

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii

Roksana Szwarc

Implementacja modelu propagacji wzorców aktywności

Implementation of the model of propagating activity patterns

Praca licencjacka na kierunku
Fizyka Komputerowa

Opiekun
dr hab. Maciej Matyka

Wrocław, 2019

Spis treści

1	Wstęp	4
2	Wzorce	5
2.1	Wzorce w biologii	5
2.2	Zbiorcza aktywność elektryczna mózgu	5
2.2.1	Wybrane metody rejestracji aktywności elektrycznej mózgu	5
2.3	Modelowanie wzorców	7
3	Model propagujących wzorców aktywności w obwodach nerwowych	8
3.1	Charakterystyka modelu	8
3.2	Algorytm	9
3.3	Wyniki	10
4	Wnioski	13

Streszczenie

Mózg przetwarza informacje z niezwykłą wydajnością i w ułamku sekundy może rozpoznawać obiekty spośród tysięcy możliwości. Dokonuje tego, ponieważ przetwarza informacje w sposób dynamiczny. Przetwarzanie to przejawia się w czasoprzestrzennych wzorcach aktywności neuronowej w mózgu, a przekazywanie informacji w obwodzie neuronowym może odbywać się przez ich propagację. W niniejszej pracy zaimplementowałam algorytm na podstawie artykułu "Dynamical pattern formation and collisions in networks of excitable elements" Physical Review E 85, 055101(R), (2012), zbadałam model propagujących wzorców aktywności w obwodach neuronowych. Osiągnęłam wyniki, które porównałam do tych przedstawionych w oryginalnym artykule.

1 Wstęp

Formowanie się wzorców jest zjawiskiem, które często można obserwować w naturze. Powstają one w wyniku lokalnych interakcji między wieloma elementami, początkowo nieuporządkowanego systemu [2] [3] [4] [5]. Przykładami takich reakcji obserwowanych w przyrodzie są np. reakcje odczynników chemicznych, które reagują i się rozpraszają, czy małe cząsteczki, które łączą się w skupiska. W efekcie dochodzi do powstania regularnych wzorów. W kontekście fizycznym proces ten nazywany jest „formowaniem wzorców” lub „samoorganizacją”. Stworzone wzorce pojawiają się zarówno w organicznym, jak i nieorganicznym świecie przyrody. Charakteryzują się one dużym zasięgiem oraz różnorodnością. Jednak niekiedy posiadają wspólne cechy. Podobieństwo jest zauważalne na przykład w przypadku pasków zebry i zmarszczek na piasku [5]. Przykłady układów samoorganizujących się można znaleźć w literaturze wielu dyscyplin m. in. biologii [6], chemii, fizyki, lecz również w matematyce [5].

2 Wzorce

2.1 Wzorce w biologii

Wiele różnych efektów może potencjalnie stworzyć porządek przestrzenny w układach biologicznych. Obserwowane są m.in.

- samoorganizacja dużych struktur molekularnych (np. w przypadku tworzenia struktur komórek eukariotycznych, takich jak sieć włókien mięśniowych w komórkach mięśniowych),
- wykorzystywanie sygnałów zewnętrznych, takich jak grawitacja lub światło, w celu utworzenia wzoru przestrzennego przez początkowo symetryczne układy komórek,
- programowana śmierć komórki (apoptoza). Tkanę można wyrzeźbić poprzez selektywną śmierć niektórych komórek oraz rozpad lub usunięcie już obumarłych komórek [6].

Powyższe mechanizmy dotyczą głównie tworzenia form i wzorów. Ponadto można również obserwować:

- sygnalizację krótkiego zasięgu między komórkami, obejmującą bezpośrednie kontakty lub sygnały bardzo bliskiego zasięgu,
- sygnalizację dalekiego zasięgu między komórkami lub jądrami komórkowymi [6],
- zbiorczą aktywność elektryczną w obwodach neuronowych [1].

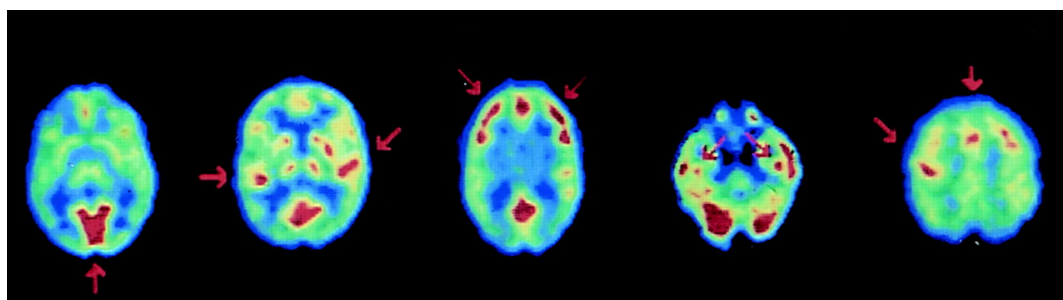
2.2 Zbiorcza aktywność elektryczna mózgu

Neurony są komórkami, które mogą znajdować się w trzech stanach: spoczynku, aktywacji lub refrakcji [2]. Te pobudliwe komórki reagują na bodźce (np. elektryczny, chemiczny lub mechaniczny) co powoduje destabilizację ich błony komórkowej i w efekcie może skutkować powstawaniem oscylacji potencjału błonowego lub wygenerowaniem impulsu nerwowego [7]. Pojedyncze komórki nerwowe połączone są synapsami w małe gromady zwane zespołami neuronów. W wyniku interakcji pomiędzy neuronami może dojść do wygenerowania aktywności oscylacyjnej w zespole neuronów. Niektóre struktury obwodów nerwowych wykazują aktywność oscylacyjną przy określonych częstotliwościach. Rytmiczne lub powtarzające się spójne wzorce aktywności nerwowej w ośrodkowym układzie nerwowym nazywane są falami mózgowymi lub inaczej wzorcami rytmicznymi [2].

2.2.1 Wybrane metody rejestracji aktywności elektrycznej mózgu

W celu rejestracji fal mózgowych można wykonać badanie EEG. Badanie wykonuje się poprzez przyklejenie elektrod do wybranych obszarów skóry głowy i pomiaru aktywności kory mózgowej [7]. Zapis EEG jest wynikiem rejestrowanego sygnału większych grup neuronów działających kolektywnie [9].

Ich aktywność w danym obszarze kory jest w znacznym stopniu zsynchronizowana, co może być także zobrazowane w innym badaniu tzw. PET. Na rysunku nr 1 widoczne są przekroje mózgowia z usytuowaną przednią częścią mózgu na górze.

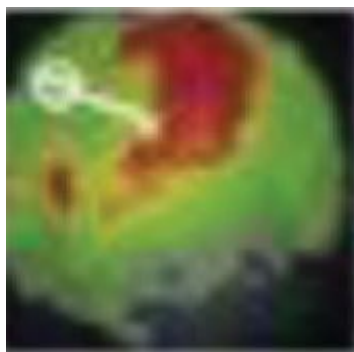


Rysunek 1: Badania metabolizmu glukozy metodą PET w celu odwzorowania reakcji ludzkiego mózgu na wykonywanie różnych zadań [10].

Niektóre typy fal mózgowych są wywoływane przez określone typy aktywności [7]. Na rysunku 1 uwidoczniono obszary mózgu, gdzie doszło do uformowania się propagujących wzorców aktywności. Są to ciemniejsze regiony wskazane strzałkami. Kolejno od lewej do prawej zaznaczone są:

- kora wzrokowa podczas oglądania obrazów,
- lewa i prawa kora słuchowa podczas słuchania muzyki,
- kora czołowa - podczas liczenia od 1000 wstecz,
- hipokamp obustronnie - podczas przypominania sobie wcześniej nauczonych obiektów,
- lewa kora ruchowa - podczas dotykania kciuka palcami prawej ręki [10].

Podobny rysunek 2, przedstawiający fragment mózgu szczura ukazał się w artykule [2]. Ciemniejszy obszar znajdujący się w górnej, centralnej części zdjęcia przedstawia część kory wzrokowej z uformowanymi wzorcami propagującymi.



Rysunek 2: Zdjęcie wzorców propagujących w korze wzrokowej szczura.

2.3 Modelowanie wzorców

Samoorganizowane wzorce można spotkać w układach dużych skupisk oddziałujących cząstek fizycznych. Ich formowanie może być także spotykane w symulacjach komputerowych np. w modelach opartych na sieci tzw. automatów komórkowych. Dyskretnie elementy (komórki) zorganizowane są na regularnej siatce, które oddziałują poprzez proste, lokalne reguły. Ich stan jest zależny od stanu sąsiadujących komórek [5]. Ogólna teoria obliczeń wykonywanych w przypadku automatów komórkowych charakteryzuje się tym, iż każda komórka może być traktowana jako komórka „pamięci” kodująca informację o stanie swojej fizycznej postaci. Automaty komórkowe są zdolne do tworzenia złożonych wzorców, które mogą się powielać lub poruszać po siatce [5].

Modelem wykraczającym poza standardowe automaty komórkowe jest zaprezentowany w pracy [2] model propagacji oparty o oddziaływania dalekozasięgowe (dalsze niż najbliższe sąsiedztwo). Celem pracy jest implementacja modelu w języku C++, który odtwarza zachowanie układu przedstawionego w pracy [2].

3 Model propagujących wzorców aktywności w obwodach nerwowych

3.1 Charakterystyka modelu

Model wzorców aktywności w obwodach nerwowych to dwuwymiarowy model sieci wzbudzających elementów. Zakłada on, że w pierwszym kroku dochodzi do losowego umieszczenia na siatce kilkunastu elementów w stanie aktywacji o wymiarach przynajmniej 3x3. Układ przedstawiony jest na siatce kwadratowej o wymiarze $L * L$ kwadratów.

W kolejnych krokach czasowych dochodzi do obliczeń dynamiki układu. W efekcie zachodzi proces samoorganizacji podczas którego formują się wzorce. Następnie można obserwować zachowanie układu w zależności od odpowiednio dobranych parametrów. O tym jaki będzie stan komórki w położeniu (i, j) sieci kwadratowej w kolejnym kroku czasowym decydują reguły:

- Gdy element jest w stanie aktywacji, wysyła sygnały wyjściowe do innych elementów, z którymi jest połączony i przechodzi w stan refrakcji w następnym kroku czasowym.
- Element w stanie spoczynku pozostaje w spoczynku, chyba że całkowity wkład otrzymany z innych elementów jest większy niż wartość progowa, w którym to przypadku jest on aktywowany w następnym kroku czasowym.
- Jeśli element jest w stanie refrakcji, powraca do stanu spoczynku z prawdopodobieństwem p_g , w przeciwnym razie pozostaje niezmienny.

Każdy element jest sprzężony z wieloma innymi elementami o sile, która zawiera sprzężenie centralnego otoczenia, tj. sprzężenie pobudzające krótkiego zasięgu z hamowaniem dłuższego zasięgu. Siła sprzęgania zależy ściśle od odległości. Interakcje między elementami są pobudzające ($W'_{ij,i'j'} \geq 0$), gdy $d_{ij,i'j'}$ - odległość euklidesowa pomiędzy badanymi elementami wynosi $d_{ij,i'j'} \leq d_0 = 5.4$.

Natomiast, gdy $d_m > d_{ij,i'j'} > d_0$, $W'_{ij,i'j'} < 0$ (interakcje są hamujące)[2].

Struktura ta jest powszechna w układach naturalnych, szczególnie neuronowych. Siła sprzęgania między elementem znajdującym się w (i, j) , a tym w (i', j') jest oznaczona przez $W_{ij,i'j'}$, który jest zbudowany z funkcji „kapelusza meksykańskiego”:

$$W'_{ij,i'j'} = C_E \exp\left(-d_{ij,i'j'}^2/d_E\right) - C_I \exp\left(-d_{ij,i'j'}^2/d_I\right), \quad (1)$$

gdzie stałe wynoszą: $C_E = 0.4$, $C_I = 0.1$, $d_E = 14.0$, $d_I = 42.0$ i $d_m = 15.0$ [2].

Aby umożliwić zmiany siły sprzęgania pobudzającego i hamującego bez zmiany ich zakresów przestrzennych normalizowane są one osobno, co daje w wyniku funkcję sprzężenia $W_{ij,i'j'}$ zastosowaną w omawianym modelu. Zależy ona ściśle od odległości pomiędzy analizowanymi elementami siatki. Zależności przedstawiają się następująco:

- $W_{ij,i'j'} = W_E W'_{ij,i'j'} / W_{ij}^E$, jeśli $d_{ij,i'j'} < d_0$;
- $W_{ij,i'j'} = W_I W'_{ij,i'j'} / W_{ij}^I$ jeśli $d_0 \leq d_{ij,i'j'} < d_m$;
- $W_{ij,i'j'} = 0$ jeśli $d_{ij,i'j'} \geq d_m$, gdzie $W_E = 68$ and $W_I = -300$.

Także w zależności od odległości zliczane są odpowiednie sumy:

$$W_{ij}^E = \sum_{i'j'} W'_{ij,i'j'}, \text{ jeśli } d_{ij,i'j'} < d_0;$$

$$W_{ij}^I = \sum_{i'j'} W'_{ij,i'j'}, \text{ jeśli } d_0 \leq d_{ij,i'j'} < d_m.$$

Jeśli stany spoczynkowe, aktywacji i refrakcji są oznaczone odpowiednio przez $u_{ij}^n = 0, 1$ i -1 , dynamikę można opisać za pomocą poniższych zależności:

$$u_{ij}^{n+1} = \begin{cases} H(I_{ij}^n - u_{th}), & \text{jeśli } u_{ij}^n = 0 \\ -1, & \text{jeśli } u_{ij}^n = 1 \\ 0, \text{ z p. } p_g, \text{ inaczej } -1, & \text{jeśli } u_{ij}^n = -1 \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $1 \leq i, j, i', j' \leq N$ i $u_{th} = 2$.

Funkcja $H(x)$ jest funkcją schodkową i pełni rolę "przełącznika" pomiędzy stanami oznaczonymi przez wartości 0 i 1 wg następujących reguł:

$H(x) = 0$ jeśli $x < 0$, $H(x) = 1$ jeśli $x \geq 0$. Funkcją I_{ij}^n zadany jest całkowity wkład otrzymany przez element (i, j) od otoczenia i wynosi:

$$I_{ij}^n = \sum_{i',j'} W_{ij,i'j'} H(u_{i'j'}^n - 1). \quad (3)$$

3.2 Algorytm

Algorytm implementowany w celu utworzenia symulacji propagacji wygląda następująco:

1. Wybierz rozmiar dwuwymiarowej sieci $L \times L$.
2. Ustal wartość prawdopodobieństwa z jaką będzie dochodzić do zmiany stanu komórki ze stanu refrakcji w stan spoczynku.
3. Losowo zapełnij sieć dwuwymiarową elementami aktywowanymi o rozmiarze co najmniej 3×3 .
4. Sprawdź stan komórki nerwowej (jednego kwadratu w siatce).
5. Jeśli komórka jest w stanie aktywacji nadaj jej wartość (-1) , by w kolejnym kroku czasowym automatycznie przeszła w stan refrakcji. Nową wartość wpisz do tablicy tymczasowej.

6. Jeśli komórka jest w stanie refrakcji to zapisz warunek przejścia z prawdopodobieństwem p_g w stan spoczynku(nadaj wartość równą 0), w innym przypadku pozostanie w stanie refrakcji(wartość -1). Nową wartość wpisz do tablicy tymczasowej.
7. Jeśli komórka jest w stanie spoczynku (ma wartość zero) zlicz siłę sprzęgania $W_{ij,i'j'}$ pomiędzy badaną komórką, a każdą komórką w stanie aktywacji w odległości do $d_m = 15$. Następnie oblicz sumy sił sprzęgania W_{ij}^E i W_{ij}^I w zależności od odległości pomiędzy komórkami. Oblicz sprzężenie za pomocą funkcji sprzężenia. Sprawdź czy suma sprzężeń z komórkami w stanie aktywacji jest równa lub większa $u_{th} = 2$. Jeśli tak to nadaj wartość równą 1 w kolejnym kroku czasowym. W przeciwnym wypadku pozostanie w stanie spoczynku(zachowaj wartość równą 0). Nową wartość wpisz do tablicy tymczasowej.
8. Wyjdź z pętli.
9. Wykonaj obliczenia dla kolejnego kwadratu.
10. Zakończ obliczenia zmian stanu po przekroczeniu wartości L.
11. Przepisz wartości z tabeli tymczasowej do pierwotnej tabeli.
12. Zapisz klatkę symulacji w postaci mapy wartości(kolor).
13. Ponów obliczenia dla kolejnego kroku czasowego(wrót do punktu nr 4).

3.3 Wyniki

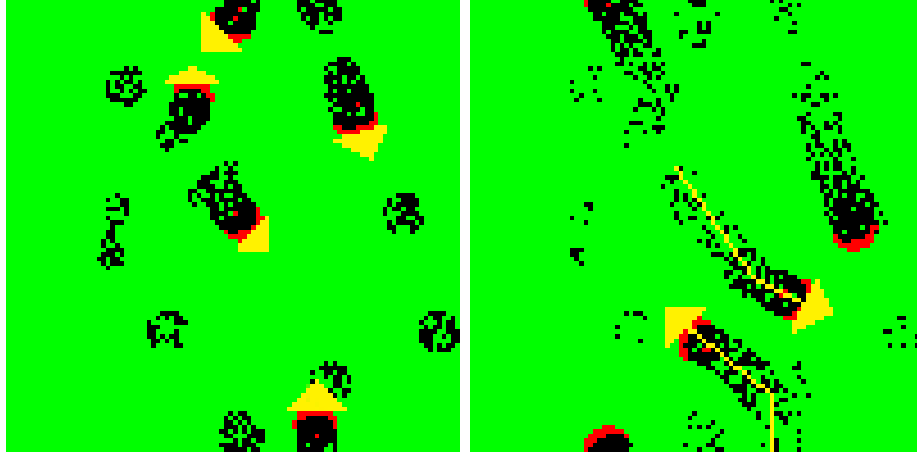
W celu uzyskania modelu z artykułu [2] napisałam program w języku C++. Wszystkie obliczenia podczas uruchamiania programu wykonywałam na komputerze z procesorem Intel(R) Core(TM) i7-4710HQ CPU @ 2.50 GHz. Obliczenia dla siatki o wymiarach 100 x 100 były na tyle wymagające, że otrzymanie jednej klatki symulacji trwało od 15 do 19 minut. Przykładowo w celu otrzymania symulacji stworzonej z 35 klatek, obliczenia trwały 10 godzin.

Symulacje komputerowe parametryzowałam poprzez:

- zmiany wartości prawdopodobieństwa p_g ,
- wielkość siatki,
- czas obliczeń,
- dobór ilości klatek.

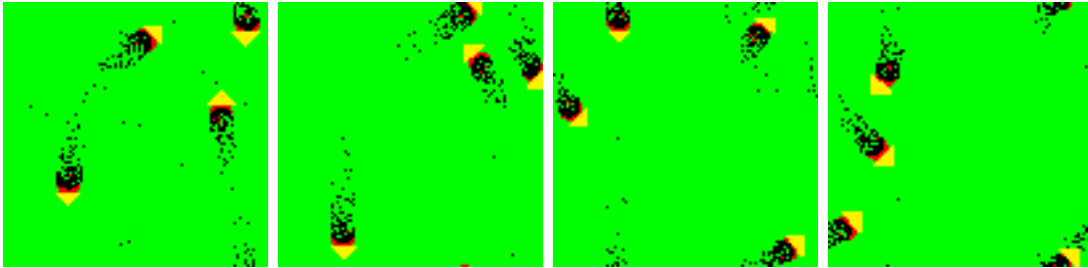
W celu wykazania różnic pomiędzy symulacjami wybrałam wartości $p_g = 0.1$, $p_g = 0.25$, $p_g = 0.4$, $p_g = 0.5$, $p_g = 0.7$ oraz $p_g = 0.98$.

Symulację charakteryzującą się największą dynamiką osiągnęłam dla wartości $p_g = 0.1$. Na rysunku 3 pokazane są klatki nr 8 oraz 21. Ukazany jest ruch postępowy wzorców. Dobrze widoczne są interakcje zachodzące pomiędzy wzorcami propagującymi. Tor ruchu został oznaczony jasną linią i strzałkami. Przy zderzeniach komórek w stanie aktywnym sąsiednich klastrów dochodzi do zmiany kierunku ich ruchu.



Rysunek 3: Wzorce propagujące dla $p_g = 0.1$, krok czasowy 8 (lewy) i 21 (prawy).

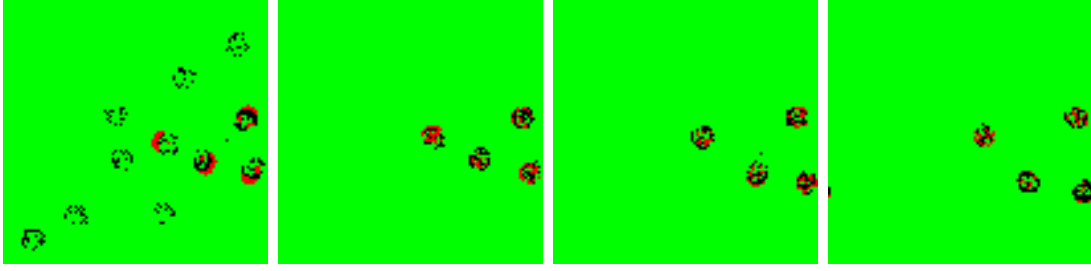
Na rysunku 4 przedstawiłam układ dla wartości $p_g = 0.25$. Rysunek nr 4 przedstawia dynamicznie obliczane wzorce propagujące. Na klatkach nr 17, 27, 37 oraz 47 można zaobserwować ruch postępowy wzorców, gdzie strzałka wskazuje kierunek ruchu klastra. Za propagującym wzorcem widać krótki ślad komórek w stanie refrakcji. W tym przypadku wzorce charakteryzują się mniejszą prędkością niż w przypadku symulacji, gdzie wartość $p_g = 0.1$. Ślad refrakcji składa się z mniejszej liczby elementów. Podobieństwem jest to, iż nadal zachodzą interakcje pomiędzy sąsiednimi wzorcami.



Rysunek 4: Wielokrotnie zlokalizowane wzorce propagujące w kolejnych krokach czasowych, dla $p_g = 0.25$.

W artykule [2] wartość prawdopodobieństwa równa 0.5 przedstawiona była jako wartość krytyczna, po której przekroczeniu prędkość propagacji wzorców w układzie spadała do zera. Układy, dla których wartość p_g zawiera się w zakresie między 0.5, a 1 zachowują się w podobny sposób. Po przejściu procesu samoorganizacji wzorce skupiają się w jednym miejscu oscylując wokół centralnego punktu, nie wykazują ruchu postępowego, są wyraźnie oddzielone, a także charakteryzują się prędkością równą zero.

Na rysunku 5 widoczne są klatki symulacji nr: 4, 14, 24 oraz 34, które przedstawiają zachowanie układu dla $p_g = 0.7$.

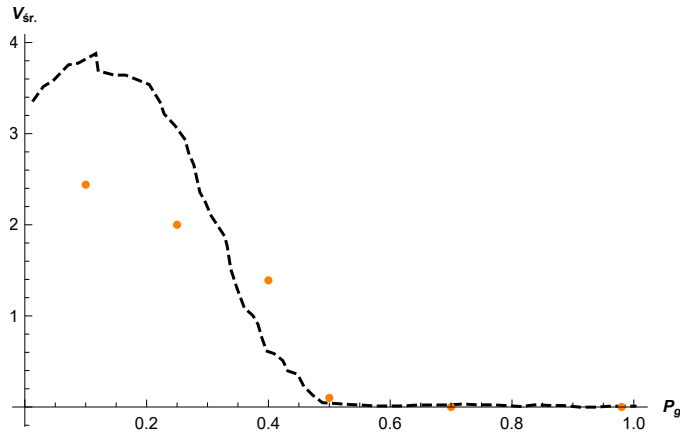


Rysunek 5: Wielokrotnie zlokalizowane wzorce w kolejnych krokach czasowych, dla $p_g = 0.7$.

Na rysunku 6 widoczny jest wykres prędkości średniej od wartości p_g porównujący wartości z artykułu [2] oraz te uzyskane przeze mnie. Czarną przerywaną linią zaznaczone są dane uzyskane przez grupę naukowców z Uniwersytetu w Sydney [2], a kropkami wyniki uzyskane przeze mnie. W zakresie wartości od 0 do 0.5 widać duże odchylenia od normy. Mogą one wynikać z faktu, iż:

- moje obliczenia oparte były tylko na kilku uzyskanych symulacjach z tego zakresu,
- wyliczenia prędkości średnich uzyskałam co najwyżej dla czterech wzorców, ale tylko z jednej symulacji dla danej wartości prawdopodobieństwa,
- możliwości pomiarów prędkości średniej ograniczone były do uzyskanej, niskiej liczby klatek (20-30).

Natomiast po przekroczeniu krytycznej wartości prawdopodobieństwa otrzymane dane się powielają.



Rysunek 6: Wykres prędkości średniej od wartości p_g .

4 Wnioski

Podsumowując, w swojej pracy zaimplementowałam model propagacji wzorców z pracy [2]. W celu uzyskania modelu napisałam program w języku C++. Na podstawie informacji zawartych w artykule [2] napisałam funkcje odpowiadające równaniom matematycznym wpływającym na działanie modelu. W programie wybrałam wielkość siatki $L * L = 100 * 100$ i używałam tej wielkości do wygenerowania wszystkich symulacji.

W celu zbadania dynamiki modelu, użyłam różnych wartości prawdopodobieństwa p_g z jaką dochodziło do zmiany stanu komórki ze stanu refrakcji w stan spoczynku (p_g). W wyniku działania programu każda klatka zapisywana była do pliku w formacie ppm, co później pozwoliło mi na wykonanie symulacji komputerowych i ocenę modelu w zależności od doboru parametru p_g . Pozostałe stałe wartości deklarowane w programie za każdym razem pozostały niezmiennie. W przypadku p_g niższego niż wartość prawdopodobieństwa nazwanego krytycznym, o wartości równej 0.5 uzyskałam symulacje, w których wzorce wykazują charakter dynamiczny, propagują, a także zauważalne są interakcje pomiędzy poszczególnymi klastrami. Jednak dla ww. symulacji wartości prędkości propagacji się od siebie różnią. W przypadku prawdopodobieństwa przekraczającego wartość krytyczną w każdym rozpatrywanym przypadku prędkość propagacji wyniosła zero. Oceny prędkości dokonałam poprzez wyliczenie prędkości średnich wzorców powstałych we wszystkich symulacjach. W programie IrfanView wykonałam ręczny pomiar położenia pikseli w rysunkach. Każdy mierzony piksel odpowiadał komórce w stanie aktywacji, która znajdowała się w przedniej, centralnej części wygenerowanego wzorca. Uzyskane wartości położenia początkowego i końcowego pozwoliły na obliczenie wektora przesunięcia klastra w czasie. Prędkość średnią uzyskałam poprzez obliczenie ilorazu przemieszczenia wzorca w pewnym przedziale czasu do wielkości tego przedziału czasu, z założeniem, że wektor prędkości ma wartość stałą. Otrzymane wyniki porównałam na wykresie z wartościami uzyskanymi poprzez proces digitalizacji danych z wykresu w artykule [2]. Dokonałam również oceny kierunków ruchu wzorców propagujących i oznaczenie zmian torów ruchu w przypadku jednej wybranej symulacji.

W trakcie implementacji algorytmu w programie z użyciem języka C++ napotkałam kilka problemów. Jednym z nich był czas obliczania i generowania pojedynczych klatek. Do oceny działania modelu generowałam od 10 do 20 klatek, co było czasochłonne. W trakcie pisania programu i oceny symulacji pojawiał się błąd w zachowaniu modelu. Uzyskiwałam bowiem dynamiczny układ wzorców po przekroczeniu prawdopodobieństwa o wartości krytycznej, co nie zgadzało się z przedstawionymi w artykule wynikami. Wynikało to z użycia jednej tablicy zarówno do pobierania danych o bieżącym stanie układu, jak i do zapisywania stanu komórki w kolejnym kroku czasowym.

Po naprawieniu tego błędu i użyciu tymczasowej tablicy na zapis stanu nowego układu, uzyskałam model, który pod względem dynamiki odpowiadał oczekiwanym wynikom, ale po procesie samoorganizacji uzyskane wzorce nie przypominały wcale tych z artykułu [2]. Największym problemem podczas implementacji modelu w końcowej fazie pracy był brak jednej, kluczowej informacji. Mianowicie w artykule [2] warunki początkowe układu zadane są jako losowe. Do osiągnięcia oczekiwanych wyników należało dokonać implementacji kilku lub kilkunastu skupisk elementów aktywnych o wielkości co najmniej 3×3 , o czym informował dopiero artykuł [11].

Zważając na założone cele, zaimplementowałam model propagujących wzorców odpowiadającym zachowaniu wzorców obserwowanych naturalnie w systemach neuronowych oraz wykonałam symulacje komputerowe charakteryzujące się poprawną dynamiką układów. Z modelu wynika, iż parametr p_g jest kluczowy w przypadku tworzenia się wzorców propagujących. Podobnie dobór warunków początkowych jest bardzo istotny w celu uzyskania poprawnych wyników.

Literatura

- [1] Gong P., van Leeuwen C., *Distributed Dynamical Computation in Neural Circuits with Propagating Coherent Activity Patterns*, PLoS ComputBiol 5(12): e1000611, 1-10, (2009).
- [2] Gong P., Robinson P. A., *Dynamic pattern formation and collisions in networks of excitable elements*, Phys. Rev. E 85, 055101(R), 1-4, (2012).
- [3] Qi Y., Gong P., *Dynamic patterns in a two-dimensional neural field with refractoriness*, Phys. Rev. E 92, 022702, 1-10, (2015).
- [4] Han F., Caporale N., Dan Y., *Reverberation of recent visual experience in spontaneous cortical waves*, Neuron, 60, 321–327, October 23, (2008).
- [5] Ball P., *Pattern formation in nature: Physical constraints and self-organising characteristics*, Architectural Design, 82(2), 22–27, (2012).
- [6] Hodgkin J., *Pattern Formation*, Encyclopedia of Genetics, 1424-1426, (2001).
- [7] Solomon E. P., Martin Ch. E., Martin D. W., Bergl L. R., *Biology*, Cengage Learning, Inc., 860-894, (2019).
- [8] Keane A., Gong P., *Propagating Waves Can Explain Irregular Neural Dynamics*, The Journal of Neuroscience, January 28, 35(4): 1591–1605, (2015).
- [9] H. Klekowicz, *Praca doktorska pt. Opis i identyfikacja struktur przejściowych w sygnale EEG*. Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, Warszawa 2008
- [10] Phelps M. E., *Positron emission tomography provides molecular imaging of biological processes*, PNAS, August 1, 97 (16), 9226-9233, (2000).
- [11] Y. Qi, M. Breakspear, P. Gong, *Subdiffusive Dynamics of Bump Attractors: Mechanisms and Functional Roles*, Neural Computation, 27, 255–280, (2015).