłum jest kierowany przez globalny ruch z lokalnymi tendencjami, cząstki poszukują celu, poruszają się jako grupa oraz starają się uniknąć kolizji. Jako pierwszy model ten opisał Reynolds [Rey97], [Rey99], w pierwotnej wersji wykorzystany do symulacji zachowania stad ptaków oraz ławic ryb. W modelu tym każda lotka (ang. *boid*, od wyrazów *bird-like object*) porusza się indywidualnie, posiada tylko informację o prędkości i położeniu sąsiadów oraz lokalizacji przeszkód. Posiada zaprogramowane algorytmy poruszania się, automatycznie reagując na zmiany w otoczeniu. Zachowanie jest oparte na trzech regułach²:

- rozdzielnosc – sterowanie zapobiegające lokalnym zbiorowiskom, czyli utrzymanie pożądanej odległości od innych agentów z lokalnej grupy,
- spójność – sterowanie w kierunku uśrednionego położenia lokalnej grupy, tj. grupowanie się z agentami z lokalnej grupy,
- wyrównywanie – sterowanie w kierunku uśrednionego celu lokalnej grupy, tj. dostosowanie swojego ruchu (tzn. zmiany kierunku ruchu lub prędkości) do innych agentów z jego lokalnej grupy.

2.4 Zastosowania

W dużej mierze symulacje zachowania ludzi, nie tylko w sytuacjach ekstremalnych, znalazły zastosowanie przy wspomaganiu projektowania lub przebudowy budynków użyteczności publicznej oraz przestrzeni publicznej. Wykorzystanie symulacji pozwala zmniejszyć koszt budowy oraz poprawić bezpieczeństwo ludzi. Przykłady³ zastosowania technik komputerowych wspomagających projektowanie to:

- Sydney Olympic Park Sports Centre - wielofunkcyjna hala sportowa w Sydney, w Australii. Symulacje pokazały, że wprowadzenie przejścia w postaci mostu usprawni przepływ ludzi;
- Lotnisko w Luton - w związku z igrzyskami olimpijskimi w Londynie w roku 2012 zostały przeprowadzone symulacje lotniska dla kilku newralgicznych punktów: odprawy biletowe, główne schody, główną salę dla pasażerów. Użyty model pokazał, że standardy IATA (ang. *International Air Transport Association*) dotyczące kolejek oraz czasów oczekiwań nie sprawdzają się;

²Na podstawie <http://en.wikipedia.org/wiki/Boids>

³Przykłady pochodzą ze strony www.legion.com

- Düsseldorf Arena - w trakcie projektowania hali sportowej symulacje posłużyły do przetestowania wyjść, ponieważ główne drzwi znajdowały się w sąsiedztwie przystanków tramwajowych oraz jednej z głównych ulic. Symulacja miała na celu sprawdzenie czy imprezy masowe nie wpłyną negatywnie na ruch uliczny.

Drugim obszarem zastosowań algorytmów opisujących zachowanie ludzi jest przemysł rozrywkowy, głównie w filmach (sceny bitewne) oraz w grach komputerowych. Prekursorem był Stephen Regelous, nowozelandzki inżynier który stworzył oprogramowanie pozwalające na symulację setek walczących żołnierzy na użytek filmu „Władca pierścieni”.

3 Podstawy fizyczne modelu Helbinga

Praca Helbinga [HFV00b] oparta jest w głównej mierze na dwóch pracach: artykule z roku 1994 na temat materii granulowanej [RH94] oraz pracy opisującej samonapędzające się systemy wielocząsteczkowe [HFV00a]. Na początku należy zapoznać się z opisem nierównowagowych układów wielocząsteczkowych z siłami kierującymi (rozdział 3.1) , a następnie wprowadzić siłę samonapędzającą (rozdział 3.2).

3.1 Wielocząsteczkowe układy z siłami kierującymi

Dynamika i formowanie się struktur w systemach dalekich od stanów równowagi od dawna przykuwają uwagę naukowców. Układy nierównowagowe charakteryzują się otwarciem na otoczenie, poprzez wymianę energii, cząstek lub „informacji”. Konsekwencją tego jest złożoność zachowania nie dającą się opisać przy pomocy reguł stosowanych w termodynamice lub mechanice statystycznej do opisów zjawisk równowagowych (w gazach, płynach). Jednakże, można znaleźć pewne ogólne zasady rządzące tymi układami. Załóżmy istnienie cząstki oznaczonej jako α o masie m_α i przyspieszeniu $\ddot{\mathbf{x}}_\alpha$. Wykorzystując równania ruchu Newtona możemy zapisać oddziaływanie z inną cząstką oznaczoną β :

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \sum_{\beta(\neq)\alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta}(t). \quad (1)$$

Oddziaływanie $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ zależy głównie od położenia⁴ $\mathbf{x}_\alpha(t)$ oraz $\mathbf{x}_\beta(t)$ odpowiednich cząstek lub od odległości pomiędzy nimi $\mathbf{d}_{\alpha\beta} = (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)$, rzadziej od prędkości $\mathbf{v}_\alpha(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$. Oddziaływania potencjalne opisane są przy pomocy funkcji Hamiltona.

W kierowanych (sterowanych) układach wielocząsteczkowych takich jak płyny pod wpływem ciśnienia i oddziaływań ze ściankami naczynia, lub materia granulowana, taka jak piasek, musimy rozpatrywać dodatkowe oddziaływanie ze środowiskiem. Zaliczamy do niego siłę *kierującą* (ang. *driving force*) $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t)$ pochodzącą od warunków brzegowych, pól elektrycznych, grawitacji. A także, tarcie $\mathbf{F}_{fr}(t) = -\gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t)$ i dodatkowe fluktuacje zawarte w parametrze $\zeta_\alpha(t)$, które opisują oddziaływanie ze środowiskiem (np. z powietrzem). Uwzględniając powyższe, równania ruchu można zapisać jako

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}_\alpha(t), t) - \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) + \sum_{\beta(\neq)\alpha} \mathbf{F}_{\alpha\beta}(t) + \zeta_\alpha(t), \quad (2)$$

gdzie γ_α to współczynnik tarcia.

⁴ $\mathbf{x}$ jest wektorem w dwu- lub trzy wymiarowej przestrzeni liczb rzeczywistych

3.2 Samonapędzające się systemy wielocząsteczkowe

W samonapędzających się systemach wielocząsteczkowych (ang. *self-driven many-particle system*) siła *napędzająca* nie pochodzi z zewnątrz, lecz jest powiązana z każdą z cząstek i jest „wyprodukowana” przez nią. Zastosowanie modelu samonapędzających się cząstek pozwala opisać ożywione układy, takie jak komórki, zwierzęta lub ludzi. W tym celu należy w równaniu 2:

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}_\alpha(t), t) - \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \mathbf{F}_{\alpha\beta}(t) + \zeta_\alpha(t). \quad (3)$$

Zamienić zewnętrzną siłę napędzającą $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_\alpha(t), t)$ na siłę pochodzącą od każdej z cząstek $\mathbf{F}_\alpha^0(t)$

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \mathbf{F}_\alpha^0(t) - \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \mathbf{F}_{\alpha\beta}(t) + \zeta_\alpha(t). \quad (4)$$

Przechodząc do wielkości bezwymiarowych, poprzez podstawienia

$$\mathbf{F}_\alpha^0(t) = \gamma_\alpha v_\alpha^0(t) \mathbf{e}_\alpha^0(t) \quad (5)$$

$$\gamma_\alpha = \frac{m_\alpha}{\tau_\alpha} \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{\alpha\beta}(t) = m_\alpha \mathbf{f}_{\alpha\beta}(t) \quad (7)$$

$$\zeta_\alpha(t) = \gamma_\alpha \xi_\alpha(t), \quad (8)$$

otrzymamy

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \gamma_\alpha v_\alpha^0(t) \mathbf{e}_\alpha^0(t) - \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) + \sum_{\beta(\neq\alpha)} m_\alpha \mathbf{f}_{\alpha\beta}(t) + \gamma_\alpha \xi_\alpha(t) \quad (9)$$

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \frac{m_\alpha}{\tau_\alpha} v_\alpha^0(t) \mathbf{e}_\alpha^0(t) - \frac{m_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{v}_\alpha(t) + \sum_{\beta(\neq\alpha)} m_\alpha \mathbf{f}_{\alpha\beta}(t) + \frac{m_\alpha}{\tau_\alpha} \xi_\alpha(t). \quad (10)$$

Po uproszczeniu, ostatecznie przyjmie postać:

$$\frac{d\mathbf{v}_\alpha(t)}{dt} = \frac{v_\alpha^0(t) \mathbf{e}_\alpha^0 + \xi_\alpha(t) - \mathbf{v}_\alpha(t)}{\tau_\alpha} + \sum_{\beta(\neq\alpha)} \mathbf{f}_{\alpha\beta}(t). \quad (11)$$

W powyższych równaniach τ_α jest czasem relaksacji, $v_\alpha^0(t) \mathbf{e}_\alpha^0(t)/\tau_\alpha$ jest siłą kierującą, natomiast $-\mathbf{v}_\alpha^0(t)/\tau_\alpha$ opisuje tarcie. Wszystkie trzy człony tworzą rosnące wykładniczo dopasowanie w czasie prędkości $\mathbf{v}_\alpha^0$ do prędkości docelowej w żądanym kierunku wyznaczonym przez wektor $\mathbf{e}_\alpha^0$. Dodatkowo na ruch cząstki mają wpływ siły oddziałujące oraz fluktuacje. W trakcie ewakuacji zachowanie ludzi wydaje się być chaotyczne, nieregularne oraz nieprzewidywalne. W związku z tym musimy rozpatrywać ruch w ciągłej przestrzeni, w której pieszy powinien podejmować działanie niemalże automatycznie, intuicyjnie, zamiast dokonywać skomplikowanych decyzji odnośnie kierunku poruszania lub zmiany prędkości.

3.3 Model materii granulowanej Ristowa

Ristow zajmuje się problemem cząstek sferycznych (np. ziaren piasku) znajdujących się w leju (ang. *hopper*) [RH94]. Ściany leja tworzą kąt θ zakończony otworem o średnicy D . Podczas gdy cząstki nachodzą na siebie (odległość pomiędzy środkami jest mniejsza niż suma promieni, rysunek 2), działają na nie trzy siły:

- elastyczna siła odpychająca (ang. *elastic restoration force*),

$$f_{el}^i = -Y \left(|\mathbf{r}_{ij}| - \frac{1}{2}(d_i + d_j) \right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|), \quad (12)$$

gdzie Y jest to moduł Younga, r_{ij} , d_i , d_j odległości pomiędzy oraz promienie cząstek i -tej i j -tej.

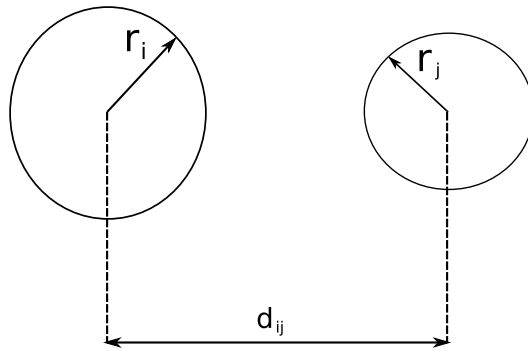
- siła rozproszenia związania z nieelastycznością zderzenia (ang. *dissipation due to inelasticity of the collision*),

$$f_{diss}^i = -\gamma m_{eff}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|^2), \quad (13)$$

- tarcie, którego wartość jest proporcjonalna do prędkości poruszającej się cząstki,

$$f_{dyn}^i = -\gamma_s m_{eff}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{t}_{ij})(\mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|^2), \quad (14)$$

gdzie γ_s jest współczynnikiem tarcia (ang. *shear friction coefficient*). Natomiast $\mathbf{t}_{ij}$ jest prostopadły do wektora $\mathbf{r}_{ij}$, czyli $\mathbf{v}_{ij} = (-r_{ij}^y, r_{ij}^x)$.



Rysunek 2: Oddziaływanie pomiędzy dwiema cząstkami, z których każda może mieć inną średnicę. Oznaczenia: r_i , r_j promienie cząstek, d_{ij} odległość pomiędzy ich środkami.

4 Model Helbinga

Na podstawie wcześniejszej charakterystyki tłumu można stworzyć model fizyczny oddziaływań pomiędzy cząsteczkami. Zakładając połączenie oddziaływań o charakterze socjologicznym oraz fizycznym (wzory 11, 12, 14): każda z N cząsteczek (o indeksie i) mająca masę m dąży, aby poruszać się z wcześniej znaną prędkością docelową v_0 , w określonym kierunku, wyznaczanym przez wektor $\mathbf{e}_i$. Będąc w grupie i -ta cząstka stara się dopasować swoją prędkość do prędkości sąsiadów (poprzez oddziaływania z otaczającymi cząsteczkami) w określonym czasie τ_i . Jednocześnie stara się utrzymać stałą odległość od sąsiadów oraz ścian.

Powyższe założenia można ująć w następującym równaniu

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \frac{v_i^0(t) \mathbf{e}_i^0(t) - \mathbf{v}_i(t)}{\tau_i} + \sum_{j(\neq i)} \mathbf{f}_{ij} + \sum_W \mathbf{f}_{iW}, \quad (15)$$

gdzie W jest indeksem ścian.

Wspomniana siła socjologiczna stara się utrzymać określoną odległość pomiędzy cząstkami, poprzez działanie odpychające:

$$A_i \exp((r_{ij} - d_{ij})/B_i) \mathbf{n}_{ij}, \quad (16)$$

gdzie A_i oraz B_i to stałe. Odległość pomiędzy środkami mas $d_{ij} = \|r_i - r_j\|$ oraz unormowany wektor od cząstki j -tej do i -tej, $\mathbf{n}_{ij} = (n_{ij}^1, n_{ij}^2) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)/d_{ij}$.

W momencie gdy cząstki stykają się ze sobą, czyli odległość pomiędzy ich środkami jest mniejsza niż suma promieni, zaczyna działać dodatkowa siła odpychająca, przeciwdziałająca ścisnieniu się ciał

$$k\theta(r_{ij} - d_{ij}) \mathbf{n}_{ij}, \quad (17)$$

oraz siła hamująca, działająca prostopadle do kierunku ruchu,

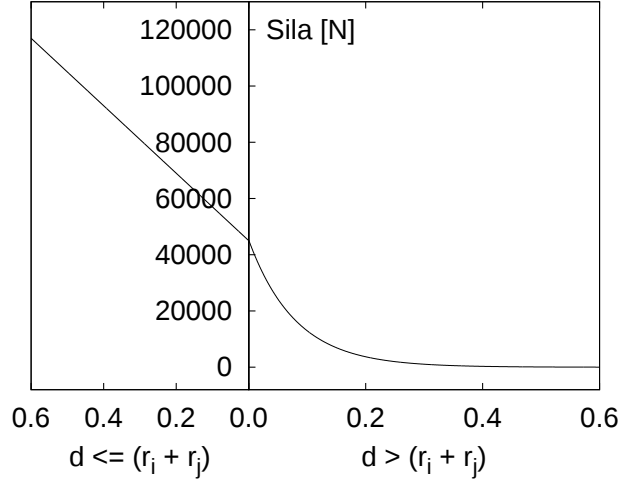
$$\kappa\theta(r_{ij} - d_{ij}) \Delta v_{ji}^t \mathbf{t}_{ij}. \quad (18)$$

Funkcja pomocnicza θ obecna we wzorach (17) oraz (18) zwraca 0 jeśli odległość pomiędzy środkami cząstek jest większa niż suma ich promieni:

$$\theta(z) = \begin{cases} z & \text{dla } z > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \quad (19)$$

Siła zdefiniowana wzorem (15) ma charakter daleko-zasięgowy, natomiast siły opisane wzorami (17) oraz (18) blisko-zasięgowy, tzn. oddziałują w momencie zetknięcia się ciał. Wektor $\mathbf{t}_{ij} = (-n_{ij}^2, n_{ij}^1)$ wyznacza kierunek prostopadły do kierunku ruchu, natomiast $\Delta v_{ji}^t = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{t}_{ij}$ jest różnicą prędkości dwóch cząstek, również skierowaną prostopadle do kierunku ruchu.

Wykres 3 przedstawia jak zmienia się siła, zdefiniowana we wzorach (16) oraz (17) wraz ze zmianą odległości pomiędzy ludźmi, bez uwzględnienia części odpowiedzialnej za tarcie



Rysunek 3: Zmiana wartości sił oddziaływujących pomiędzy dwiema cząsteczkami wraz ze zmianą odległości pomiędzy ich środkami d . W momencie w którym odległość pomiędzy środkami cząstek d jest mniejsza niż suma ich promieni $r_i + r_j$ zaczyna działać dodatkowa siła przeciwdziałająca ścisnaniu ciał (wzór 17). Wykres nie uwzględnia części odpowiedzialnej za tarcie.

Zapisując jawnie siły oddziaływań pomiędzy dwiema cząstkami otrzymamy:

$$f_{ij} = (A_i \exp((r_{ij} - d_{ij})/B_i) + k\theta(r_{ij} - d_{ij})) \mathbf{n}_{ij} + \kappa\theta(r_{ij} - d_{ij}) \Delta v_{ij}^t \mathbf{t}_{ij} \quad (20)$$

oraz dla oddziaływań cząstki ze ścianą:

$$f_{iW} = (A_i \exp((r_i - d_{iW})/B_i) + k\theta(r_i - d_{iW})) \mathbf{n}_{iW} - \kappa\theta(r_i - d_{iW}) (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t}_{iW}) \mathbf{t}_{iW}. \quad (21)$$

Aby odwzorować pomieszczenie z rysunku 4 należy dodać jeszcze jedną siłę f_{iC} (oddziaływanie cząstki z narożnikiem). Odpowiada ona za oddziaływanie pomiędzy cząstką a czterema wypukłymi rogami przy wyjściu. Ma identyczną postać jak równie (21), z tą różnicą, że należy iterować po rogach, a nie ścianach.

Wspomniana wcześniej „siła kierująca” (ang. *driving force*) jest we wzorze (15) zdefiniowana jako wersor $\mathbf{e}_i^0$ który wyznacza kierunek w którym cząstki się poruszają (dokładny mechanizm zostanie opisany później).

Prędkość docelowa, jest to maksymalna prędkość jaką może osiągnąć człowiek. Każdy krok czasowy symulacji zwiększa (lub zmniejsza) aktualną prędkość poprzez oddziaływania, oraz wpływ „przyspieszenia” τ_α .

5 Wyniki

W tym rozdziale przedstawione zostaną oryginalne wyniki otrzymane przy pomocy zaimplementowanego przeze mnie modelu Helbinga na podstawie [HFV00b]. Na wstępie zapoznamy się z kilkoma ogólnikami dotyczącymi implementacji (dokładniejszy opis znajduje się w dodatku E). Następnie przedstawiony zostanie sposób opracowania wyników oraz porównanie z wynikami z pracy Helbinga. Punkt ten ma na celu zweryfikowania poprawności algorytmu. Ostatnia część będzie poświęcona omówieniu wpływu różnych parametrów na zachowanie modelu oraz analogie do sytuacji rzeczywistych, w których można je wykorzystać. Rozdziały od 5.6 do 5.9 opisują oryginalne wyniki otrzymane przeze mnie, które były wcześniej tematem żadnej publikacji.

5.1 Algorytm

Badanie ewolucji układu polega na rozwiązaniu równań ruchu metodą Eulera ze zmiennym krokiem całkowania (ang. *adaptive step*). Na jeden krok symulacji przypada obliczenie:

- sił oddziaływań:
 - człowieka z człowiekiem, oznaczenie we wzorach $\mathbf{f}_{ij}$,
 - człowieka ze ścianą, oznaczenie $\mathbf{f}_{iW}$,
 - człowieka z rogiem, oznaczenie $\mathbf{f}_{iC}$,
- wektora e_i , czyli wyznaczenie kierunku ucieczki,
- kroku całkowania na podstawie obliczonych sił,
- aktualizacji równań ruchu,
- przesunięcia każdej z cząstek; w przypadku wyjścia poza określony cel cząstka jest usuwana z układu.

5.2 Warunki początkowe

Cząstki znajdują się w prostokątnym pomieszczeniu z wyjściem umieszczonym centralnie na jednej ze ścian. Pomieszczenie mające rozmiar 15 x 15 metrów, może pomieścić około 200 osób (uwzględniając zachowanie minimalnej odległości pomiędzy sąsiadami). Średnia masa człowieka wynosi około $m = 80$ kg oraz średnica ciała $2r_i$ mieści się w przedziale $[0.5m, 0.7m]$. Maksymalna prędkość jaką może osiągnąć człowiek wynosi nawet 10 m/s, jednak jest ona bliska rekordom świata w lekkoatletyce. Porównanie przykładowych prędkości można znaleźć w tabeli 2. Czas przyśpieszania jest ustalony na poziomie $\tau = 0.5$ s.

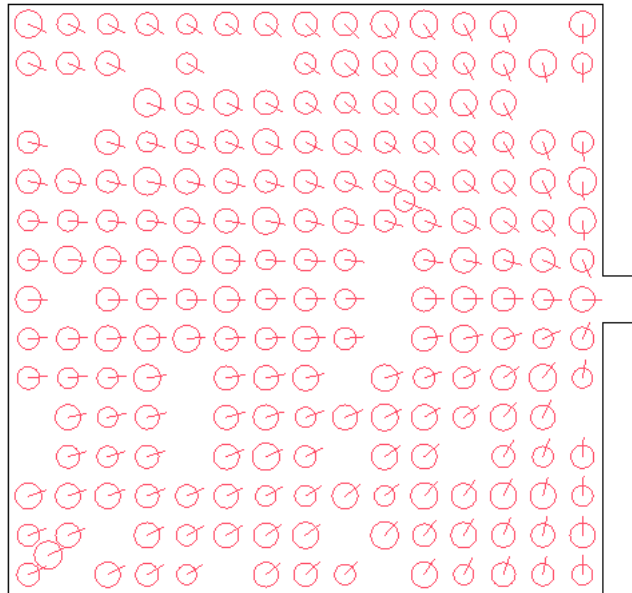
Parametry A_i oraz B_i są dobrane eksperymentalnie na podstawie obserwacji zawartych w pracy [Wei93] i wynoszą odpowiednio $2 \cdot 10^3$ N oraz 0.08 m.

Każda z cząstek ma zestaw parametrów, które ewoluują wraz z rozwojem symulacji:

- położenie, x_i, y_i ,
- wektor wskazujący kierunek cel do którego dąży, e_i ,
- aktualna prędkość, v_i ,

i zbiór parametrów, które pozostają stałe:

- prędkość docelowa, v_0 ,
- czas dopasowania swojej prędkości do prędkości sąsiadów, τ_i .



Rysunek 4: Zrzut ekranu prezentujący konfigurację początkową symulacji. Położenie cząstek oraz ich promienie są wylosowane zgodnie z jednorodnym rozkładem statystycznym.

5.3 Siła kierująca

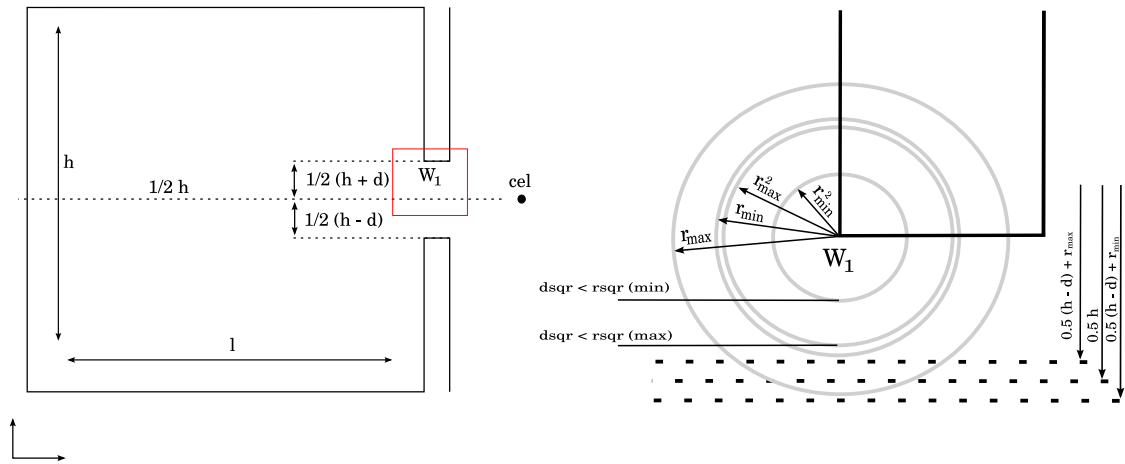
Wektor wyznaczający kierunek poruszania się we wzorze (15) oznaczony jako $\mathbf{e}_i$, jest wyliczany dla każdej z cząstek indywidualnie na podstawie jej położenia oraz współrzędnych celu do którego dąży. Pomieszczenie w którym znajdują się cząstki zostało podzielone na dwie części względem sumy (dolna połowa) lub różnicy (górną połowę) linii przechodzącej przez środek wyjścia oraz promienia cząstki, matematycznie to można zapisać:

$$\frac{1}{2} \cdot \text{szerokość wyjścia} \pm \frac{1}{2} \cdot \text{szerokość drzwi} \mp \text{promień cząstki}. \quad (22)$$

Znak zależy od tego w której połowie się znajdujemy. Wewnątrz każdej z części można wyróżnić trzy obszary (wszystkie oznaczenia są zgodne z rysunkiem 5 oraz algorytmami w dodatku E):

- a) *daleko od wyjścia*, gdy kwadrat odległości ($dsqr$) cząstki od narożnika W_1 jest większy niż kwadrat promienia cząstki ($rsqr$);
- b) *blisko wyjścia*, kiedy kwadrat odległości cząstki od W_1 jest mniejszy niż kwadrat jej promienia oraz większy niż różnica połowy szerokości pomieszczenia i połowy szerokości wyjścia;
- c) *bardzo blisko wyjścia*, gdy położenie cząstki nie spełnia dwóch powyższych warunków, czyli kwadrat jej odległości od W_1 jest mniejszy niż kwadrat jej promienia, oraz mniejszy niż różnica połowy szerokości pomieszczenia i połowy szerokości wyjścia.

Rysunek 5 prezentuje schemat pomieszczenia wykorzystanego w symulacji. Trzy zmienne są istotne przy opisywaniu pomieszczenia, jego szerokość (h) oraz długość (l) i szerokość drzwi (d). Na ich podstawie wyliczane są wszystkie pozostałe parametry, np. górny róg drzwi jest zadany przez sumę połowy szerokości jednej ze ścian i drzwi. Prawy rysunek zawiera powiększenie obszaru zaznaczonego kolorem, są to obszary opisane w punktach powyżej.



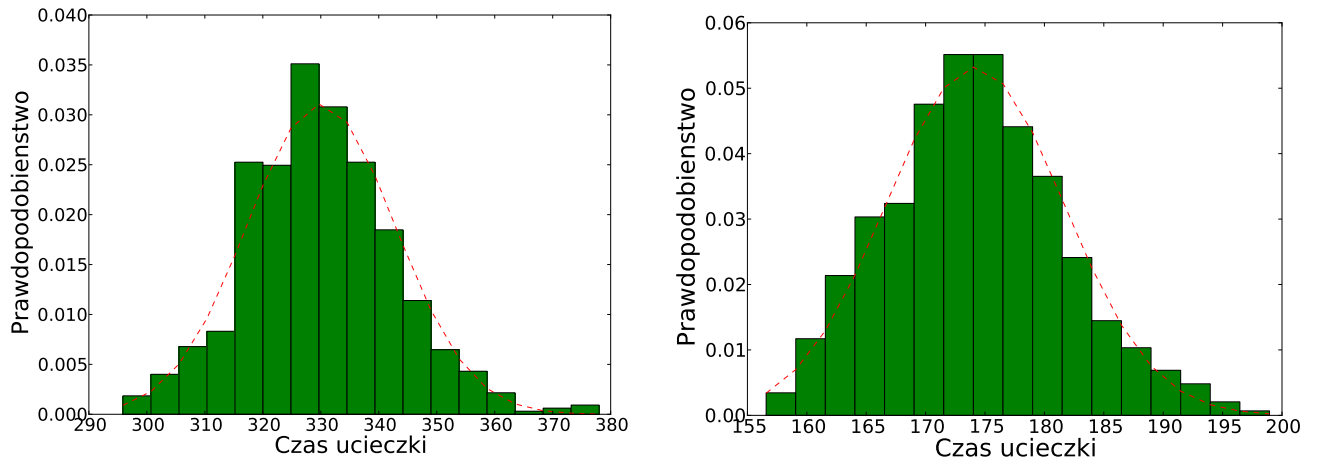
Rysunek 5: Geometria pomieszczenia, drzwi znajdują się symetrycznie na jednej ze ścian. Rysunek po prawej przedstawia powiększenie zaznaczonego obszaru przy wyjściu. Widać podziały na obszary w których znajduje się cząstka w zależności od swojego położenia. Podane oznaczenia są również wykorzystane w dodatku E opisującym implementację. „Cel” jest to miejsce do którego dążą cząsteczki, jego położenie jest wykorzystane przy obliczaniu wektora kierunkowego $\mathbf{e}_i$. Oznaczenia: l - szerokość pomieszczenia, h - długość pomieszczenia, W_1 - górny narożnik drzwi, d - promień dowolnej cząstki.

5.4 Sposób otrzymania wyników

Symulacje zostały powtórzone kilka do kilkunastu razy. W pracy zostały wykorzystane dwie metody obliczania błędów, pierwszy - błąd standardowy, którego opis znajduje się na końcu pracy (dodatek A) oraz błąd statystyczny wyznaczony za pomocą tzw. wykresu skrzynkowego (ang. *box-plot* lub *box-and-whisker plot*). Ten ostatni jest graficznym przedstawieniem danych numerycznych przy pomocy pięciu parametrów, tj. wartości najmniejszej, dolnego kwantyla, mediany, górnego kwantyla oraz wartości największej. Wykres skrzynkowy jest użyteczny gdy nie znamy rozkładu statystycznego otrzymanych wyników. Jeśli na wykresie nie został zaznaczony błąd, jest to spowodowane tym, że błąd standardowy był mniejszy niż wielkość punktu naniesionego na wykres, przez co mógłby powodować nieczytelność danych.

Przed przystąpieniem do opracowywania wyników zostały przeprowadzone testy mające na celu zbadanie rozkładu wyników dla dwóch różnych prędkości. Na podstawie tego można wybrać sposób obliczania wspomnianego już błędu.

W celu otrzymania histogramu, prezentującego ilościowo czas opuszczania pomieszczenia, symulacja została powtórzona po 600 razy dla dwóch różnych prędkości docelowych ($v_0 = 0.5$ oraz $v_0 = 1.5$).



Rysunek 6: Histogram czasów ucieczki dla prędkości $v_0 = 0.5$ (lewy) oraz $v_0 = 1.5$ (prawy). Wyniki zostały unormowane.

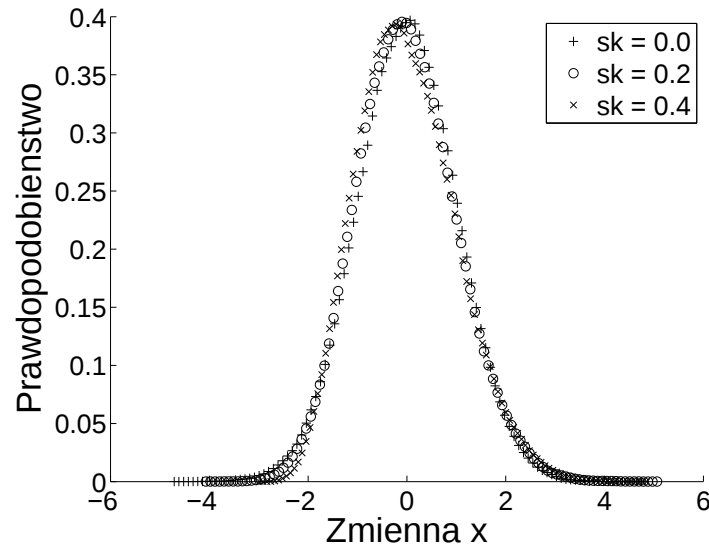
Jak widać wykresy odbiegają od rozkładu normalnego, posiadają tendencję do „skośności” w lewą stronę.

Następnie zostały przeprowadzone dwa pomiary: test na skośność (dodatek B) oraz test na normalność Shapiro – Wilka (dodatek C). Wyniki można znaleźć w tabeli 1.

	A	B	$p - value$
$v_0 = 0.5$	0.30	0.9912	0.00049
$v_0 = 1.0$	0.20	0.9941	0.01416

Tablica 1: Charakterystyka liczbowa rozkładów czasów ucieczki. A - test na skośność, B - test Shapiro-Wilka

Kolumna oznaczona jako A (tabela 1), zawiera wyniki testu na skośność. Dla obu prędkości wartość jest większa od zera, jednak wraz ze wzrostem badanej próbki (ilości powtórzeń) wartość ta zmniejszała się. Aby odczytać poprawnie otrzymane wyniki dołączony został wykres rozkładu normalnego różnych wartościach skośności, należy pamiętać, że dla idealnego rozkładu normalnego, skośność dąży do zera.



Rysunek 7: Porównanie rozkładu normalnego o różnych skośnościach

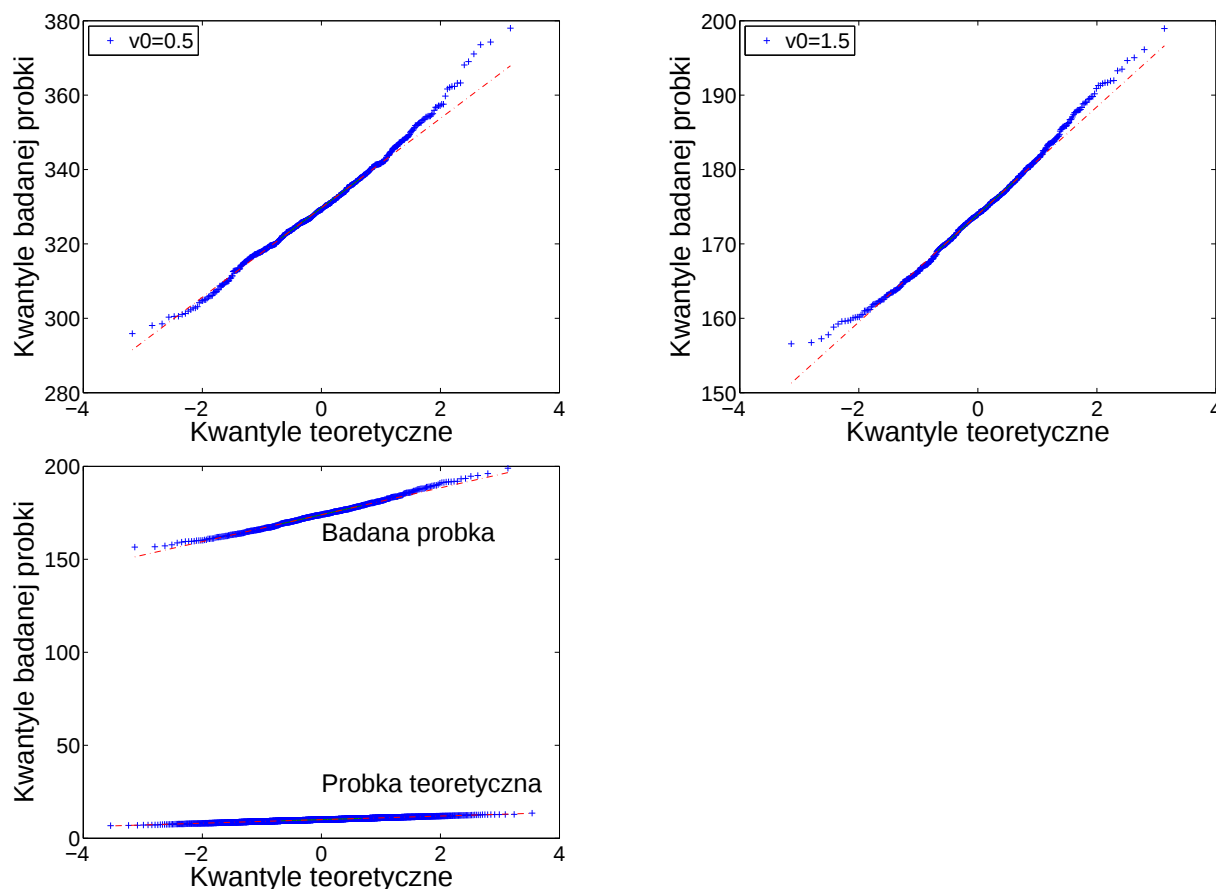
Jak widać wykresy niewiele się od siebie różnią.

Wyniki drugiego testu, Shapiro-Wilka (kolumna „ B ” oraz „ $p - value$ ” z tabeli 1), można zinterpretować, ustalając pewną wartość parametru ufności α na podstawie którego, można przyjąć lub odrzucić hipotezę o normalności rozkładu wyników. Parametr ufności, zwany inaczej poziomem istotności, jest wartością określającą maksymalne prawdopodobieństwo popełnienia błędu (mówiąc precyzyjnie błędu I rodzaju). Badacz sam ustala tę wartość na podstawie problemu dla którego przeprowadzany jest test statystyczny. Zazwyczaj jest to wartość równa 0.05, rzadziej 0.1, 0.03, 0.01.

Jak widać na podstawie tabeli 1 należy odrzucić hipotezę o normalności rozkładu, ponieważ „ $p - value$ ” o obu przypadkach jest znacząco mniejsze niż $\alpha = 0.05$. Może to jednak wynikać z małej próby na jakiej został przeprowadzony test.

Aby ostatecznie rozwiązać wszystkie wątpliwości dotyczące rozkładu prędkości został prze-

prorowadzony ostatni test. Rozkład prędkości został wyrysowany na tzw. wykresie *qq* (ang. *quantile-quantile plot*).

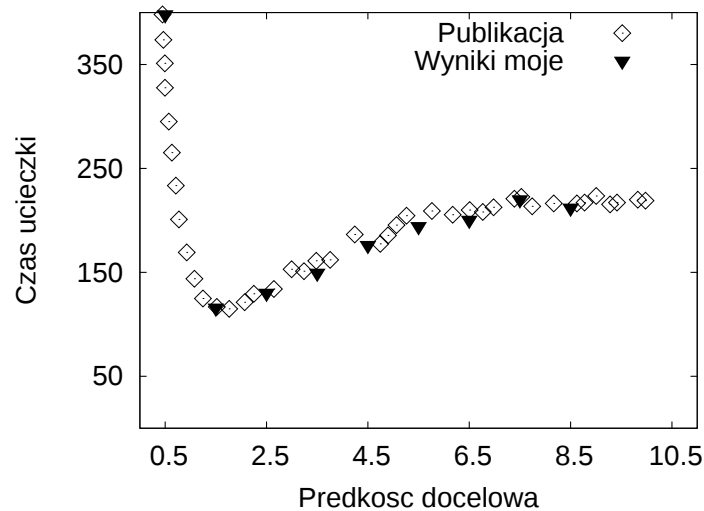


Rysunek 8: Wykres *qq* dla prędkości $v_0 = 0.5$ i $v_0 = 1.5$, oraz porównanie z krzywą odwzorowującą rozkład normalny. Każdy punkt to wartość jednego pomiaru, linia przerywana reprezentuje hipotetyczny kształt krzywej, gdyby wyniki miały rozkład normalny.

Krzywe, na dwóch górnych wykresach, są znacząco odchylone w lewą stronę od prostej $x = y$. Widać to dokładnie na trzecim wykresie z serii, gdzie zostały naniesione krzywe dla rozkładu badanego (dla prędkości $v_0 = 1.5$) oraz krzywa będąca odwzorowaniem rozkładu normalnego (oznaczona jako „Próbka teoretyczna”). Odchylenie punktów na dwóch pierwszych wykresach świadczy o możliwości istnienia „grubego ogona” rozkładu, tzn. że prawdopodobieństwo wylosowanie liczby z „ogona” rozkładu (powyżej lub/i poniżej trzykrotności odchylenia standardowego) jest większe niż zakłada rozkład normalny. Podsumowując, rozkład statystyczny otrzymanych wyników nie jest rozkładem normalnym, jednak jego charakterystyka jest zbliżona do rozkładu normalnego. W związku z tym, w celu uproszczenia, wszystkie wyniki będą traktowane jakby były zgodne z rozkładem normalnym.

5.5 Porównanie wyników

W celu sprawdzenia poprawności implementacji algorytmu wyniki otrzymane przeze mnie zostały porównane z wynikami z publikacji [HFV00b]



Rysunek 9: Porównanie wyników otrzymanych na podstawie symulacji z wynikami z publikacji [HFV00b]. Istnieje optymalna prędkość poruszania się, która gwarantuje minimalny czas opuszczenia pomieszczenia.

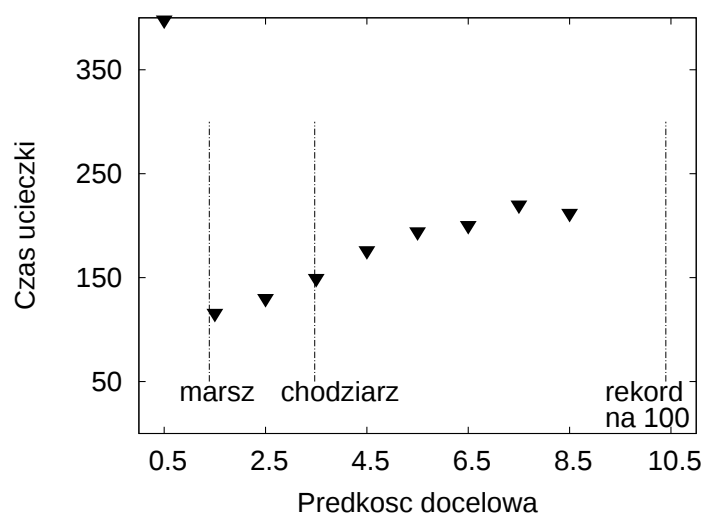
Wykres przedstawia czas jaki upłynie od rozpoczęcia symulacji do momentu w którym ostatnia osoba opuści pomieszczenie. Na osi odciętych znajdują się prędkości docelowe (v_0), do której każda z cząstek dąży aby się poruszać. Na wykresie (9) można zauważyć minimum, oznacza to, że istnieje prędkość docelowa (jest to również prędkość maksymalna jaka jest dopuszczalna), która gwarantuje najkrótszy czas ewakuacji. Prędkość ta jest równa około $v_0 = 1.5 \frac{m}{s}$, co odpowiada nieco szybszemu chodowi. Dla porównania w tabeli 2 znajdują się przykładowe prędkości z jakimi porusza się człowiek. Dodatkowo na wykresie 10 zostały nałożone otrzymane wyniki wraz z zaznaczonymi prędkościami poruszania się człowieka.

prędkość poruszania	przykład
< 1.39	„normalny” chód
1.39	marsz
3.47	szybki chód
10.4	aktualny rekord „na 100 metrów”

Tablica 2: Charakterystyczne prędkości z jakimi porusza się człowiek.

Zazwyczaj symulacje nie będą kontynuowane dla prędkości powyżej $v_0 = 8.5 m/s$ ponieważ jest to prędkość mało realna do osiągnięcia w pomieszczeniu zamkniętym podczas

ewakuacji.

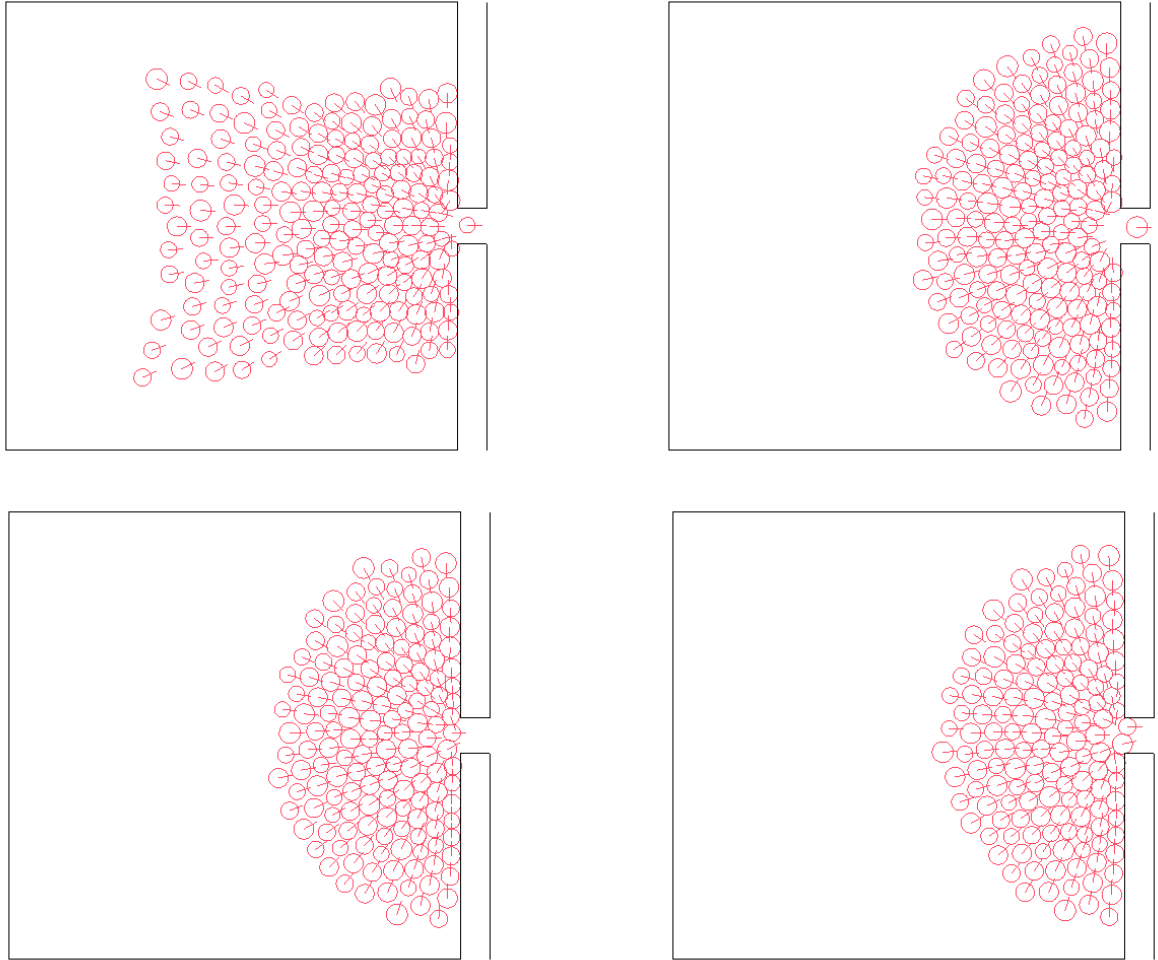


Rysunek 10: Otrzymane wyniki czasów ewakuacji w zależności od prędkości docelowej wraz z nałożonymi charakterystycznymi prędkościami poruszania się człowieka. Optymalna prędkość podczas ewakuacji jest nieco wyższa niż prędkość chodu w warunkach normalnych.

W trakcie przebiegu symulacji można obserwować kilka charakterystycznych zjawisk, część z nich występuje zawsze, część tylko powyżej jakiejś granicznej wielkości. Oczywiście ich intensywność zależy od wielkości parametrów. Po upływie określonego czasu od rozpoczęcia symulacji cząstki tworzą duży półokrąg, który jest symetryczny względem środka wyjścia. Jest to związana z dążeniem układu do chwilowej równowagi stabilnej, poprzez osiągnięcie minimalnych wartości oddziaływań.

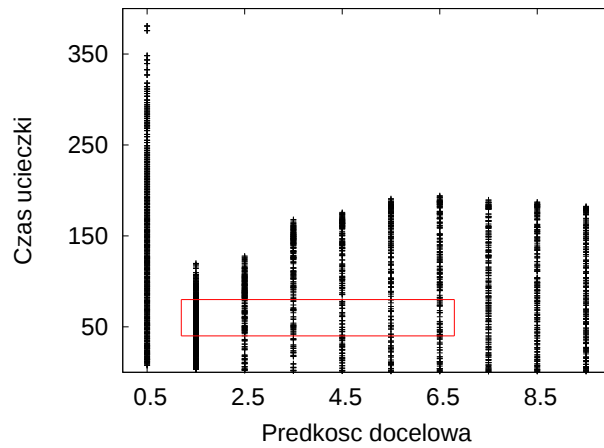
W sytuacji idealnej ruch jest płynny, cząstki opuszczają pomieszczenie pojedynczo, jednak takie zachowanie występuje tylko dla prędkości docelowej dla której czas ewakuacji jest minimalny (rysunek 11). Dla prędkości niższych ruch również odbywa się płynnie ale znacznie wolniej. Natomiast dla prędkości wyższych niż prędkość optymalna występują zatory oraz zakleszczanie wyjścia.

Przez zakleszczenie będziemy rozumieć sytuację w której ludzie tworzą mały półokrąg przy wyjściu, który blokuje w danej chwili możliwość poruszania się cząstek. Jest to spowodowane m.in. przez tarcie, które zależy od prędkości. Cząstki chcąc poruszać się szybciej, w rzeczywistości poprzez tarcie z innymi uczestnikami zdarzenia, będą spowalniały ruch. Dodatkowo zachodzi również zjawisko blokowania wyjścia przez dwie lub trzy cząstki będące bezpośrednio przy wyjściu, starające się uciec.

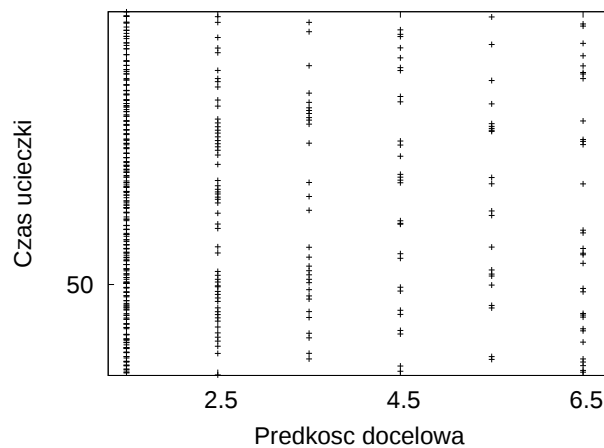


Rysunek 11: Zrzuty ekranów symulacji przedstawiające kilka charakterystycznych zachowań. Lewy przedstawia moment w którym cząstki dochodzą do wyjścia; na prawym cząstki układają się w charakterystyczny łuk powodując zakleszczenie. Po upływie chwili, gdy jedna z cząstek pokona tarcie następuje niewielka lawina i ucieka kilka cząstek jednocześnie.

Minimum na wykresie 9 spowodowane jest wyżej wspomnianymi zjawiskami, które nasilają się dopiero powyżej określonej prędkości. Blokowanie wyjścia oraz tworzenie łuków widać na wykresie 12, zawiera on czasy ucieczki dla poszczególnych cząstek względem prędkości docelowej (v_0) oraz wykres przedstawiający powiększenie zaznaczonego obszaru 13. Wzrost prędkości powoduje wzrost ilości oraz wielkości „dziur”, czyli przerw w ciągłości ewakuacji spowodowanych blokowaniem. Dla prędkości $v_0 = 1.5 \text{ m/s}$ ewakuacja przebiega płynnie i prawie w ogóle nie występują zjawiska zaburzające płynność. Przy mniejszych prędkościach zjawiska blokowania nie zachodzą, ruch jest płynny ale ewakuacja odbywa się wolniej.

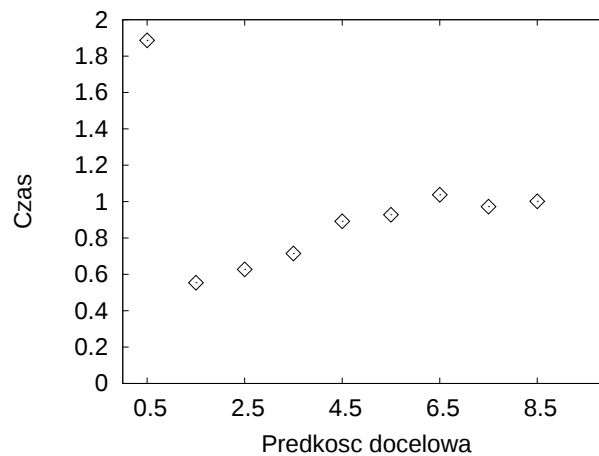


Rysunek 12: Czas opuszczenia pomieszczenia dla każdej cząstek w zależności od prędkości docelowej. Czerwoną ramką został zaznaczony obszar, który jest powiększony na wykresie 13. Prędkość jest wyrażona w m/s, czas ucieczki w sekundach.



Rysunek 13: Powiększenie obszaru zaznaczonego na wykresie 12. Wraz ze wzrostem prędkości docelowej wzrasta ilość oraz wielkość „dziur” na wykresie, jest to spowodowane coraz częstszym występowaniem zjawisk „zakleszczania się” oraz blokowania wyjścia przez uciekających ludzi.

Wykres 14 zawiera średnią wartość różnicy czasu pomiędzy czasami ucieczki kolejnych cząstek.

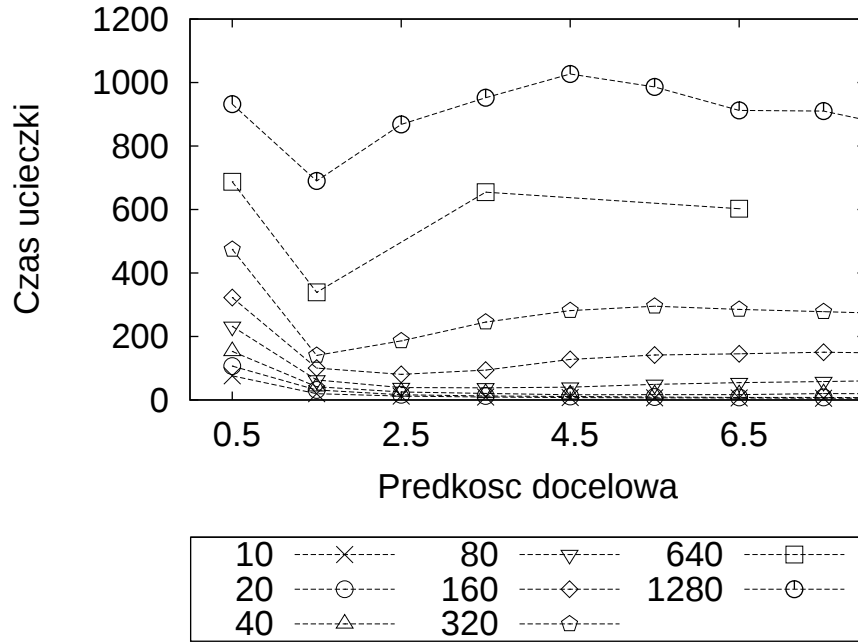


Rysunek 14: Średni czas pomiędzy czasami ucieczki poszczególnych cząstek dla różnej wartości docelowych

Ciekawym efektem jest fakt, że krzywa ma bardzo podobny kształt do wykresu czasu ucieczki cząstek na wykresie 9. Ważniejsze jest, że dla prędkości dla której ewakuacja jest najefektywniejsza czas pomiędzy kolejnymi czasami ucieczki cząstek jest najmniejszy. Świadczy to o tym, że nie występują zatory spowodowane zakleszczaniem cząstek, które wzrastają wraz ze wzrostem prędkości v_0 .

5.6 Wpływ wielkości populacji

W celu dokładnego zbadania modelu, należy sprawdzić wpływ wielkości populacji na przebieg ewakuacji. To zagadnienie można odnieść do cytowanego poniżej przepisu przeciwpożarowego. Mowa jest w nim o szerokości drzwi w zależności od wielkości populacji. W symulacji wraz ze zmianą populacji początkowej zmieniała się również wielkość pomieszczenia z którego odbywała się ewakuacja. Dla populacji 10 do 40 (pomieszczenie miało wymiary 7x7 metrów), następnie 80 (pomieszczenie 10 x 10 metrów), 160(15x15 metrów), 320 (pomieszczenie 20x20 metrów), 640 (pomieszczenie 30x30 metrów) oraz populacja wielkości 1280 w pomieszczeniu (40x40 metrów).



Rysunek 15: Wpływ wielkości populacji na zmianę zachowania układu. Liczby na legendzie oznaczają wielkość populacji.

Wraz ze wzrostem populacji, nie zmienia się optymalna prędkość opuszczania pomieszczenia. Zależność przedstawiona na wykresie 15 świadczy o skalowalności wyników otrzymanych w ramach modelu. Możemy założyć, że wyniki otrzymane dla mniejszych populacji będą również prawdziwe dla większych. Prędkość, dla której czas opuszczania pomieszczenia jest najmniejszy jest niezależna od wielkości populacji i jest równa około $v_0 = 1.5 \text{ m/s}$. Wniosek jaki się nasuwa jest taki, że niezależnie od ilości ludzi w pomieszczeniu, zawsze należy opuszczać je z prędkości bliską prędkości chodu.

5.7 Wpływ masy

Od początku ubiegłego wieku przeprowadzane są badania na temat rozkładu statystycznego mas ludzi [Que35], [HDHW01]. Na podstawie tych prac można wyciągnąć wnioski, że rozkład mas społeczeństwa jest zgodny z rozkładem normalnym. Oczywiście charakterystyka tego rozkładu zależy od wieku, płci oraz narodowości. W mojej symulacji, jak również u Helbinga, masa ma wartość stałą, natomiast promień każdej z cząstek jest losowany z rozkładu jednorodnego. Zastosowanie rozkładu zgodnego z rozkładem gaussowskim nie spowoduje skomplikowania modelu, a jedynie urealni, przybliży do rzeczywistości.

Przyjmując średnią masę człowieka równą $\mu = 80 \text{ kg}$ oraz odchylenie standardowe od wartości średniej σ takie jak w tabeli 3, otrzymamy wyniki które możemy przedstawić w postaci serii wykresów.

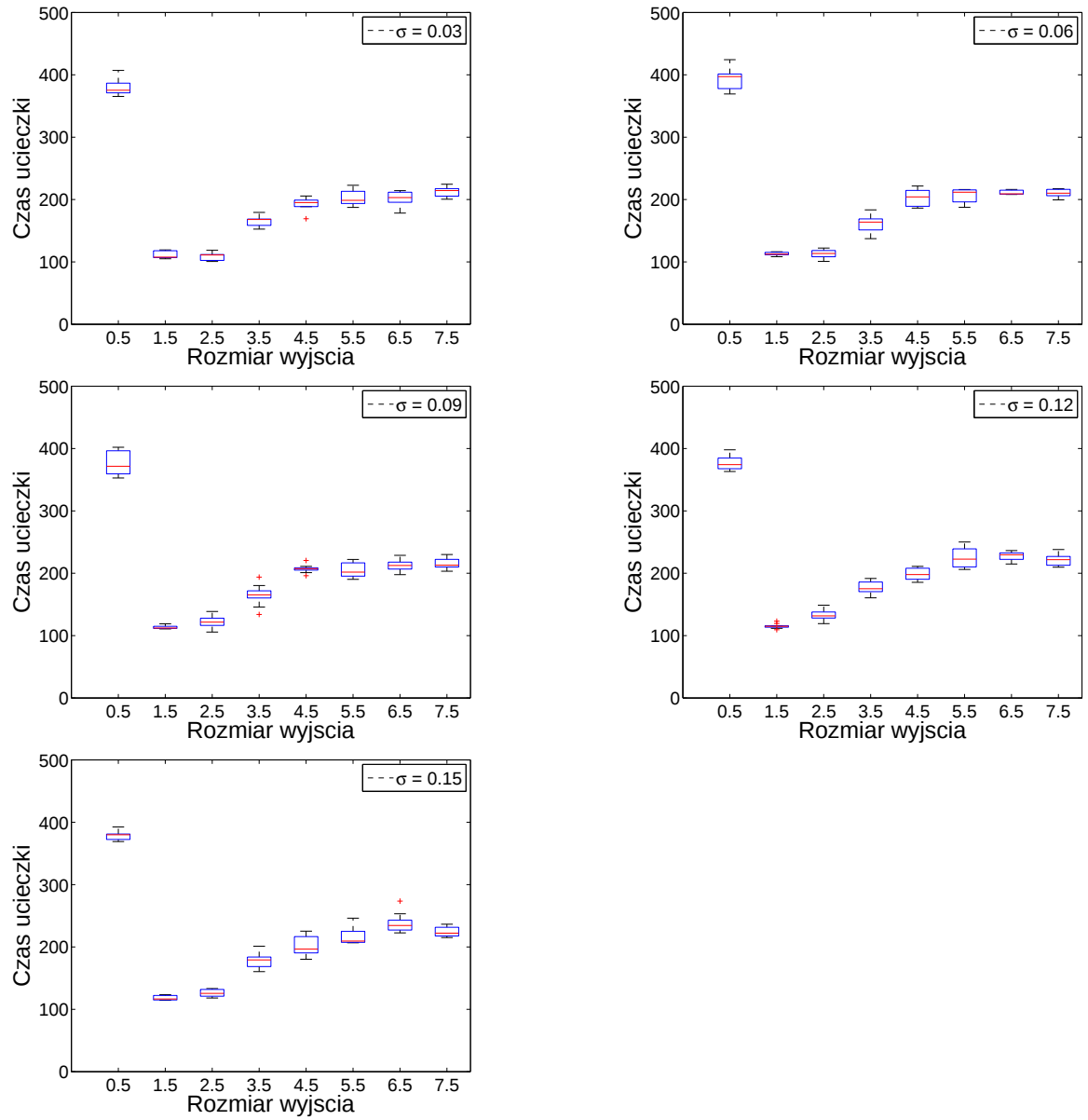
σ	r_{min}	r_{max}	m_{max}	m_{min}
3%	0.27	0.33	73.9	88.0
6%	0.25	0.36	67.8	96.0
9%	0.23	0.39	61.7	104.0
12%	0.20	0.42	55.6	112.0
15%	0.18	0.45	49.5	120.0

Tablica 3: Wartości mas (m) oraz promieni (r) dla rozkładu normalnego charakteryzującego się wartością średnią $\mu = 80$ oraz odchyleniem standardowym σ . Parametr σ określony jest jako procent wartości średniej masy μ . Masa jest wyrażona w kilogramach, natomiast promień w metrach.

Wartość odchylenia standardowego σ jest wyrażona jako procent wartości średniej μ , czyli dla $\sigma = 3\%$ odchylenie standardowe wynosi około 2,4 kg.

Należy pamiętać, że odchylenie standardowe (parametr σ) gwarantuje, że około 64% wyników będzie w zakresie $\mu \pm \sigma$, dlatego masy o wartościach skrajnie małych (lub skrajnie dużych) są prawdopodobne. Z tego również powodu symulacja została przerwana przeze mnie dla $\sigma = 15\%\mu$, powyżej tej wartości cząstki blokowały wyjście (ich średnica był większa niż szerokość wyjścia, tj. 1.2 m).

Porównując serię wykresów 16 widzimy, że charakterystyka rozkładu mas nie ma żadnego wpływu na czas ewakuacji. Może to wynikać z symetrii rozkładu normalnego oddziaływanie pochodzące od mniejszych cząstek jest równoważone przez oddziaływania większych cząstek. Patrząc na wzór 15 widać, że masa nie ma bezpośrednio wpływu na szybkość przyspieszania, a jedynie na siły oddziałujące pomiędzy cząstkami i przeszkodami.



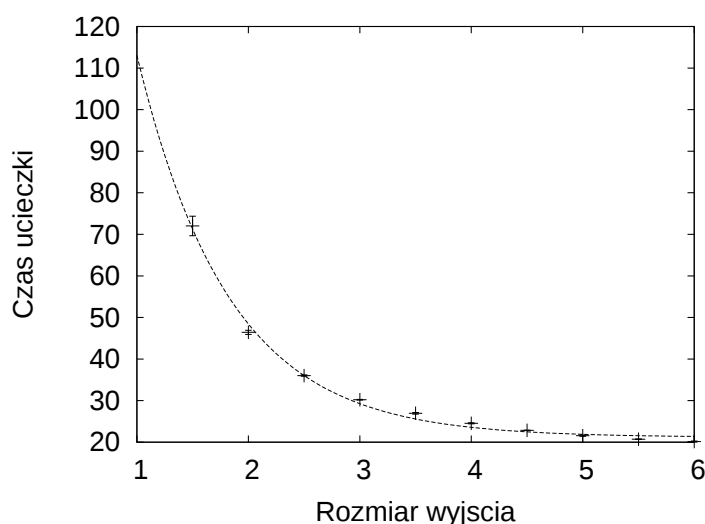
Rysunek 16: Wpływ rozkładu masy na czas ewakuacji, wartość odchylenia standardowego od wartości średniej jest określona jako procent wartości średniej masy. Błąd został zaznaczony przy pomocy wykresu pudełkowego. Szerokość wyjścia równa 1.2 metra, prędkość docelowa $v_0 = 1.5m/s$, populacja 200.

5.8 Szerokość wyjścia

Czynnikiem mającym ogromny wpływ na czas ewakuacji jest szerokość wyjścia. Poniższy wynik może mieć nie tylko znaczenie czysto teoretyczne, ale może być przydatny dla architektów lub inżynierów planujących wyjścia ewakuacyjne.

Wszystkie powyższe symulacje, oraz większość kolejnych (chyba, że zostało to zaznaczone) zostały przeprowadzone dla szerokości drzwi równych w przybliżeniu dwu-krotności średniej szerokości człowieka.

Zmieniając rozmiar wyjścia od 1.2 do 6 metrów, lub po przeskalowaniu, wyrażone w średnicy człowieka (poprzez podzielenie przez średnią szerokość człowieka ($2 < r \leq 0.6$), od 2 do 10, otrzymujemy wykres 17. Należy wspomnieć, że symulacja została przeprowadzona dla prędkości docelowej $v_0 = 1.5$, czyli optymalnej szybkości opuszczania pomieszczenia oraz dla cząstek o masie $m = 80kg$ i jednorodnym rozkładzie promieni (średnia wartość $\bar{r} = 0.3$).



Rysunek 17: Wpływ zmiany szerokości drzwi (w metrach) na średni czas ewakuacji (w sekundach). Na wykresie został naniesiony średni błąd standardowy oraz krzywa wykładnicza (wzór 23).

Na podstawie wykresu 17 można wyciągnąć następujące wnioski. Po pierwsze, można zauważyć, że efektywność ewakuacji wyznaczona przez czas potrzebny na opuszczenie pomieszczenia, wraz ze wzrostem rozmiaru wyjścia maleje. Co jest wynikiem dosyć oczywistym, gdyż wraz ze wzrostem szerokości drzwi wzrasta „przepustowość”, co powoduje, że ludzie mogą się szybciej ewakuować. Jednak nie istnieje żaden punkt krytyczny w którym krzywa zmienia swoje zachowanie. Dlatego z wykresu 17 nie można określić optymalnej szerokości drzwi.

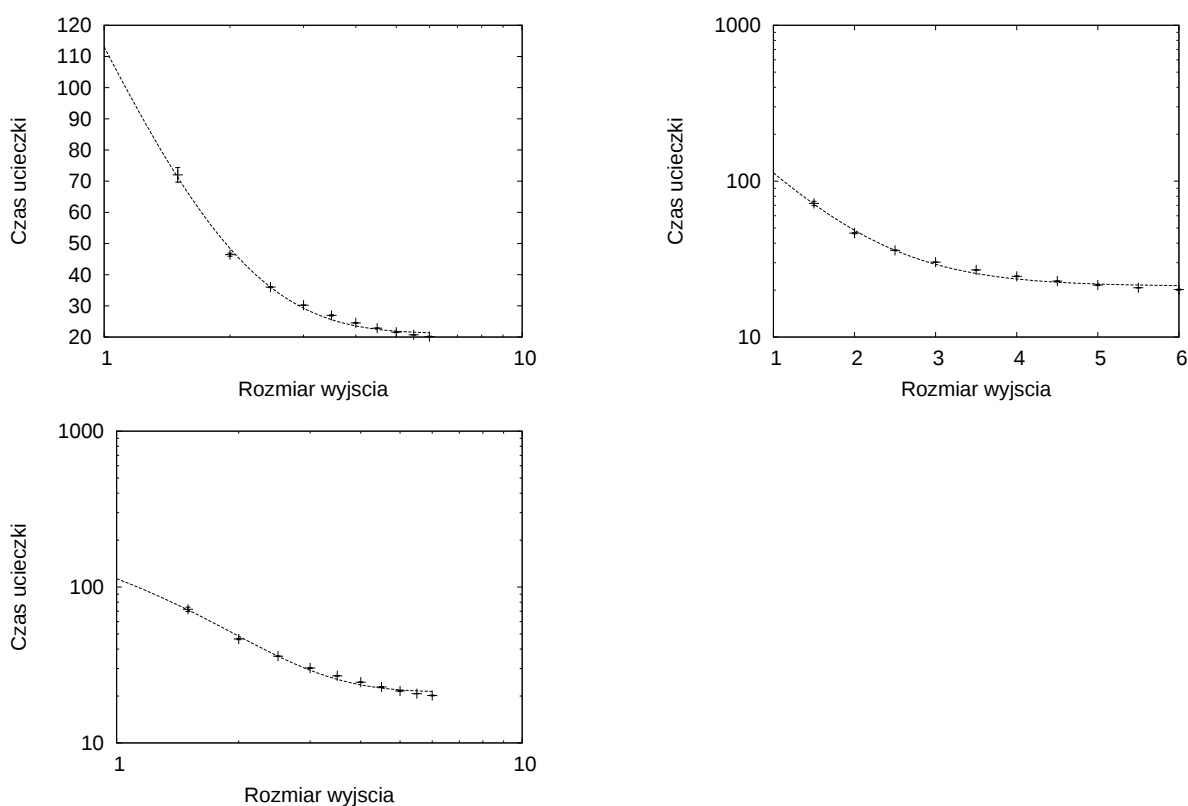
Dopasowanie krzywej wykładniczej

$$f(x) = a + b \cdot e^{(c+d \cdot x)} \quad (23)$$

o parametrach

a	b	c	d
21.18	3.07	4.61	-1.21

oraz przedstawienie wykresu w skalach logarytmicznych również nie ujawnia żadnego krytycznego zachowania (wykres 18).

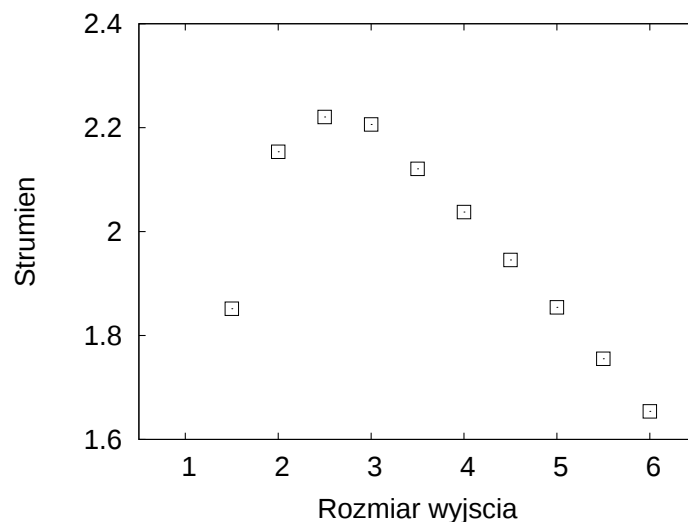


Rysunek 18: Wpływ szerokości wyjścia na czas ewakuacji przedstawiony w skalach logarytmicznych oraz podwójnie logarytmicznych

Definiując strumień ludzi przepływający przez wyjście

$$\Phi = \frac{N}{\tau d} \quad (24)$$

gdzie N jest to ilość ludzi, τ czas oraz d szerokość wyjścia otrzymamy wykres 19.



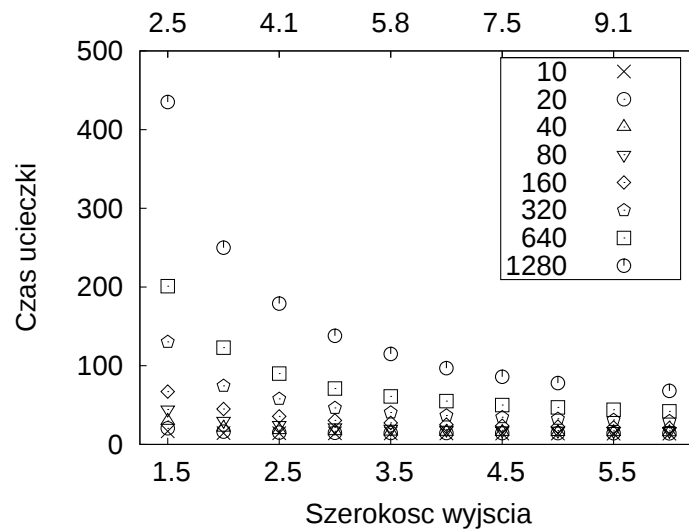
Rysunek 19: Wykres przedstawia wartość strumienia ludzi w zależności od szerokości wyjścia. Oś odciętych jest wyskalowana w metrach, natomiast strumień (oś rzędnych) w $\text{metr}^{-1}\text{sekunda}^{-1}$

Na wykresie 19 widać wyraźnie punkt przegięcia, określający maksymalną wartość strumienia. Wartość należy interpretować jako najbardziej efektywny stosunek szerokości wyjścia do czasu ucieczki. Zastosowanie szerszego wyjścia oczywiście zmniejszy czas ewakuacji ale nie będzie już tak efektywne.

W obowiązujących aktach prawnych dotyczących przepisów przeciwpożarowych (Rozporządzenie Ministra Infrastruktury [Inf]) można odnaleźć jedynie wyznaczniki odnośnie minimalnych szerokości drzwi w zależności od maksymalnej ilości osób w pomieszczeniu: *Łączną szerokość drzwi w świetle, stanowiących wyjścia ewakuacyjne z pomieszczenia, należy obliczać proporcjonalnie do liczby osób mogących przebywać w nim równocześnie, przyjmując co najmniej 0,6 m szerokości na 100 osób, przy czym najmniejsza szerokość drzwi w świetle ościeżnicy powinna wynosić 0,9 m, a w przypadku drzwi służących do ewakuacji do 3 osób - 0,8 m.* [Inf]

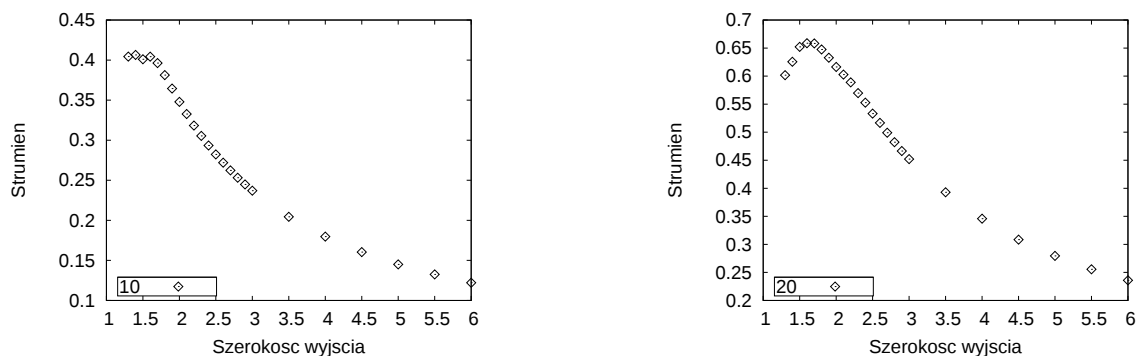
W związku z tym wykresy 17 oraz 19 powinny być traktowane jako informacja pomocnicza przy ewentualnym projektowaniu dróg ewakuacyjnych.

W związku z cytowanymi przepisami przeciwpożarowymi, w których jest mowa o minimalnej szerokości wyjścia w stosunku do ilości osób w pomieszczeniu, warto przyjrzeć się wpływowi wielkości populacji na strumień.

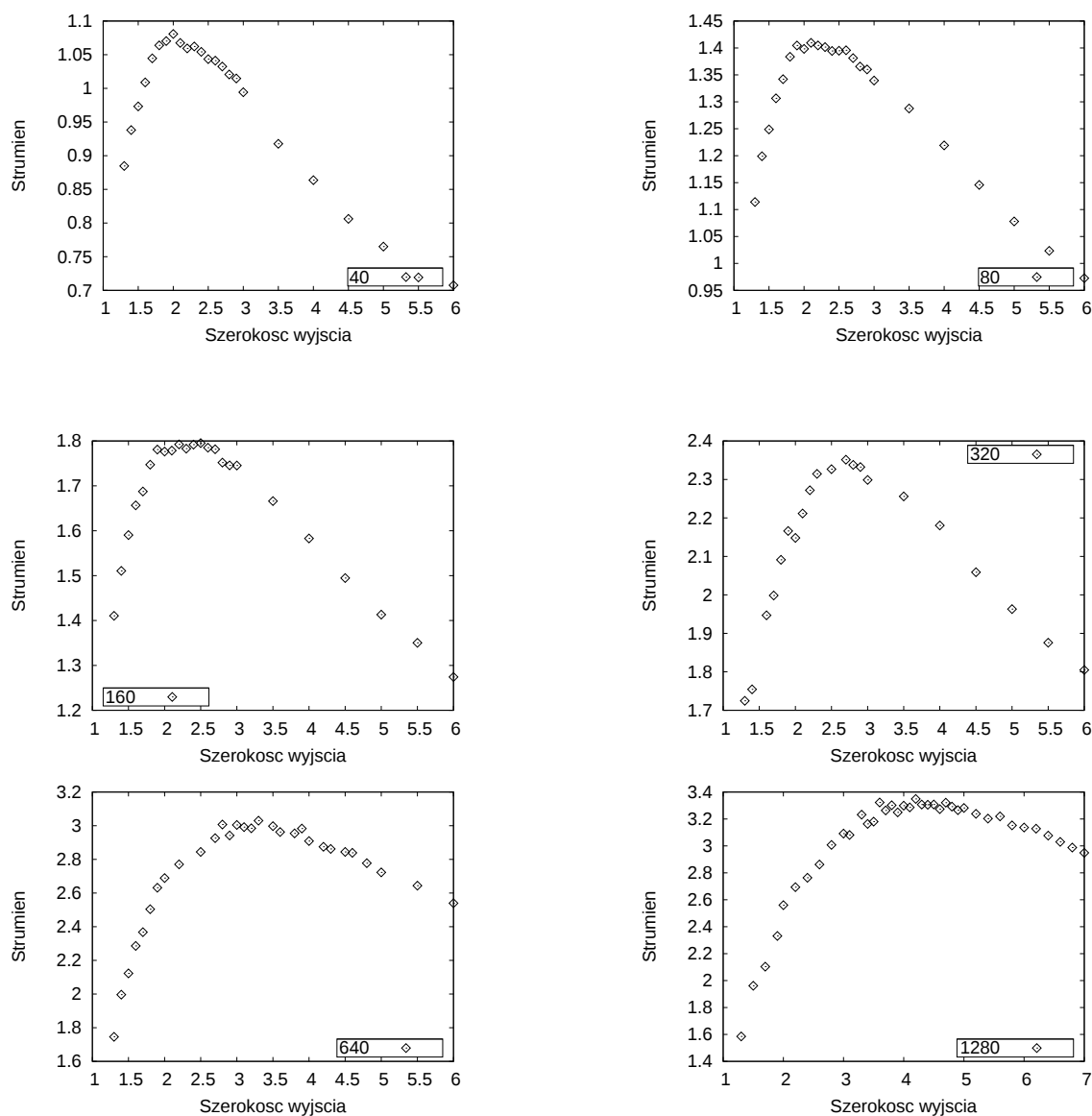


Rysunek 20: Wykres przedstawia wartość strumienia ludzi w zależności od szerokości wyjścia dla kilku populacji. Oś odciętych jest wyskalowana w metrach, natomiast strumień (oś rzędnych) w $\text{metr}^{-1}\text{sekunda}^{-1}$. Dodatkowo górna oś została przedstawiona w metrach podzielonych przez średnią szerokość człowieka w celu ukazanie relacji pomiędzy rozmiarem drzwi, a promieniem człowieka.

Wraz ze wzrostem szerokości wyjścia charakter krzywej jest zachowany, czas ucieczki maleje wykładniczo. Ponieważ skala jest duża, efekt ten „gubi się” na wykresie dla małych populacji. Korzystając ze wzoru definiującego strumień 24 dla każdej z populacji otrzymamy wykres przedstawiający zmianę strumienia jako funkcję szerokości wyjścia. Obserwujemy efekt przesuwania się maksimum wartości czasu ucieczki, a przy większych szerokościach dodatkowo spłaszczenia.

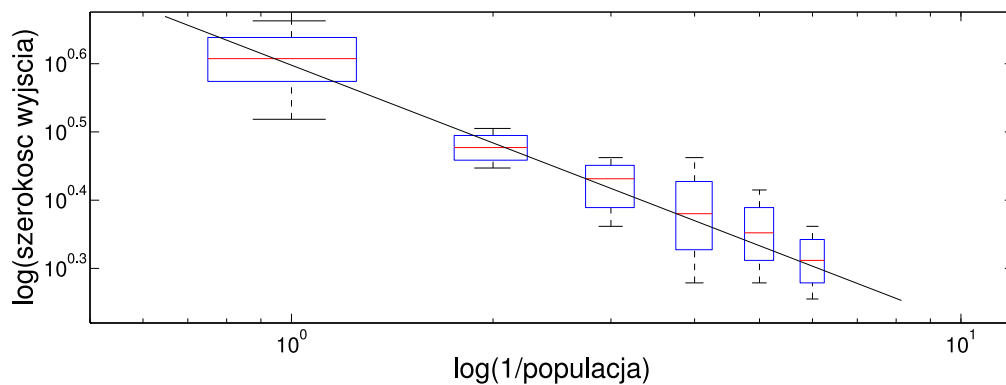


Rysunek 21: Zmiana wartości strumienia w zależności od szerokości drzwi dla populacji 10 oraz 20. Pomieszczenie ma rozmiar 7x7 metrów.



Rysunek 22: Zmiana wartości strumienia wraz ze wzrostem szerokości drzwi. Na legendzie zaznaczona jest wielkość populacji. Wraz ze wzrostem populacji początkowej, zwiększa się również wielkość pomieszczenia, w którym cząstki się znajdują. Dla populacji 40 pomieszczenie ma rozmiar 7x7 metrów, dla 80 (10x10 metrów), dla 160 (15x15 metrów) dla 320 (20x20 metrów), dla 640 (30x30 metrów) oraz dla populacji 1280 (40x40 metrów).

Znajdując maksymalną wartość strumienia możemy określić zależność szerokości wyjścia od wielkości populacji. Pozwoli to na wyciągnięcie wniosków na temat optymalnych wielkości przy projektowaniu wyjść ewakuacyjnych. Na wykresach 22 wraz ze wzrostem populacji zwiększa się spłaszczenie parabol, przez co trudniej określić jest maksymalną wartość strumienia. W związku z tym skorzystamy z wykresu pudłowego, którego każdy z punktów jest reprezentowany przez wartość minimalną, maksymalną, medianę oraz kwantyle, górny i dolny. Pozwoli nam to użyć wartości strumienia w zakresie w którym występuje zjawisko spłaszczenia. Dodatkowo, dwie najmniejsze populacje zostały odrzucone, ponieważ nie występowały dla nich zjawiska blokowania wyjścia. Pomieszczenia dla każdej z populacji były maksymalnie wypełnione.



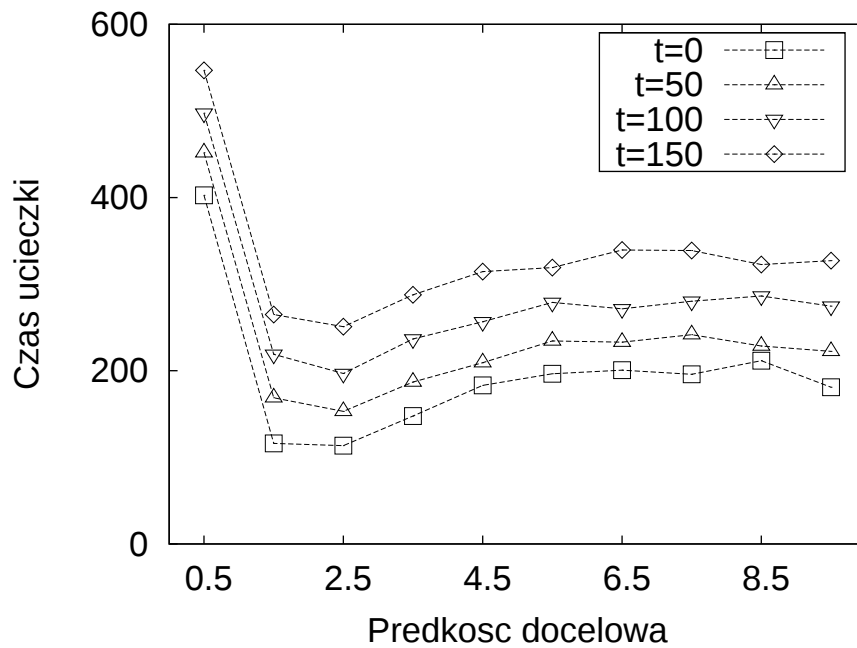
Rysunek 23: Wykres przedstawia zależność maksymalnej wartości strumienia względem wielkości populacji.

Z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że zachodzi prawo potęgowe. Można poprowadzić prostą przechodzącą przez punkty, która będzie się mieściła w zakresie pomiędzy wartością minimalną i maksymalną.

5.9 Termalizacja

Ważny wyniki, dla architekta jak i dla fizyka, przynosi kolejne doświadczenie. Polega ono na otwarciu wyjścia po określonym czasie (licząc od rozpoczęcia symulacji).

Poniższa symulacja daje odpowiedź na pytanie: czy czas ewakuacji zależy od architektury pomieszczenia; czy drzwi ewakuacyjne powinny być zawsze otwarte; czy czas jaki jest potrzebny na otwarcie przez osobę uprawnioną do tego, ma znaczący wpływ na bezpieczeństwo? Jak widać, nie ma, ponieważ ewakuacją przebiega w ten sam sposób.



Rysunek 24: Wykres przedstawia wpływ termalizacji na czas ewakuacji. Czas ucieczki wyrażony jest w sekundach, prędkość w metrach na sekundę. Linia przerywana ma jedynie na celu poprawienie czytelności wykresu. Czas t jest czasem po którym zostały otwarte drzwi, licząc od rozpoczęcia symulacji.

Obliczając różnicę pomiędzy sąsiadującymi w pionie punktami dla określonej prędkości docelowej v_0 , a następnie uśredniając otrzymamy, wyniki zamieszczone w tabeli 4.

	$t_{150} - t_{100}$	$t_{100} - t_{50}$	$t_{50} - t_0$
Δt	51.4	46.8	38.1
s	2.75	1.8	3.2

Tablica 4: Różnice czasów ucieczki pomiędzy sąsiadującymi punktami o określonej prędkości. Drugi wiersz zawiera błąd standardowy obliczony zgodnie ze wzorem (29).

Obserwując symulację, w której drzwi są otwarte można zauważyć, że ludzie zbliżając się do wyjścia formują charakterystyczny półkrąg (rysunek 11). W tym samym czasie grupa

ludzi, która jako pierwsza osiągnęła wyjście, opuściła już pomieszczenie. Jeśli drzwi są zamknięte, tworzy się identyczny półkrąg z tym, że nikt nie jest w stanie opuścić pomieszczenia. Następnie ludzie „fluktuują”, nieznacznie się przesuwając. W momencie otwarcia drzwi, po upływie czasu t_x ludzie opuszczają pomieszczenie, zachowując się tak jak w sytuacji, gdy drzwi są otwarte. Podsumowując, otwarte drzwi (czyli $t_0 = 0$ s) jest korzystne z punktu widzenia pojedynczych osób, które znajdują się najbliżej wyjścia. Dla pozostałych, oczywiście nie licząc czasu zamknięcia drzwi, nie ma to większego wpływu. Mówiąc obrazowo, gdybyśmy od krzywych reprezentujących czas ucieczki odjęli czas zamknięcia drzwi, otrzymalibyśmy prawie identyczne wykresy.

6 Wnioski

Celem niniejszej pracy było zbadanie zachowania modelu zaproponowanego przez Helbinga oraz współautorów [HFV00b]. Praca koncentruje się na kilku właściwościach modelu, które są ważne z punktu widzenia nie tylko czysto teoretycznego, ale również mogą posłużyć jako wskazówki dla inżynierów podczas projektowania budynków.

Cząsteczki umieszczone są w prostokątnym pomieszczeniu z wyjściem na jednej ze ścian. Wszystkie cząsteczki dążą do opuszczenia pomieszczenia, czynnikiem kierującym jest wektor $\mathbf{e}_i$ wskazujący kierunek wyjścia. Każda cząsteczka oddziałuje z sąsiadami poprzez dwa rodzaje sił – dalekozasięgowe oraz bliskozasięgowe. Do tych pierwszych zaliczamy siły socjologiczne, starające się utrzymać określoną odległość pomiędzy cząstkami poprzez działanie odpychające. W momencie zetknięcia się cząstek, tzn. gdy odległość pomiędzy ich środkami jest mniejsza niż suma ich promieni, zaczyna działać siła odpychająca, przeciwdziałająca ścisnaniu się ciał.

Najważniejszym wynikiem oryginalnej pracy było wyznaczenie prędkości poruszania się, która gwarantowała optymalny czas opuszczenia zagrożonego pomieszczenia. Jest to w pewnym sensie punkt wyjścia do dalszej analizy modelu przeprowadzonej przeze mnie. Rozdziały 5.6 do 5.9 stanowią nowatorskie, nigdzie nie publikowane badania dotyczące właściwości modelu. Celem było zbadanie wpływu różnych czynników na czas ewakuacji z miejsca zagrożenia.

Podsumowując wnioski wynikające z przeprowadzonych symulacji oraz ich analiz z powyższych paragrafów:

1. zastosowanie rozkładu mas zgodnego z rozkładem normalnym nie ma wpływu na zachowanie modelu,
2. wielkość populacji nie ma wpływu na optymalną prędkość opuszczania pomieszczenia,
3. istnieje zależność pomiędzy optymalną szerokością wyjścia, a wielkością populacji,
4. czas termalizacji nie wpływa na zachowanie układu.

W publikacji [HFV00b] Helbing zastosował jednorodny rozkład mas oraz rozmiarów (promieni) ludzi. W rzeczywistości większość parametrów charakteryzujących budowę ciała jest opisana przez rozkład normalny. W pracy pokazałem, że zastosowanie rozkładu normalnego wokół wartości średniej μ oraz o różnych wartościach odchylenia standardowego σ nie wpływa na zachowanie układu. Wniosek (2) mówi o zależności czasu ucieczki od wielkości populacji początkowej. Zmieniając jej wielkość (oraz odpowiednio pomieszczenie) optymalna prędkość docelowa dla której czas ewakuacji jest minimalny, pozostaje

stała.

Kolejny wniosek (3) odnosi się do istniejących przepisach przeciwpożarowych dotyczących ewakuacji (patrz [Inf] oraz rozdział 5.8). W przepisach tych znajduje się jedynie zapis mówiący o minimalnej wielkości drzwi w zależności od maksymalnej wielkości populacji mieszczącej się w pomieszczeniu. W niniejszej pracy została pokazana zależność pomiędzy optymalną szerokością wyjścia, a rozmiarem populacji. Definiując strumień ludzi „przepływający” przez wyjście zostało pokazane istnienie prawa potęgowego wynikającego ze wspomnianych zależności, czyli optymalnej szerokości wyjścia względem rozmiaru populacji. Ostatni wniosek (4) dotyczy termalizacji układu, mówiąc inaczej, wpływu czasu zamknięcia wyjścia na czas ewakuacji. Symulacja polegała na otwarciu drzwi pomieszczenia, po upływie określonego czasu od jej rozpoczęcia. Badany był czas ewakuacji dla określonej wielkości wyjścia. Porównując otrzymane wykresy widzimy, że czasy te, średnio, różnią się jedynie o czas przez jaki zamknięte były drzwi. Wynika z tego, że czas termalizacji nie ma wpływu na zachowanie układu jako całości.

A Obliczanie błędu

Niech $x_1, \dots, x_n$ będzie próbą losową. Średnią z próby nazywamy statystykę:

$$\bar{x} = \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (25)$$

Estymacja to postępowanie statystyczne zmierzające do oszacowania parametrów populacji generalnej (wartość średnia μ oraz odchylenie standardowe σ) na podstawie statystyk uzyskanych z populacji próbnej [KBD⁺07].

Jeśli wartość oczekiwana z estymatora jest równa wartości estymowanego parametru, czyli:

$$E(\bar{x}_n) = \theta \quad (26)$$

mówimy, że estymator jest nieobciążony [GK96].

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ jest próbą prostą oraz $E(x_i) = 0$ i $\text{var}(x_i) = \sigma^2 < \infty$:

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{x}) &= \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{var}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{var}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) \\ &= \frac{1}{n^2} [\text{var}(x_1) + \text{var}(x_2) + \text{var}(x_3) + \dots + \text{var}(x_n)] \\ &= \frac{1}{n^2} [\text{var}(X) + \text{var}(X) + \text{var}(X) + \dots + \text{var}(X)] \\ &= \frac{1}{n^2} [n \text{var} X] \\ &= \frac{1}{n} \text{var}(X) \\ \text{var}(\bar{x}) &= \frac{1}{n} \sigma^2 \end{aligned} \quad (27)$$
$$(28)$$

Błąd standardowy jest wówczas wyrażony jako

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (29)$$

gdzie n to liczba prób.

B Współczynnik asymetrii - skośność

Podczas analizowania właściwości badanej na podstawie próbki wykorzystuje się różne charakterystyki. Do podstawowych należą momenty.

Momentem zwykłym m_l rzędu l próbki $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywa się średnią arytmetyczną l -tych potęg wartości x_i

$$m_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^l, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Momentem centralnym⁵ M_l rzędu l próbki $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy średnią arytmetyczną l -tych potęg odchyleń wartości x_i od średniej arytmetycznej $\bar{x}$

$$M_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^l, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Mając zdefiniowane momenty możemy skonstruować współczynnik asymetrii

$$g_1 = \frac{M_3}{s^3} \quad (32)$$

gdzie s jest odchyleniem standardowym. Współczynnik asymetrii nazywany jest również skośnością [KBD⁺07] .

C Test Shapiro-Wilka

Test Shapiro-Wilka zakłada istnienie hipotezy:

Próbka X_i posiada, na poziomie ufności α rozkład normalny .

Zgodność z rozkładem normalnym można zweryfikować przyjmując powyższą hipotezę przy pomocy wspomnianego testu.

Zakładając, że $X_1, X_2, \dots, X_N$ jest próbą prostą z rozkładu ciągłego, możemy zastosować statystykę testową jako zmienną losową

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{[N/2]} a_i^n (X_{(n-i+1)} - X_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2} \quad (33)$$

Stała a_i^n zależy od liczebności próbki oraz indeksu i , jej wartość można znaleźć w tablicach matematycznych. Hipotezę odrzuca się na podstawie istotności α , jeśli wartość W_d statystyki W obliczona na podstawie próbki leży poza przedziałem $< W(\frac{1}{2}\alpha, N), W(1 - \frac{1}{2}\alpha, N) >$, którego końcami są kwantyle rozkładu W [KBD⁺07].

⁵Jak łatwo zauważyć pierwszy moment zwykły jest średnią arytmetyczną, drugi moment centralny - wariancją

D Zmienny krok całkowania

Wychodząc od równania pierwszego rzędu

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(0) = y_0 \quad (34)$$

Chcąc obliczyć wartość y w punkcie $x = t$ musimy podzielić przedział $[0, t]$ na n podprzedziałów długości $h = t/n$, otrzymamy

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) + ch^2, \quad (35)$$

gdzie dla pewnego $\xi \in (x, x+h)$:

$$c = \frac{f'(\xi, y(\xi))}{2}. \quad (36)$$

Niech będzie dane $t_k = kh$ dla $k = 0, 1, \dots, n$, równanie 35 możemy zapisać w formie dyskretnej:

$$y_{k+1} = y_k hf(t_k, y_k), \quad k \geq 0. \quad (37)$$

Dla każdego kroku całkowania błąd numeryczny jest równy ch^2 , gdzie c jest proporcjonalne do $y''(\xi)$. W metodzie całkowania Eulera ze stałym krokiem czasowym h nie jest możliwe określenie wartości czynnika c . Dlatego musimy iterować algorytm obliczający dla bardzo dużych n aż do momentu gdy y_n przybliży wyniki $y(t)$ z zadowalającą precyzją. Mówiąc inaczej, musimy znaleźć takie h_i

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k^{(i)} + h_i f(t_k, y_k^{(i)}) \quad (38)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$, dla którego wartość błędu $|y_{n(i+1)}^{i+1} - y_{k_{n_i}}^{(i)}|$ będzie maksymalnie mała. Jeśli implementacji algorytmu całkowania oparta jest na precyzji zmiennoprzecinkowej

Aby zoptymalizować algorytm należy zwrócić uwagę na błąd jakim jest obarczony każdy z kroków całkowania. Jak już zostało wspomniane błąd każdego kroku całkowania (równanie (38)) jest równy ch^2 , którego wartość jest proporcjonalna do $f''(\xi)$. Zapisując jawnie wzór na błąd, otrzymamy:

$$\epsilon_k^{(i)} = y(t) - y_k^{(i)}. \quad (39)$$

Chcemy udowodnić, że $|\epsilon_{n_i}^{(i)}| < \epsilon$. W tym celu należy założyć współczynnik błędu c we wzorze (35) jest stały. Pozwoli nam to na podzielenie kroku całkowania h_i na przedziały. Dla stałej wartości c błąd przy obliczaniu $y_n^{(i)}$ będzie równy:

$$\epsilon_{n_i}^{(i)} = n_i ch_i^2 = \frac{t}{h_i} ch_i^2 = tch_i = ah_i, \quad (40)$$

gdzie a jest stałą. Rozważając dwa kroki iteracyjne o przedziałach całkowania h_1 oraz h_2 otrzymamy:

$$y(t) - y_{n_1}^{(1)} = \epsilon_{n_1}^1 = ah_1, \quad (41)$$

$$y(t) - y_{n_2}^{(2)} = \epsilon_{n_2}^2 = ah_2. \quad (42)$$

Odejmując od siebie stronami powyższe równania:

$$y_{n_2}^{(2)} - y_{n_1}^{(1)} = a(h_1 - h_2), \quad (43)$$

$$a = \frac{y_{n_2}^{(2)} - y_{n_1}^{(1)}}{h_1 - h_2}. \quad (44)$$

W kolejnym kroku iteracji o kroku całkowania h_3 otrzymamy:

$$\epsilon > |\epsilon_{n_3}^{(3)}| = |ah_3| = \frac{h_3 |y_{n_2}^{(2)} - y_{n_1}^{(1)}|}{h_1 - h_2}, \quad (45)$$

zatem:

$$h_3 > \frac{(h_1 - h_2)\epsilon}{|y_{n_2}^{(2)} - y_{n_1}^{(1)}|}. \quad (46)$$

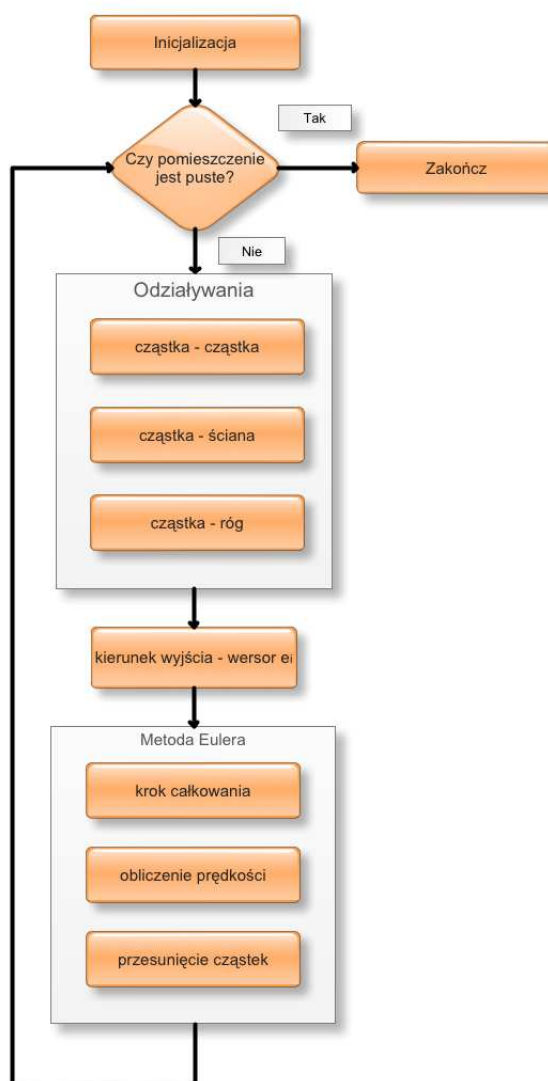
Uogólniając otrzymamy wzór opisujący algorytm całkowania ze zmiennym krokiem:

$$h_{i+2} = q \frac{(h_i - h_{i+1})\epsilon}{|y_{n_{i+1}}^{(i+1)} - y_{n_i}^{(i)}|}, \quad (47)$$

dla $q < 1$ [Gol07].

E Rozwiązania implementacyjne

Model Helbinga będący podstawą tej pracy został zaimplementowany z wykorzystaniem języka C++ oraz bibliotek: STL i OpenGL. W celu poprawienia efektywności działania symulacji zostały zaniedbane aspekty związane z uniwersalnością i przenośnością aplikacji. W związku z tym każda zmiana konfiguracji wymaga wprowadzenia odpowiednich poprawek kodu oraz przekompilowania całości. Schemat blokowy (rysunek 25) przedstawia przepływ symulacji pomiędzy ważniejszymi jej częściami.



Rysunek 25: Schemat blokowy symulacji.

Poniżej znajduje się opis implementacji ważniejszych algorytmów wykorzystanych w pracy. Na początku przedstawiony jest sposób obliczania wektora kierunkowego $\mathbf{e}_i$. Pomimo tego, że jego opis został zawarty w rozdziale 5.3 warto zapisać algorytm jawnie. Oznaczenia wykorzystane w pseudokodzie są zgodne z rysunkiem 5. Dwuargumentowa funkcja $\text{atan2}(x, y)$ zwraca arcus tangens z x/y .

Algorytm 1 Kierunek wyjścia

```

H {długość pomieszczenia}
L {szerokość pomieszczenia}
D {szerokość drzwi}
W1  $\leftarrow 0.5 \cdot (L + D)$  {górny róg drzwi}
R {promień cząstki}
DSQR  $\leftarrow 0$  {zmienna pomocnicza}
RSQR  $\leftarrow 0$  {zmienna pomocnicza}
EPSILON  $\leftarrow 10^{-6}$ 
X, Y {położenie cząstki}
if  $Y \geq W1 - R - EPSILON$  &&  $X \leq RW$  then
    DSQR  $\leftarrow (L - X) \cdot (L - X) + (W1 - Y) \cdot (W1 - Y)$ 
    RSQR  $\leftarrow R \cdot R + EPSILON$ 
    if  $DSQR \leq RSQR$  then
        if  $Y \geq W1$  then
            return  $-0.5\pi$ 
        else
            return  $-0.5\pi + \text{atan2}(W1 - Y, L - X)$ 
        end if
    else
        return  $-\text{atan2}(1.0, \text{SQRT}(DSQR/RSQR - 1.0)) + \text{atan2}(W1 - Y, L - X)$ 
    end if
else
    return  $0.0$ 
end if

```

Do obliczenia oddziaływań pomiędzy dwiema cząsteczkami można się posłużyć poniższą implementacją. Odnosi się on ze wzorów (16), (17) oraz (18). Powinno się mieć na uwadze, że jest to jedynie oddziaływanie pomiędzy dwiema cząstkami. Aby policzyć sumę oddziaływań pochodzących od wszystkich cząsteczek należy iterować po wszystkich sąsiadach, z pominięciem cząstki dla której obliczamy siły (warunek $i \neq j$, jeśli i, j indeksują cząsteczki).

Algorytm 2 Oddziaływanie pomiędzy dwiema cząsteczkami

```

 $A, B, K, \kappa$  {parametry symulacji}
 $FX, FY$  {siły oddziałujące pomiędzy  $i$ -tą i  $j$ -tą cząsteczką}
 $X_i, Y_i$  {położenie  $i$ -tej cząsteczki}
 $X_j, Y_j$  {położenie  $j$ -tej cząsteczki}
 $R_i, R_j$  {promienie  $i$ -tej i  $j$ -tej cząsteczki}
 $RA \leftarrow X_i - X_j$  {zmienna pomocnicza}
 $RB \leftarrow Y_i - Y_j$  {zmienna pomocnicza}
 $D_{ij} \leftarrow \text{SQRT}(RA \cdot RA + RB \cdot RB)$ 
 $R_{ij} \leftarrow R_i + R_j$ 
 $FX = (X_i - X_j) \cdot A / D_{ij} \cdot \exp((R_{ij} - D_{ij}) / B)$ 
 $FY = (Y_i - Y_j) \cdot A / D_{ij} \cdot \exp((R_{ij} - D_{ij}) / B)$ 
if  $D_{ij} < R_{ij}$  then
     $FX = FX + (X_i + X_j) \cdot K / D_{ij} \cdot (R_{ij} - D_{ij})$ 
     $FY = FY + (Y_i + Y_j) \cdot K / D_{ij} \cdot (R_{ij} - D_{ij})$ 
     $FX = FX - \kappa \cdot (Y_i - Y_j) \cdot [(Y_i - Y_j)(VX_i - VX_j) - (X_i - X_j)(VY_i - VY_j)] / D_{ij} / D_{ij}$ 
     $FY = FY + \kappa \cdot (X_i - X_j) \cdot [(Y_i - Y_j)(VX_i - VX_j) - (X_i - X_j)(VY_i - VY_j)] / D_{ij} / D_{ij}$ 
end if

```

W identyczny sposób obliczamy oddziaływanie człowieka ze ścianą oraz człowieka z rogiem. Należy wówczas obliczać odległości odpowiednio od ściany lub rogu iterując po całym zbiorze elementów.

Ostatnia implementacja przedstawia algorytm całkowania metodą Eulera oraz sposób obliczania kroku całkowania.

Algorytm 3 Krok całkowania

```
 $F_{TMP} \leftarrow \text{SQRT}( F_x^i \cdot F_x^i + F_y^i \cdot F_y^i )$  {siła działająca na  $i$ -tą cząstkę}  
 $TS \leftarrow h$  {aktualny krok czasowy}  
while  $F_{TMP} \cdot TS \geq 0.01$  do  
     $TS \cdot = 0.95$   
end while  
return  $TS$ 
```

Algorytm 4 Całkowanie metodą Eulera

```
 $X, Y$  {położenie  $i$ -tej cząstki}  
 $VX, VY$  {prędkość  $i$ -tej cząstki}  
 $FX, FY$  {suma sił działających na  $i$ -tą cząstkę}  
 $H$  {aktualny krok czasowy}  
 $VX \leftarrow VX + FX * H$   
 $VY \leftarrow VY + FY * H$   
 $X \leftarrow X + VX * H$   
 $Y \leftarrow Y + VY * H$ 
```

Literatura

- [Blu51] Herbert Blumer. *Collective Behavior*. Irvington Publishers, 1951.
- [Bon07] Gustaw Le Bon. *Psychologia tłumy*. Wydawnictwo Marek Derewiecki, 2007.
- [Che04] Stephen Chenney. Flow tiles. *The Eurographics*, 2004.
- [Gar73] D. Garbrecht. Describing pedestrian and car trips by transition matrices. *Traffic Quarterly*, 27, 1973.
- [GK96] L. Gajek and M. Kałuszka. *Wnioskowanie Statystyczne*. WNT, 3 edition, 1996.
- [Gol07] Oleg Golberg. Adaptive stepsize numerical methods for solving ordinary differential equations. MIT OpenCourseWare, 2007.
- [HDHW01] M Hermanussen, H Danker-Hopfe, and GW Weber. *Body weight and share of the natural distribution of weight, in very large samples of German, Austrian and Norwegian conscripts*, volume 25. International Journal of Obesity, 2001.
- [Hel01] Dirk Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of modern physics*, 73, 2001.
- [HEN71] L. F. HENDERSON. The statistics of crowd fluids. *Nature*, 229, 1971.
- [HFV00a] Dirk Helbing, Illes Farkas, and Tamas Vicsek. Freezing by heating in a driven mesoscopic system. *Physical Review Letters*, 84:1240–1243, 2000.
- [HFV00b] Dirk Helbing, Illes Farkas, and Tamas Vicsek. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407:487–490, 2000.
- [HH03] Tomoki Hamagami and Hironari Hirata. Method of crowd simulation by using multiagent on cellular automata. *Proceedings of the IEEE/WIC International Conference on Intelligent Agent Technology*, 2003.
- [HJ73] L F Henderson and D M Jenkins. Response of pedestrians to traffic challenge. *Transportation Research*, 8, 1973.
- [HL72] L F Henderson and D J Lyons. Sexual differences in human crowd motion. *Nature*, 240, 1972.
- [Hoe68] Lester A. Hoel. *Traffic and Highway Engineering*. Cengage Learning, 1968.

- [HT01] H. W. Hamacher and S. A. Tjandra. Mathematical modelling of evacuation problems: A state of art. *Berichte des Fraunhofer ITWM*, 24, 2001.
- [Hug03] Roger Huges. The flow of human crowds. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35, 2003.
- [HW58] B. D. Hankin and R. A. Wright. Passenger flow in subways. *Operational Research Quarterly*, 9(2), 1958.
- [Inf] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury. z 12 kwietnia 2002 r.w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budynki i ich usytuowanie. Dz.U. 2002 r., Nr 75, poz. 690.
- [KBD⁺07] Włodzimierz Kryszicki, Jerzy Bartos, Wacław Dyczka, Krystyna Królikowska, and Mariusz Wasilewski. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Cz. 1/2*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 8 edition, 2007.
- [May54] A J Mayne. Some further results in the theory of pedestrians and road traffic. *Biometrika*, 41, 1954.
- [Oed63] D Oeding. Verkehrsbelastung und dimensionierung von gehwegen und anderen anlagen des fubgangerverkehrs. *Bundesministerium fur Verkehr*, 1963.
- [Old68] S J Older. Movement of pedestrians on footways in shopping streets. *Traffic engineering and control*, 1968.
- [OP72] C. A. O’Flaherty and M. H. Parkinson. Movement on a city centre footway. *Traffic engineering and control*, 10:160 – 163, 1972.
- [Par67] Robert Ezra Park. *On Social Control and Collective Behavior*. University of Chicago Press, 1967.
- [Que35] Adolphe Quetelet. *Sur l’homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale*. 1835.
- [Rey97] Craig Reynolds. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 21, 1997.
- [Rey99] Craig Reynolds. Steering behaviors for autonomous characters. *In Game Developers Conference*, 1999.
- [RH94] Gerald H. Ristow and Hans J. Herrmann. Density patterns in two-dimensional oppers. *Physical Review E*, 50(1), July 1994.

- [Tas08] Flora Ponjou Tasse. Crowd simulation of pedestrians in a virtual city. Master's thesis, Rhodes University, 2008.
- [TCP05] Adrien Treuille, Seth Cooper, and Zoran Popović. Continuum crowds. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 2005.
- [Wei93] U. Weidmann. Transporttechnik der fubganger. *ETH-Zurich*, 1993.
- [YS89] S. J. Yuhaski and J. MacGregor Smith. Modeling circulation systems in buildings using state dependent queueing models. *Queueing System*, 4, 1989.