

UNIwersYTET WROCLAWSKI
WYDZIAŁ FIZYKI I ASTRONOMII
INSTYTUT FIZYKI TEORETYCZNEJ



SEBASTIAN SZCZECINA

WŁASNOŚCI HYDRODYNAMICZNE MODELU GAZU SIECOWEGO FHP-III

HYDRODYNAMICS OF THE FHP-III LATTICE GAS AUTOMATA

Opiekun:
dr hab. Z. Koza

WROCLAW 2008

Pragnę serdecznie podziękować:

*Panu dr hab. Zbigniewowi Kozie
za cenne uwagi, zrozumienie i życzliwość
w trakcie pisania pracy,*

*Panu mgr Maciejowi Matyce
za liczne wskazówki i komentarze,
którym niniejsza praca zawdzięcza to,
co w niej najlepsze.*

Streszczenie

Komputerowe symulacje przepływu płynów należą do ważnego obszaru badań fizyki komputerowej, aerodynamiki, jak również są nieograniczonym źródłem efektów wykorzystywanych we współczesnym świecie rozrywki. Umiejętność zrozumienia praw fizyki rządzących przepływami i wykorzystanie wciąż rosnących mocy obliczeniowych komputerów pozwalają przewidywać i odtwarzać zachowanie płynnej materii. Celem niniejszej pracy było zbadanie możliwości modelu gazu sieciowego FHP-III – prostej idealizacji płynu opartej na zasadach działania automatów komórkowych.

W rozdziale pierwszym przedstawiono swoistą ewolucję modelu FHP-III: począwszy od idei automatu komórkowego zaproponowanej przez J. von Neumanna, poprzez gaz sieciowy oparty na sieci kwadratowej HPP, aż do rodziny izotropowych modeli opartych na sieci trójkątnej – FHP. Ponadto, wprowadzone zostało pojęcie warunków brzegowych, które opisują zachowanie płynów symulowanych modelami gazów sieciowych podczas wpływu i wypływu w obszar symulacji oraz kontaktu z przeszkodami. Zakończenie rozdziału pierwszego stanowi szereg relacji pomiędzy wielkościami hydrodynamicznymi charakteryzującymi modele gazów sieciowych.

Rozdział drugi jest próbą skonfrontowania automatu komórkowego FHP-III z oczekiwaniami wysuwanymi wobec *dobrego* modelu hydrodynamicznego. W pierwszym etapie sprawdzono czy ciśnienie w układzie z płynem opisywanym modelem FHP-III spełnia prawo Pascala. Zmierzono czas relaksacji ciśnienia w modelu i porównano z analogicznymi wynikami otrzymanymi dla modelu FHP-II. Kolejnym krokiem było określenie, czy model FHP-III, w przeciwieństwie do modelu HPP, jest izotropowy. Finalną częścią drugiego rozdziału jest próba obliczenia lepkości modelu poprzez zasymulowanie płaskiego przepływu Poiseuille’a.

W rozdziale trzecim opisano dwa eksperymenty przeprowadzone nad modelem FHP-III mające określić czy model ten spełnia prawo Darcy’ego: ponownie przeanalizowano przepływ Poiseuille’a dodając do badanego układu przeszkody, oraz jawnie zbadano zależność średniej prędkości płynu przepływającego przez materiał porowaty od gradientu przyłożonego ciśnienia.

Podsumowująca analiza otrzymanych wyników została przedstawiona w rozdziale czwartym.

Spis treści

1	Gazy sieciowe	2
1.1	Wstęp	2
1.2	Gra w Życie	3
1.3	Gaz sieciowy	4
1.4	Model HPP	4
1.5	Model FHP	5
1.6	Model FHP-II	8
1.7	Model FHP-III	8
1.8	Warunki brzegowe w modelach rodziny FHP	10
1.9	Wielkości makroskopowe w modelu gazu sieciowego	11
2	Hydrodynamika modelu FHP-III	12
2.1	Wstęp	12
2.2	Osiąganie stanu równowagi	12
2.3	Izotropowość	14
2.4	Przepływ Poiseuille’a	17
2.4.1	Analityczne rozwiązanie płaskiego przepływu Poiseuille’a	17
2.4.2	Symulacja przepływu przez kanał płaski	18
3	Przepływ przez ośrodki porowate i prawo Darcy’ego	22
3.1	Wstęp	22
3.2	Przepływ Poiseuille’a w układzie z rozpraszaczami	23
3.3	Zależność średniej prędkości cieczy od przyłożonego gradientu ciśnienia w ośrodku porowatym	24
3.4	Wizualizacja przepływu przez materiał porowaty	25
4	Podsumowanie	27
A	Algorytm modelu FHP-III	28
A.1	Algorytm modelu LGCA	28
A.2	Kod źródłowy modelu gazu sieciowego FHP-III	30
B	Wizualizacja pól wektorowych	32
B.1	Wizualizacja pól wektorowych metodą Line Integral Convolution	32
B.1.1	Algorytm LIC	33
	References	36

Rozdział 1

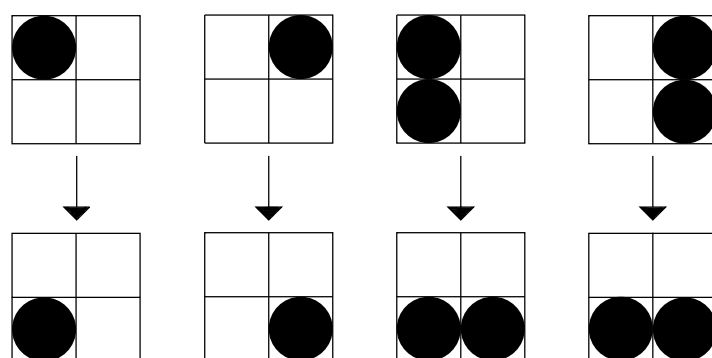
Gazy sieciowe

1.1 Wstęp

W latach 40-tych XX wieku Janos von Neumann pracując nad abstrakcyjnym systemem symulowania procesów samo replikacji organizmów biologicznych stworzył podstawy modelu, który dziś nazywamy automatem komórkowym. Zainspirowany pracami Stanisława Ulama, w swoich rozważaniach uwzględnił dyskretny czas oraz przestrzeń [1].

Automatami komórkowymi nazywamy maszyny matematyczne o skończonej liczbie stanów, które w każdym kroku zmieniają stan wszystkich swoich komórek jednocześnie [2]. Krok nazywamy *ewolucją* bądź *warstwą* automatu. Każdej komórce przypisany jest jeden z n możliwych stanów reprezentowanych przez liczby całkowite $0, 1, \dots, n - 1$.

Aby poprawnie zdefiniować automat komórkowy, musimy określić stan początkowy wszystkich komórek w chwili $t = 0$ oraz wyznaczyć zbiór reguł, które definiują stan każdej komórki w nowej warstwie ze znajomości stanu poprzedniej warstwy. Reguły te nie powinny zależeć od położenia komórek. Najczęściej przedstawia się je jako zestaw reguł przejść (Rys.1.1), które mogą być zapisane w postaci wzoru matematycznego. W każdym kroku ewolucji następuje zmiana wszystkich komórek automatu.



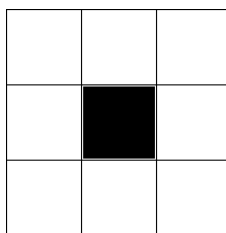
Rysunek 1.1: Przykład kilku reguł przejść dla automatu komórkowego Sand Pile [3].

Na przełomie lat 50 i 60 ubiegłego wieku, głównym kierunkiem badań nad automatami komórkowymi były modele jednowymiarowe [4]. W roku 1970 John Horton Conway stworzył dwuwymiarowy automat komórkowy nazywamy „Grą w Życie”, w którym proces ewolucji zdeterminowany był bardzo prostymi regułami [2][4]. Na przestrzeni os-

tatnich 25 lat jednym z najbardziej znanych popularyzatorów automatów komórkowych jest Stephen Wolfram, autor pakietu Mathematica służącego do obliczeń numerycznych i symbolicznych [2].

1.2 Gra w Życie

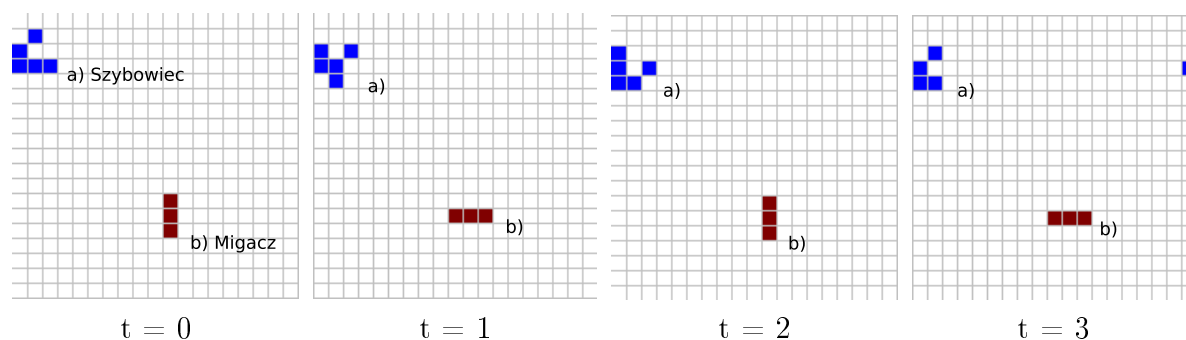
Gra w Życie jest jednym z najbardziej znanych automatów komórkowych [1]. Najbardziej rozpowszechniona wersja tego modelu to automat dwuwymiarowy, opisany na sieci kwadratowej. Każda komórka w układzie może znajdować się w stanie „żywym” (stan ten oznaczmy liczbą 1) lub „martwym” (liczba 0). Stan ten w każdym kroku symulacji zmienia się w zależności od stanów najbliższych ośmiu sąsiadów i stanu własnego (rys.1.2), co w literaturze nazywane jest *sąsiedztwem Moore’a* [5].



Rysunek 1.2: Każda komórka otoczona jest ośmioma sąsiadami.

Zasady ewolucji w Grze w Życie są proste. Komórka żywa pozostanie żywa po upływie jednostki czasu, jeśli dokładnie dwie lub trzy komórki w jej sąsiedztwie są żywe. W przeciwnym przypadku komórka umiera. Komórka martwa ożyje, jeżeli będzie otoczona dokładnie trzema żywymi sąsiadami [1][2]. Odpowiednie ustalenie warunku początkowego pozwala zaobserwować ciekawe zachowania układu.

Z pośród wielu formacji komórek, które mogą powstać podczas ewolucji do najciekawszych należą [2]: migacze (blinkers), szybowce (gliders), statki gwiazdne (star ships), armaty (guns) – rysunek 1.3.



Rysunek 1.3: Kolejne kroki ewolucji w Grze w Życie

Podczas implementacji automatu Conway’a ważnym elementem są warunki na brzegach sieci. Najczęściej zagadnienie to realizuje się poprzez nałożenie cyklicznych warunków brzegowych (przykładowo szybowiec docierający do lewego brzegu układu zacznie „wylania” się po jego prawej stronie [6] – rys.1.3).

1.3 Gaz sieciowy

Modele gazów sieciowych (LGCA – *Lattice Gas Cellular Automata* [7]) są automatami komórkowymi używanymi m.in. do symulowania przepływów płynów. Założenia charakteryzujące ten podzbiór automatów sprowadzić można do następujących zasad:

1. prędkości każdej cząstki może przyjmować wartość z dyskretnego zbioru wektorów prędkości,
2. z węzła n do sąsiedniego węzła m może w jednym kroku czasowym przemieszczać się tylko jedna cząstka,
3. każdy dyskretny krok czasowy składa się z dwóch etapów: *kolizji* i *przesunięcia*.

Reguły kolizji pomiędzy cząstkami są różne dla różnych modeli gazu sieciowego, ale w większości wariantów kolizje spełniają zasadę zachowania pędu oraz masy. Krok translacji sprowadza się do przesunięcia cząstki zgodnie z wektorem jej prędkości (algorytm modelu gazu sieciowego został opisany w *Dodatku A*).

W celu obliczenia wielkości hydrodynamicznych (np. gęstości, prędkości) dokonuje się podziału sieci na większe bloki, w których uśrednia się wartości mikroskopowe tych wielkości. Otrzymane w ten sposób informacje obarczone są *szumem statystycznym*. Szum często zmniejsza się stosując dodatkowo uśrednianie wielkości makroskopowych po zespole (co zgodnie z hipotezą ergodyczną oznacza uśrednianie po czasie) [8]. Proces obliczania wielkości hydrodynamicznych zostanie dokładnie opisany w dalszej części pracy.

Jedną z głównych zalet gazów sieciowych jest lokalny charakter warunków brzegowych, których implementacja ogranicza się często do mikroskopijnego „odbijania” cząstek od przeszkód ułożonych na sieci. Nie bez znaczenia jest również prostota ich implementacji bez potrzeby używania skomplikowanych metod numerycznych służących do obliczania równań różniczkowych. Pozwala to ograniczyć możliwość popełnienia błędu podczas tworzenia symulacji. Symetria i dyskretyzacja sieci umożliwia stosowanie technik programowania równoległego w celu przyspieszenia obliczeń.

1.4 Model HPP

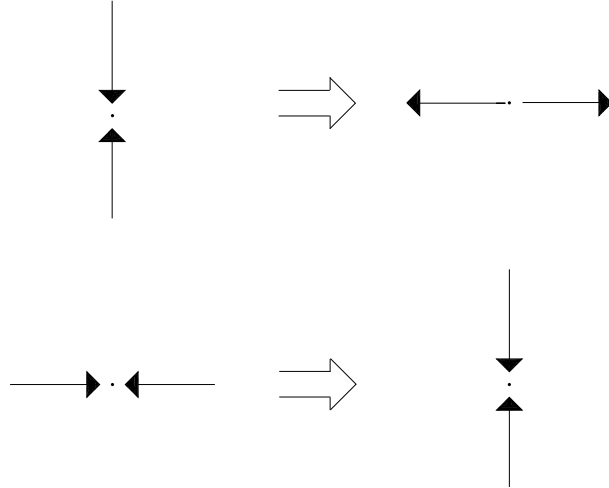
Pierwszym modelem gazu sieciowego był zaproponowany w 1973 model HPP [7] (**H**ardy, de **P**azzis, **P**omeau). Model ten opisany jest na sieci kwadratowej. Przesunięcie cząstek następuje wzdłuż kierunków sieci wyznaczonych wektorami:

$$\mathbf{c}_i = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} i \right), \cos \left(\frac{\pi}{2} i \right) \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.1)$$

gdzie spełniony jest warunek symetrii sieci:

$$\sum_{i=1}^4 \mathbf{c}_i = 0. \quad (1.2)$$

Kolizja zachodzi wtedy, gdy do jednego węzła podąża więcej niż jedna cząstka. Fakt, iż przy każdej kolizji zachowana jest liczba i pęd cząstek, prowadzi do zdefiniowania dwóch



Rysunek 1.4: Reguły kolizji dla modelu gazu sieciowego HPP.

nietrywialnych typów kolizji, w których zmienia się wektor prędkości cząstek [1] (rys. 1.4).

W tak zdefiniowanym modelu każdy węzeł może znajdować się w jednym z $2^4 = 16$ stanów, przy czym za pomocą czterech liczb (N,S,W,E) opisać możemy zmierzające do niego z odpowiednich kierunków cząstki:

- (0,0,0,0) oznacza pusty węzeł,
- (1,0,0,0) węzeł do którego zmierza jedna cząstka (z góry),
- ...
- (1,1,1,1) węzeł do którego z każdego kierunku zmierza cząstka.

Każdemu węzłowi możemy zatem przypisać liczbę całkowitą $n = 0, \dots, 15$ będącą dziesiętnym odpowiednikiem reprezentacji binarnej stanu węzła (N,S,W,E). Ten sposób pozwala zaimplementować kolizje i translacje jako operacje bitowe na liczbach całkowitych [7].

Model HPP jest jedną z najprostszych realizacji gazu sieciowego. Obecnie ze względu na brak izotropowości model ten omawiany jest głównie ze względów historycznych. W ujęciu makroskopowym niemożliwe jest otrzymanie równań Naviera-Stokesa dla tego automatu [7].

1.5 Model FHP

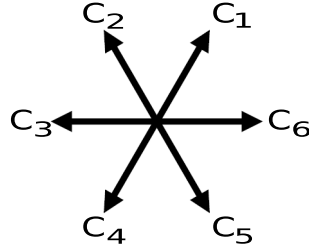
W roku 1986 Frish, Hasslacher i Pomeau zaproponowali, aby gaz sieciowy opisać na sieci trójkątnej [9]. W modelu tym, wektory sieci (rys. 1.5) zapisujemy [7]:

$$\mathbf{c}_i = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}i\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}i\right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (1.3)$$

gdzie spełniony jest warunek symetrii sieci:

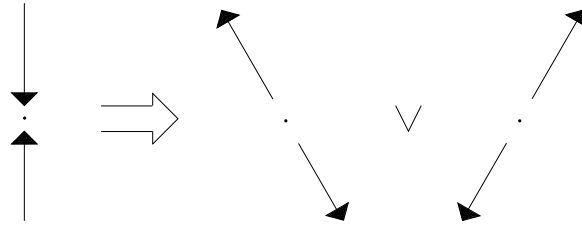
$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i = 0. \quad (1.4)$$

Wektory sieci $\mathbf{c}_i$ są również jedynymi dostępnymi wektorami prędkości, z jakimi mogą poruszać się cząstki w modelu. Wynika to z faktu, iż w automatach komórkowych długość kroku czasowego ma ustaloną wartość $\Delta t = 1$, więc $\mathbf{c}_i$ i $\mathbf{c}_i/\Delta t$ posiadają zawsze tę samą wartość numeryczną. Wszystkie cząstki w modelu FHP posiadają tę samą masę $m = 1$, zatem wektory $\mathbf{c}_i$ również możemy utożsamić z wektorami pędu cząstek. Podobnie jak w modelu HPP, stan komórki możemy reprezentować poprzez kombinację 6-bitowe, co daje $2^6 = 64$ możliwych stanów [7].

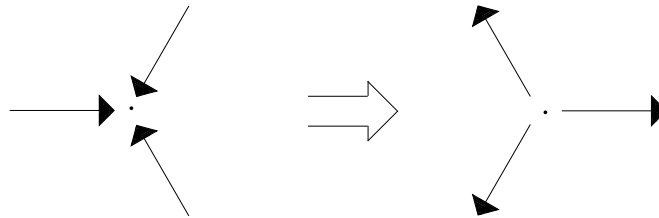


Rysunek 1.5: Wektory sieci w modelu FHP.

W modelu FHP wprowadza się dwa nietrywialne typy kolizji zachowujące pęd i masę: z udziałem dwóch i trzech cząstek [1]. Gdy do jednego węzła zbiegają z przeciwnych kierunków dokładnie dwie cząstki, wektor prędkości każdej z nich zmieni po kolizji swój kierunek o 60° , przy czym suma pędów tych cząstek będzie wciąż wynosić zero. Na rysunku 1.6 pokazano, iż cząstki po kolizji mogą zmienić swój kierunek w prawo bądź w lewo. Aby zachować symetrię kolizji, kierunek skrętu wybiera się z prawdopodobieństwem $p = 1/2$. W przypadku, gdy do węzła zbiegają dokładnie trzy cząstki, których wektory prędkości tworzą kąt 120° (rys. 1.7), każda cząstka w wyniku kolizji odbije się od węzła.



Rysunek 1.6: Kolizja z udziałem dwóch cząstek w modelu FHP.



Rysunek 1.7: Kolizja z udziałem trzech cząstek w modelu FHP.

Stan węzła w chwili t w punkcie $\mathbf{r}$ możemy zapisać jako:

$$n(\mathbf{r}, t) = \{n_i(\mathbf{r}, t), i = 1, \dots, 6\}, \quad (1.5)$$

gdzie $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym węzła zaczepionym w środku układu współrzędnych, natomiast $n_i(\mathbf{r}, t)$ przyjmuje wartość 1, gdy z kierunku i do węzła wskazanego wektorem $\mathbf{r}$ zmierza cząstka lub 0, gdy taka sytuacja nie ma miejsca [7]. Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy, że:

$$n_i(\mathbf{r}, t) \equiv n_i. \quad (1.6)$$

Zgodnie z definicją (1.5) ewolucję stanu obsadzenia możemy zapisać za pomocą operatorów logicznych (&, |, $\wedge$, $\sim$):

$$\begin{aligned} n_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) = n_i \quad & \wedge \quad \{[(n_i \wedge n_{i+1}) \& (n_{i+1} \wedge n_{i+2}) \& (n_{i+2} \wedge n_{i+3}) \\ & \& (n_{i+3} \wedge n_{i+4}) \& (n_{i+4} \wedge n_{i+5})] \\ & | \quad [n_i \& n_{i+3} \& \sim (n_{i+1} | n_{i+2} | n_{i+4} | n_{i+5})] \\ & | \quad [\zeta \& n_{i+1} \& n_{i+4} \& \sim (n_i | n_{i+2} | n_{i+3} | n_{i+5})] \\ & | \quad [\sim \zeta \& n_{i+2} \& n_{i+5} \& \sim (n_i | n_{i+3} | n_{i+4})]]\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \& &= \text{AND} \\ | &= \text{OR} \\ \wedge &= \text{XOR} \\ \sim &= \text{NOT}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

W równaniu (1.7) bit ζ reprezentuje losowy kierunek skrętu podczas kolizji z udziałem dwóch cząstek. Operatory logiczne można zastąpić działaniami arytmetycznymi (tablica 1.1), wtedy

a	b				
		AND	OR	XOR	NOT
		$a \& b$	$a b$	$a \wedge b$	$\sim a$
		$a \cdot b$	$a + b - a \cdot b$	$a + b - 2 \cdot a \cdot b$	$1 - a$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Tablica 1.1: Operatory logiczne wraz z arytmetycznymi odpowiednikami.

arytmetyczna postać ewolucji stanu wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} n_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) = n_i \quad & + \quad n_{i+1}n_{i+3}n_{i+5}(1 - n_i)(1 - n_{i+2})(1 - n_{i+4}) \\ & - \quad n_in_{i+2}n_{i+4}(1 - n_{i+1})(1 - n_{i+3})(1 - n_{i+5}) \\ & + \quad \zeta n_{i+1}n_{i+4}(1 - n_i)(1 - n_{i+2})(1 - n_{i+3})(1 - n_{i+5}) \\ & + \quad (1 - \zeta)n_{i+2}n_{i+5}(1 - n_i)(1 - n_{i+1})(1 - n_{i+3})(1 - n_{i+4}) \\ & - \quad n_in_{i+3}(1 - n_{i+1})(1 - n_{i+2})(1 - n_{i+4})(1 - n_{i+5}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Postać ogólną wzorów (1.7) i (1.9) wyrażających ewolucję układu można zapisać jako:

$$n_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t) = n_i(\mathbf{r}, t) + \Delta_i(n), \quad (1.10)$$

gdzie $\Delta_i(n)$ nazywamy operatorem kolizji. Aby spełniona była zasada zachowania pędu i masy, kolizje nie mogą zmieniać liczby cząstek ani pędu dla każdego węzła, zatem:

$$\forall n : \quad \sum_{i=1}^6 \Delta_i(n) = 0, \quad (1.11)$$

oraz:

$$\forall n : \quad \sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i \Delta_i(n) = 0. \quad (1.12)$$

Korzystając ze wzorów (1.10), (1.11) oraz (1.12) możemy zapisać równania zasady zachowania pędu i masy dla każdego węzła [LGCA63]:

$$\sum_{i=1}^6 n_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_{i=1}^6 n_i(\mathbf{r}, t), \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i n_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i n_i(\mathbf{r}, t). \quad (1.14)$$

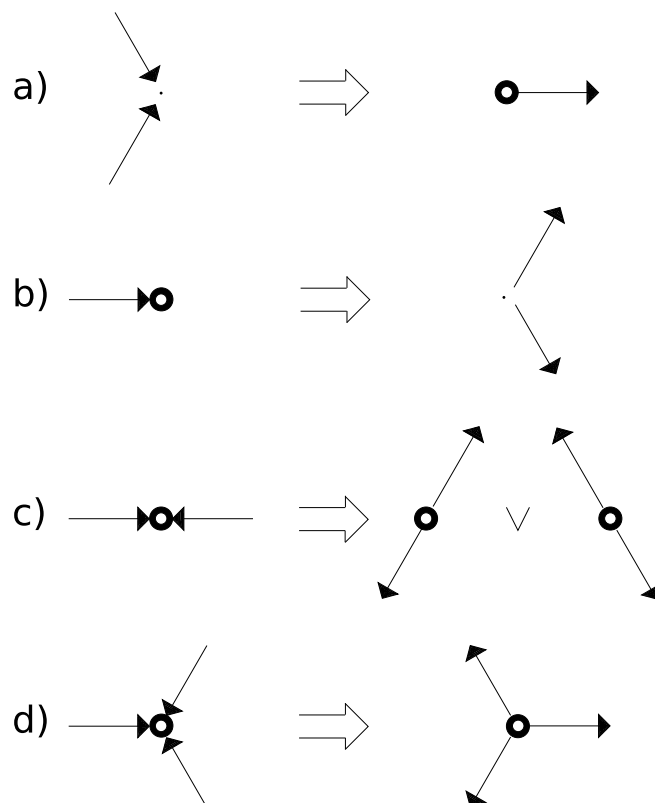
Równania (1.13) i (1.14) są również spełnione dla modelu HPP ($i = 1, \dots, 4$) oraz dla modeli FHP-II i FHP-III ($i = 1, \dots, 7$) omówionych w dalszej części pracy.

1.6 Model FHP-II

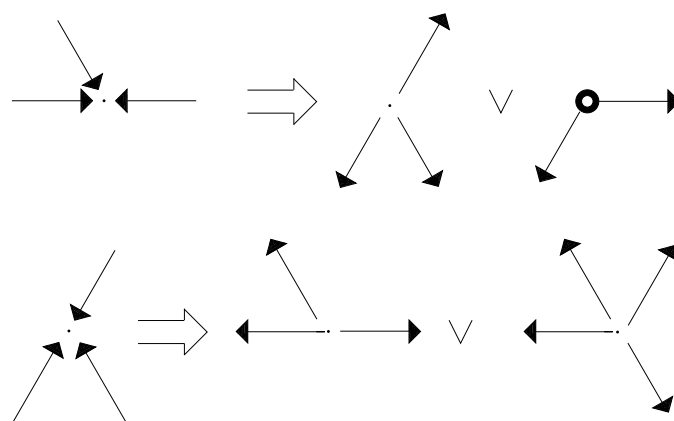
W odróżnieniu do FHP-I model FHP-II zakłada istnienie cząstek stacjonarnych. Wektor prędkości (pędu) dla cząstek stacjonarnych definiujemy jako $\mathbf{c}_7 = \mathbf{0}$. Daje to możliwość prostego zdefiniowania dodatkowych reguł kolizji; oprócz pięciu reguł kolizji odziedziczonych po klasycznym modelu FHP (rys. 1.6 i 1.7), w modelu FHP-II [8] definiujemy sześć kolizji typu (a), sześć kolizji typu (b) oraz pięć kolizji klasycznego modelu FHP ze stacjonarną cząstką umieszczoną w centrum zderzenia: (c) i (d) (rys. 1.8). Model FHP-II odznacza się niższą lepkością niż model FHP-I [7], co więcej – stanowi punkt wyjścia do najbardziej popularnego modelu FHP-III.

1.7 Model FHP-III

Wprowadzenie cząstek stacjonarnych umożliwia utworzenie większej liczby reguł kolizji niż to opisano rozdziale 1.6. Kolejny wariant modelu oznaczony symbolem FHP-III definiuje kolejne reguły, które przedstawiono na rysunku 1.9, zwiększając zbiór dostępnych kolizji do liczby 76 [10]. Tablica 1.2 przedstawia zestawienie liczby kolizji oraz możliwych stanów każdego węzła dla omówionych modeli. Model FHP-III posiada największą „gęstość” kolizji spośród przedstawionych wariantów gazów sieciowych. Oprócz mniejszej lepkości w porównaniu do modelu FHP-I i FHP-II, model FHP-III charakteryzuje się



Rysunek 1.8: Kolizje z cząstką stacjonarną zdefiniowane dla modelu FHP-II. (a), (b) - kolizje dwucząstkowe, (c), (d) - kolizje z udziałem trzech cząstek. Kółko z białym środkiem oznaczają cząstkę stacjonarną.



Rysunek 1.9: Dodatkowe reguły zdefiniowane dla modelu FHP-III.

większą wartością współczynnika Reynolds'a [7]. W rozdziale 2 przedstawiono szereg eksperymentów komputerowych, których celem jest scharakteryzowanie własności hydrodynamicznych modelu. Kod źródłowy modelu został przedstawiony w *Dodatku A*.

Model:	HPP	FHP	FHP-II	FHP-III
Liczba stanów:	16	64	128	128
Liczba kolizji:	2	5	22	76
$\frac{\text{kolizje}}{\text{stany}}$	12.5%	7.81%	17.19%	59.38%

Tablica 1.2: Stosunek liczby kolizji do wszystkich możliwych stanów węzła dla modeli HPP, FHP, FHP-II, FHP-III.

1.8 Warunki brzegowe w modelach rodziny FHP

Implementacja warunków brzegowych stanowi ważny aspekt modelu LGCA [7]. Rozróżniamy co najmniej pięć typów warunków brzegowych: *periodyczne* – przykład został opisany przy okazji omawiania Gry w Życie, *wpływu i wypływu* – mają zastosowanie m.in. w symulowaniu przepływu płynu przez kanał (*channel flow* – opisany w rozdziale 3); oraz warunki realizowane podczas kolizji cząstek gazu sieciowego z powierzchnią przeszkód: z *poślizgiem* (*Slip*) oraz *bez poślizgu* (*No-Slip*).

W warunku z *poślizgiem* (rysunek 1.10) ciecz jest przyspieszana na powierzchni przeszkody. Składowa normalna prędkości zanika ($u_n = 0$ oraz $\partial u / \partial n = 0$). Przyspieszanie cieczy na brzegach jest zjawiskiem niespotykanym w rzeczywistości, zatem warunek *poślizgu* jest nie fizyczny.



Rysunek 1.10: Warunek brzegowy z poślizgiem.

Warunek *bez poślizgu* realizowany jest poprzez odbicie wektora prędkości (rysunek 1.11). Wypadkowa prędkość takiej kolizji wynosi $\mathbf{u} = 0$.



Rysunek 1.11: Warunek brzegowy bez poślizgu.

1.9 Wielkości makroskopowe w modelu gazu sieciowego

W celu wyznaczenia wielkości hydrodynamicznych definiujemy średnią wartość obsadzenia $N_i(\mathbf{r}, t)$ jako średnią po zespole [1][7]:

$$N_i(\mathbf{r}, t) = \langle n_i(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (1.15)$$

$N_i(\mathbf{r}, t)$ jest również prawdopodobieństwem znalezienia cząstki w węźle wskazanym przez wektor wodzący $\mathbf{r}$ w chwili t poruszającej się z prędkością $\mathbf{c}_i$. Korzystając z powyższej definicji Lokalną gęstość makroskopową definiujemy jako sumę średnich liczb cząstek znajdujących się w kierunkach wskazanych przez wektory sieci $\mathbf{c}_i$.

$$\rho = \sum_{i=1}^z N_i(\mathbf{r}, t), \quad (1.16)$$

z określa liczbę wektorów sieci w konkretnym modelu (np. $z=7$ dla FHP-III). Na tym etapie ważne jest rozróżnienie klasycznej gęstości (1.16) od tzw. *gęstości na kierunku sieci*:

$$d = \frac{\rho}{z}. \quad (1.17)$$

Lokalny pęd w układzie zapisać możemy jako:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^z \mathbf{c}_i N_i(\mathbf{r}, t). \quad (1.18)$$

Znając wartości (1.16), (1.17) i (1.18) lokalną prędkość możemy obliczyć ze wzoru:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\rho}. \quad (1.19)$$

Charakterystyczną cechą modelu gazu sieciowego FHP-III jest liniowa relacja między ciśnieniem, a gęstością [BAL1250]:

$$p = 0.5\rho. \quad (1.20)$$

Lepkość kinematyczną modelu FHP-III wyraża wzór [7]:

$$\nu = \frac{1}{28} \frac{1}{d(1-d)} \frac{1}{1-8d(1-d)/7} - \frac{1}{8}, \quad (1.21)$$

gdzie ν , p , $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ i ρ są makroskopowymi wielkościami fizycznymi charakteryzującymi symulowany układ. Mikroskopowe równania zasady zachowania pędu i masy (1.13) i (1.14) implikują postać równań w przypadku makroskopowym:

$$\sum_{i=1}^6 N_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t+1) = \sum_{i=1}^6 N_i(\mathbf{r}, t) \quad (1.22)$$

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i N_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t+1) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i N_i(\mathbf{r}, t) \quad (1.23)$$

Rozdział 2

Hydrodynamika modelu FHP-III

2.1 Wstęp

W zależności od typu, modele gazów sieciowych charakteryzują się różnymi własnościami. Czynniki wpływającymi na te własności są: rodzaj sieci, na której opisany jest model oraz zdefiniowane reguły kolizji. Niniejszy rozdział jest próbą scharakteryzowania modelu FHP-III na podstawie przeprowadzonych eksperymentów w postaci symulacji komputerowych.

2.2 Osiąganie stanu równowagi

Zgodnie z prawem Pascalea z 1653 roku w układzie, na który nie działają siły zewnętrzne, ciśnienie jest jednakowe we wszystkich punktach płynu (gazu) [12]. Prawo to możemy zapisać w postaci równania:

$$\nabla P = 0. \quad (2.1)$$

W doświadczeniu mającym na celu sprawdzenie, czy model FHP-III spełnia prawo Pascala, utworzono zamknięty układ o rozmiarze $D = 500 \times 500 j.s.$ ¹, który podzielono na dwie, równe komory, oddzielone od siebie nieprzenikalną ścianą. W jednej komorze został umieszczony gaz opisany modelem FHP-III o gęstości na kierunek $d = \frac{2}{7}$, co odpowiada $\rho = 2$. Druga komora pozostała pusta. W chwili $t = t_0$ w połowie wysokości ściany oddzielającej komory została utworzona wyrwa o szerokości $L = 30 j.s.$ Rysunek 2.1 przedstawia kolejne etapy procesu wyrównywania ciśnienia w komorach. Z wykresu przedstawionym na rysunku 2.2 możemy wywnioskować, że zmiana ciśnienia w komorach opisana jest zależnością wykładniczą:

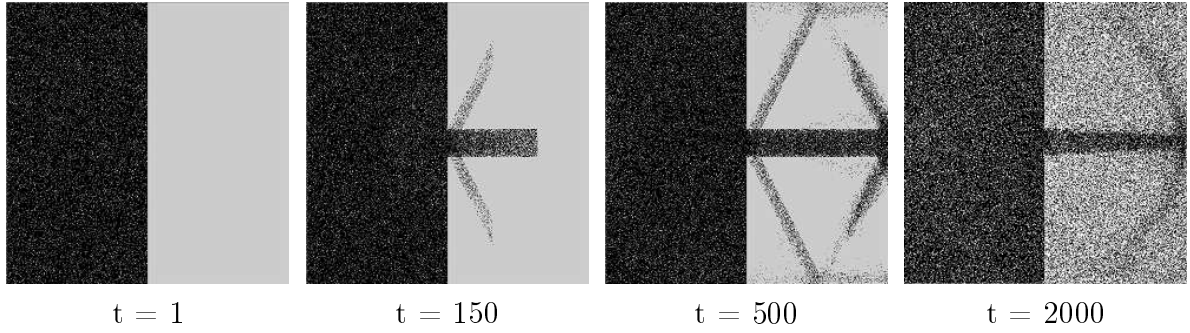
$$P(t) = Ae^{-t/\tau} + B, \quad (2.2)$$

gdzie τ jest czasem relaksacji ciśnienia [13].

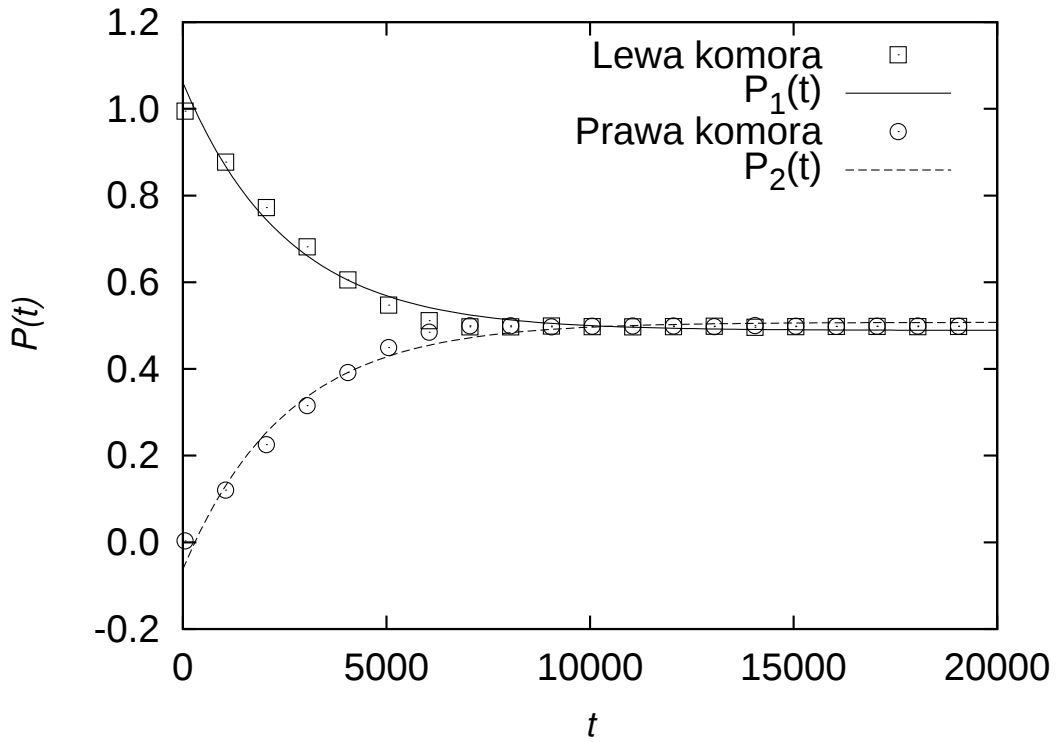
Aproksymując funkcję (2.2) do otrzymanych punktów pomiarowych uzyskano dla funkcji ciśnienia w lewej komorze $P_1(t)$ następujące wartości współczynników:

$$\begin{aligned} \tau &= 2.5 \cdot 10^3 \pm 34, \\ B &= 4.8 \cdot 10^{-1} \pm 0.001, \\ A &= 5.7 \cdot 10^{-1} \pm 0.004, \end{aligned}$$

¹j.s. - jednostka stałej sieci



Rysunek 2.1: Wyrównywanie ciśnienia w komorach.

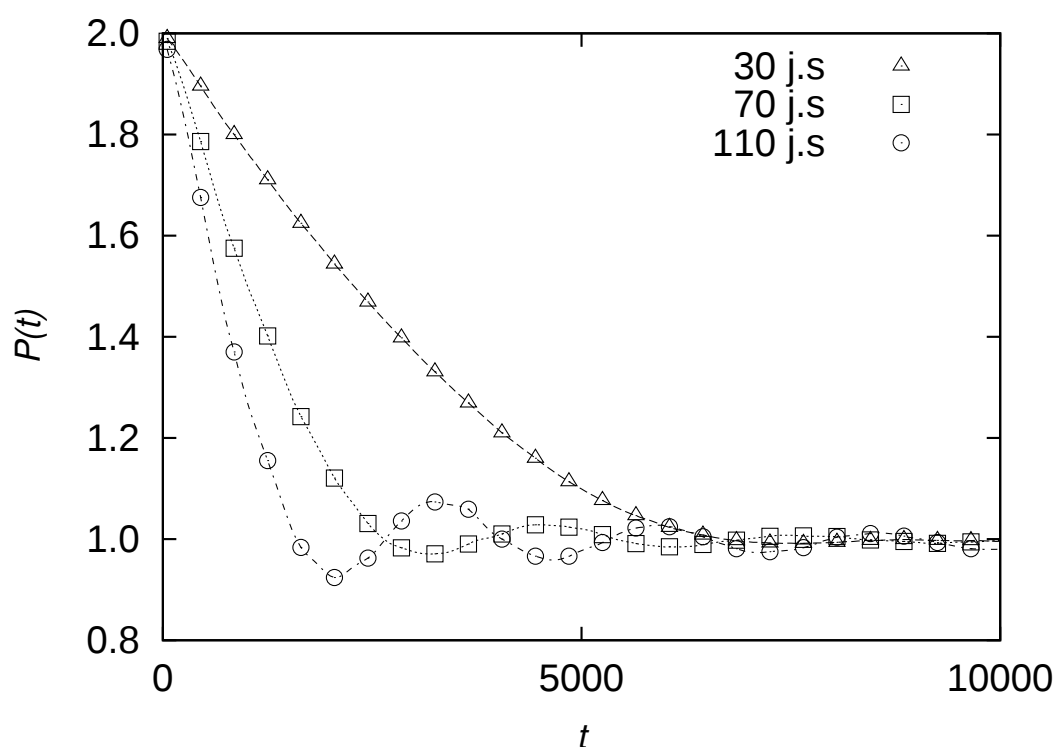


Rysunek 2.2: Wykres zmian ciśnienia w komorach.

oraz dla funkcji $P_2(t)$ (prawa komora):

$$\begin{aligned}
 \tau' &= 2.5 \pm 34, \\
 B' &= 5.1 \pm 0.001, \\
 A' &= -5.7 \pm 0.004.
 \end{aligned}$$

Analizując otrzymane wyniki widzimy, że czasy relaksacji w obu komorach są równe, zatem ciśnienie w jednakowym czasie osiąga stan równowagi w całej przestrzeni badanego układu. Rozmiar otworu w ścianie oddzielającej podukłady ma wpływ na proces wyrównywania ciśnienia. Rysunek 2.3 przedstawia wykres zmian ciśnienia w lewej komorze dla różnych szerokości wyrwy. Wraz ze wzrostem szerokości L otworu czas relaksacji układu maleje; następuje gwałtowniejszy spadek ciśnienia, któremu towarzyszą pojawiające się



Rysunek 2.3: Wykres zmian ciśnienia w lewej komorze dla różnych wartości szerokości L . Model FHP-III.

oscylacje, które maleją wraz ze wzrostem czasu symulacji. Oscylacje te można tłumaczyć falą uderzeniową pojawiającą się przy dużych gradientach ciśnienia.

Ostatnim etapem doświadczenia było powtórzenie symulacji dla tych samych warunków początkowych z użyciem modelu FHP-I. Otrzymany czas relaksacji wynosi

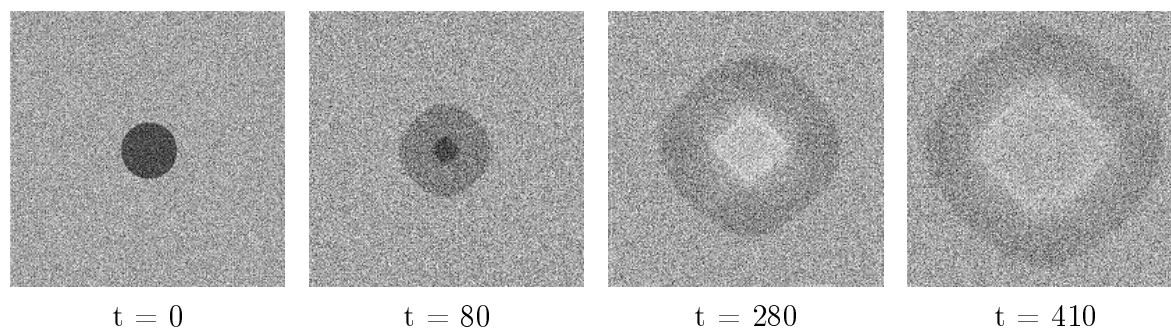
$$\tau'' = 2.2 \cdot 10^3 \pm 27,$$

zatem jest mniejszy od wartości uzyskanych dla modelu FHP-III. Szybsze osiągnięcie równowagi przez gaz FHP-I możemy tłumaczyć znacznie skromniejszym zbiorem reguł kolizji definiującym ten model, a co za tym idzie - większą lepkością. Warto jednak zauważyć, że przy tak dużej różnicy udziału reguł kolizji wśród wszystkich możliwych stanów (FHP-I: 8%, FHP-III: 59% - tabela 1.2), czas relaksacji jest mniejszy tylko o 13%.

2.3 Izotropowość

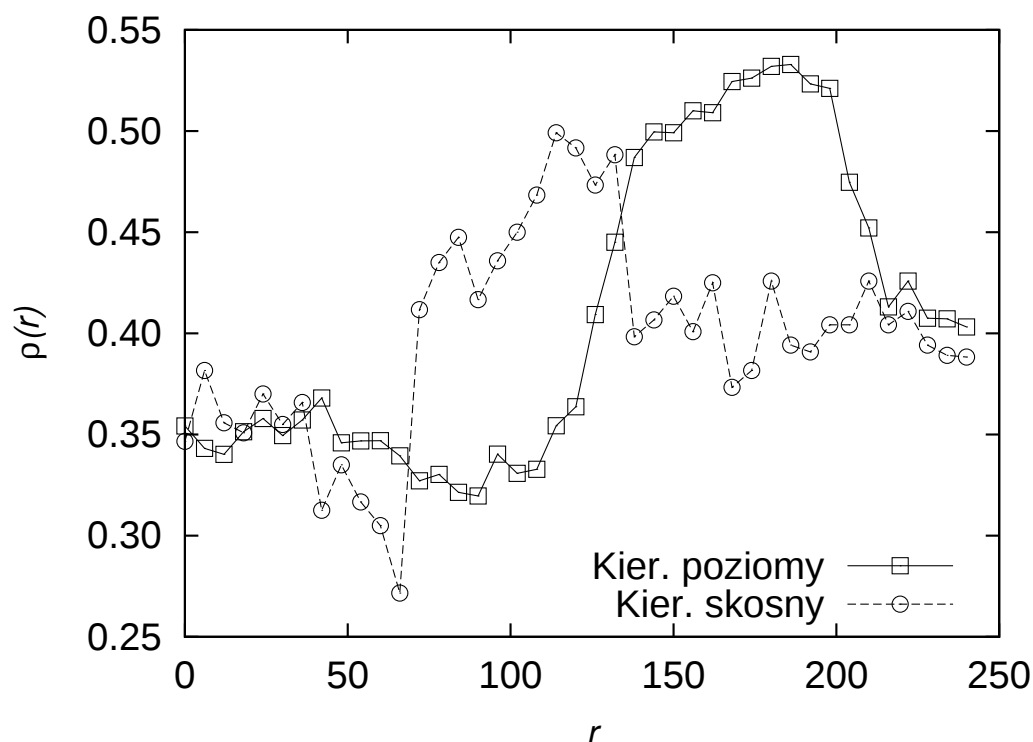
Opisanie modelu HPP na sieci kwadratowej niesie ze sobą konsekwencję w postaci braku izotropowości – fala dźwiękowa porusza się szybciej wzdłuż wektorów sieci.

Rysunek 2.4 ilustruje eksperyment, w którym w układzie o rozmiarze $D = 500 \times 500 j.s.$, wypełnionym płynem opisywanym modelem HPP o gęstości $\rho = 0.4$, utworzono koło gęsto upakowanych cząstek ($\rho = 1$) o promieniu $r = 50 j.s.$. W trakcie ewolucji układu „zagęszczenie” cząstek przemieszcza się tworząc rąb, którego przekątne pokrywają się z wektorami sieci modelu HPP. Na rysunku 2.5 pokazano dodatkowo, jak zmienia się gęstość cząstek w funkcji odległości od środka układu wzdłuż kierunku Ox będącym jednym



Rysunek 2.4: Rozchodzenie się fali dźwiękowej w modelu HPP.

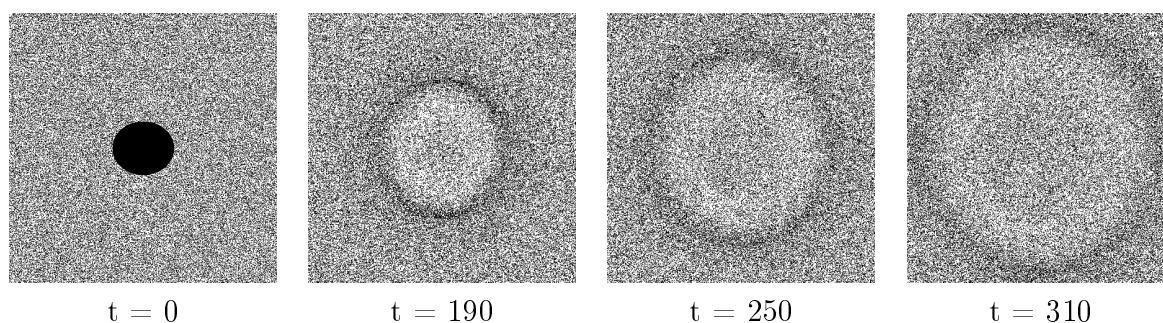
z kierunków sieci modelu oraz kierunku nachylonego o kąt $\alpha = 45^\circ$ do osi Ox . Dane do wykresu pobrano w 200 kroku symulacji. Widać wyraźnie, że maksimum zagęszczenia cząstek porusza się szybciej w kierunku poziomym niż skośnym, zatem preferowanymi kierunkami rozchodzenia się fali dźwiękowej są kierunki sieci użyte w modelu.



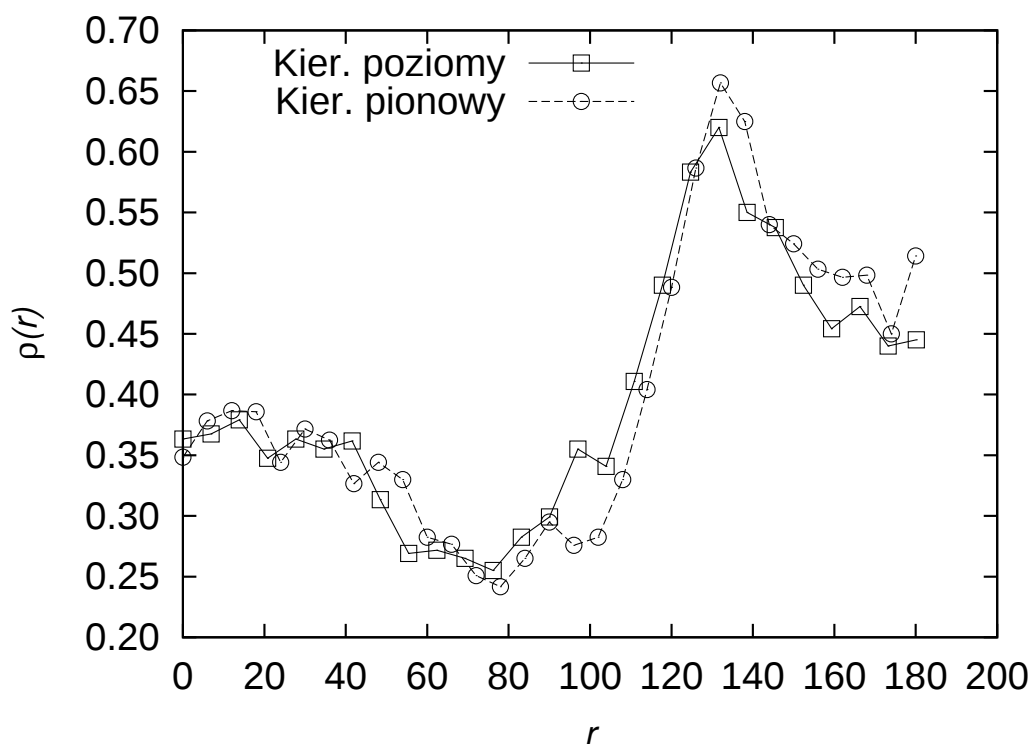
Rysunek 2.5: Zmiana gęstości wraz ze wzrostem odległości od środka układu wzdłuż kierunku poziomego i skośnego dla modelu HPP ($t = 200$).

Kolejnym etapem eksperymentu było sprawdzenie, czy sieć trójkątna zastosowana w modelu FHP-III niweluje opisaną powyżej wadę: ten sam układ, który posłużył do zbadania modelu HPP, został wypełniony płynem z zastosowaniem reguł kolizji FHP-III (gęstość $\rho = 0.4$). Następnie w środku układu utworzono koło cząstek stacjonarnych. Tak jak poprzednio promień koła wynosił $r = 50j.s.$ oraz gęstość zawartych w nim cząstek $\rho = 1$.

Ewolucję układu ilustruje rysunek 2.6: czoło fali powstałej w wyniku oddziaływania zbioru cząstek stacjonarnych z płynem w układzie stanowi okrąg, zatem badając model FHP-III nie można stwierdzić, jakie posiada wektory sieci opierając się tylko na graficznej analizie wyników symulacji. Wykres zmian gęstości wraz z odległością od środka układu został przedstawiony na rysunku 2.7. Badanymi kierunkami były: pion oraz poziom, który jest jednym z kierunków wektorów sieci modelu. Wykres pokazuje, iż gęstość zmienia się jednakowo dla obu kierunków, co potwierdza izotropowość modelu.



Rysunek 2.6: Rozchodzenie się fali dźwiękowej w modelu FHP-III.



Rysunek 2.7: Zmiana gęstości wraz ze wzrostem odległości od środka układu wzdłuż kierunku poziomego (jeden z kierunków sieci modelu) i pionowego dla modelu FHP-III ($t = 200$ krok).

2.4 Przepływ Poiseuille'a

Jednokierunkowy przepływ płynu przez kanał płaski jest jednym z niewielu zagadnień hydrodynamicznych posiadających dokładne rozwiązanie analityczne. Zagadnienie to jest podstawowym testem wielu modeli hydrodynamicznych. Celem testu jest z reguły sprawdzenie poprawności implementacji modelu jak również zbadanie poprawności samego modelu w prostym zagadnieniu fizycznym.

2.4.1 Analityczne rozwiązanie płaskiego przepływu Poiseuille'a

Przepływ nazywamy jednokierunkowym, gdy pole prędkości w takim przepływie ma wyróżniony kierunek (Ox), do którego wektory prędkości są równoległe w każdym punkcie [14]:

$$v_x = v(x, y, z, t), \quad v_y \equiv 0, \quad v_z \equiv 0. \quad (2.3)$$

Założmy ponadto, iż płyn jest nieściśliwy, zatem z warunku ciągłości wynika:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

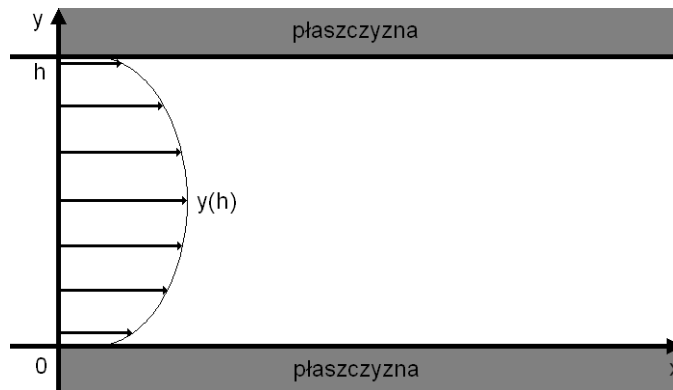
więc:

$$v_x = v(y, z, t). \quad (2.5)$$

Uwzględniając powyższe warunki równanie trójwymiarowe Naviera-Stokesa dla kierunku Ox upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}, \quad (2.6)$$

gdzie ν jest lepkością kinematyczną płynu, ρ gęstością, natomiast dp/dx oznacza gradient ciśnienia wzdłuż kierunku x .



Rysunek 2.8: Przepływ Poiseuille'a przez kanał płaski.

Niech lepki płyn wypełnia obszar pomiędzy dwiema równoległymi płaszczyznami $y_1 = 0$ i $y_2 = h$ - kanał płaski (rys. 2.8). Przepływ płynu w kanale jest ustalony (nie zmienia

się w czasie) i laminarny, tzn. elementy cieczy płynu przemieszczają się w płaszczyznach równoległych do płaszczyzn y_1 i y_2 , zatem $v_x = v(y)$, $v_y \equiv 0$, $v_z \equiv 0$. Przy pominięciu sił masowych przepływ może być wywołany i podtrzymywany poprzez istnienie stałego gradientu ciśnienia $\Delta p/\Delta x$. Równanie Naviera-Stokesa (2.6) przybiera teraz postać:

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad \mu = \nu \cdot \rho \quad (2.7)$$

gdzie μ oznacza lepkość dynamiczną. Ogólne rozwiązanie równania (2.7) przyjmuje postać:

$$v(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (2.8)$$

Uwzględniając warunki brzegowe *bez poślizgu* ($v(0) = 0$ i $v(h) = 0$) możemy obliczyć stałe C_1 i C_2 :

$$C_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} h, \quad C_2 = 0. \quad (2.9)$$

Uzyskany profil prędkości $v(y)$

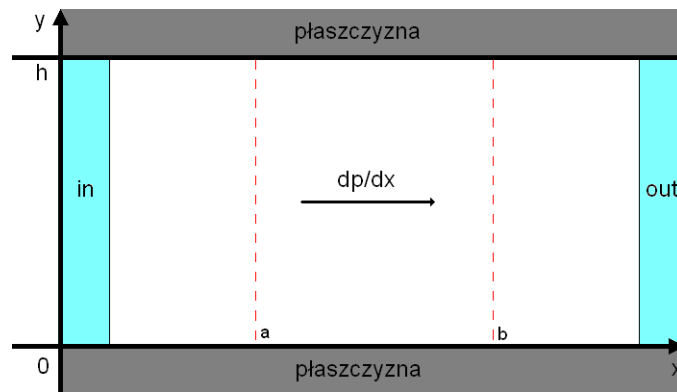
$$v(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x} y(h - y), \quad (2.10)$$

jest paraboliczny.

Otrzymanie profilu prędkości $v(y)$ metodą symulacji komputerowej pozwala na podstawie wzoru (2.10) określić lepkość kinematycznej modelu i porównać ją z wartością wynikającą z równania (1.21).

2.4.2 Symulacja przepływu przez kanał płaski

W celu wykonania symulacji utworzony został kanał o wysokości $L = 84j.s.$ i długości $L' = 480j.s.$ (rys. 2.9).



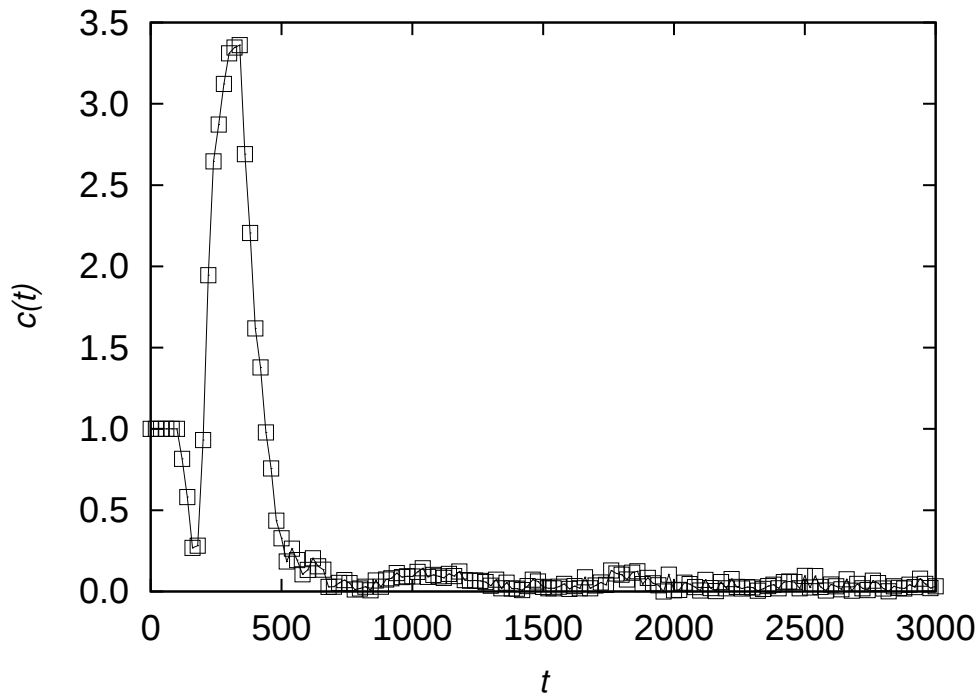
Rysunek 2.9: Kanał płaski. Zaznaczone obszary **in**, **out** przedstawiają kolejno wpływ i wypływ płynu. Linie przerywane (punkty **a** i **b**) określają obszar, w którym dokonywano pomiarów podczas symulacji.

Warunki wpływu i wypływu zrealizowano poprzez utworzenie dwóch podukładów o wymiarach $12 \times 84j.s.$, w których w każdym kroku symulacji ustalano gęstość płynu tak, aby

$\rho_{in} > \rho_{out}$, co wykorzystując wzór (1.21) pozwala określić gradient ciśnienia $\Delta p/\Delta x$ w układzie. Punkty a i b leżące na osi Ox określają obszar o długości $L'_{pomiar} = 240j.s.$, w którym dokonywano pomiarów. Powierzchnię kanału podzielono wzdłuż wysokości na 14 pasów (każdy o wymiarze $240 \times 6j.s.$), dla których obliczano średnią prędkość płynu (1.21). Uśrednienia prędkości dokonywano po upływie 6000 kroków symulacji począwszy od momentu $t_0 = 3000$. Czas t_0 wyznaczono stosując kryterium zbieżności [18]:

$$c(t) = \left| \frac{\sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|}{\sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t + 150)|} - 1 \right| < 10^{-1} \quad (2.11)$$

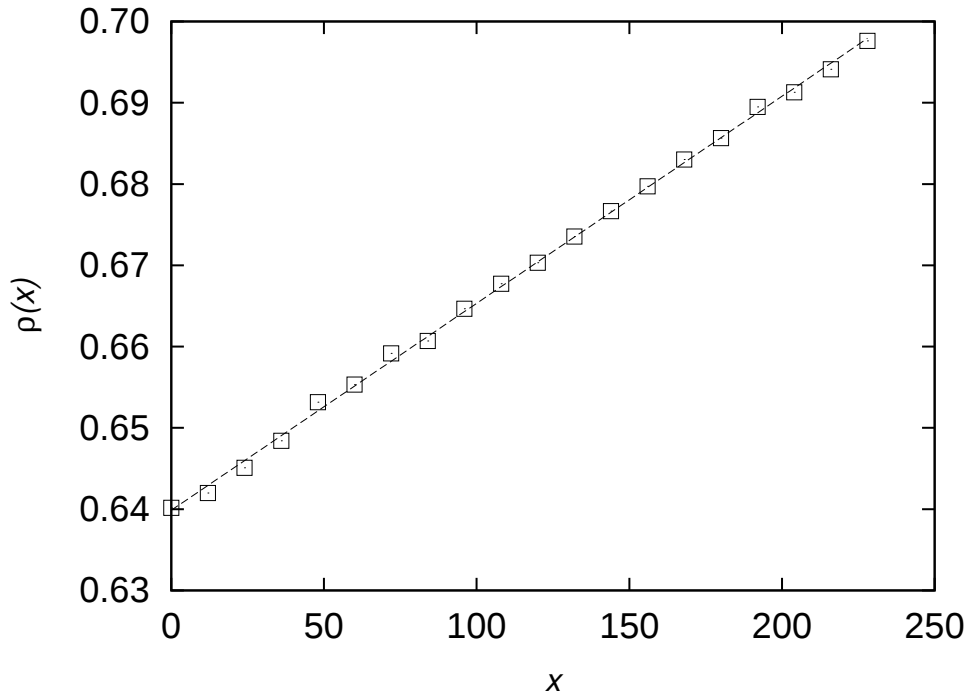
Na rysunku 2.10 widzimy, że funkcja $c(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$. Kryterium zbieżności (2.11) spełnione jest dla $t \geq 3000$.



Rysunek 2.10: Wykres funkcji kryterium zbieżności $c(t)$ dla jednego z przepływów Poiseuille'a. Za punkt osiągnięcia równowagi przez układ wybrano $t_0 = 3000$, gdzie $c(t > t_0) \approx 0$.

Pierwszym etapem symulacji było sprawdzenie, czy zadany poprzez różnicę gęstości gradient ciśnienia jest stały w badanym układzie. Dokonano tego poprzez zbadanie zmiany wartości gęstości cząstek wzdłuż osi Ox . Wykres, wykonany dla gęstości $\rho = 0.669$, przedstawiony na rysunku 2.11 ilustruje, iż zmiana gęstości ma charakter liniowy, zatem gradient ciśnienia jest stały w badanym układzie.

Kolejnym krokiem doświadczenia było otrzymanie profili prędkości płynu wzdłuż szerokości kanału. Wyniki, otrzymane z użyciem różnych gradientów ciśnień dla każdego z przypadków, zostały umieszczone na wspólnym wykresie zależności prędkości płynu od wysokości kanału (rys. 2.12): widać wyraźnie paraboliczny charakter profili prędkości.

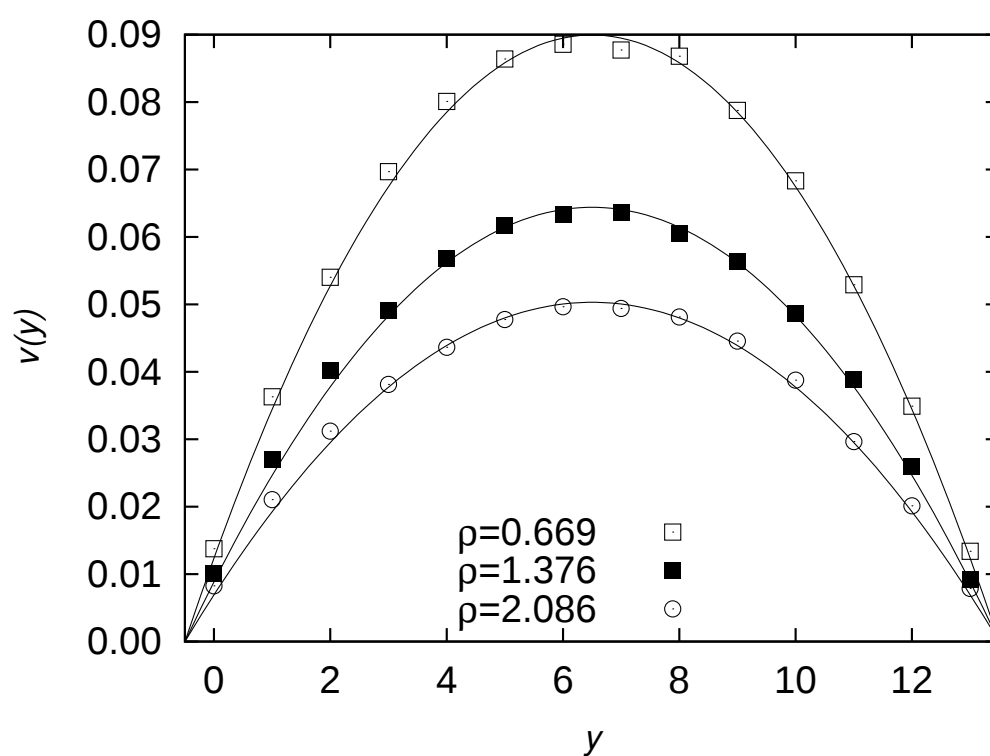


Rysunek 2.11: Wykres zmian gęstości wzdłuż osi Ox badanego układu dla średniej gęstości cząstek $\rho = 0.669$.

Tablica 2.1 przedstawia parametry badanych przepływów, jak również otrzymane wyniki lepkości. Zgodność otrzymanych wartości lepkości kinematycznych z wartościami teoretycznymi (wzór 2.10) przy niepewności względnej $\Delta\nu = |(\nu_{sym} - \nu_{teor})/\nu_{teor}|$ na poziomie $3 \sim 5\%$ pokazuje, że model został poprawnie zaimplementowany.

ρ	$\Delta p/\Delta x$	ν_{sim}	ν_{teor}	$\Delta\nu$
0.669	$7.9 \cdot 10^{-4}$	0.320	0.334	0.042
1.376	$5.6 \cdot 10^{-4}$	0.156	0.151	0.033
2.086	$4.5 \cdot 10^{-4}$	0.104	0.099	0.051

Tablica 2.1: Wartości parametrów (ρ - średnia gęstość cząstek, d - średnia gęstość na kierunku, $\Delta p/\Delta x$ - gradient ciśnienia) użytych w symulacji.



Rysunek 2.12: Profile prędkości przepływu Poiseuille'a. Wykres ilustruje ich paraboliczny charakter dla trzech badanych wartości gęstości cząstek.

Rozdział 3

Przepływ przez ośrodki porowate i prawo Darcy’ego

3.1 Wstęp

W 1896 roku H. Darcy badał przepływ wody przez pionowe filtry wypełnione piaskiem będące elementami fontann wybudowanych w mieście Dijon we Francji. Na podstawie swoich eksperymentów stwierdził, iż tempo przepływu (objętość cieczy w jednostce czasu) Q jest proporcjonalne do powierzchni przekroju A badanego filtra i gradientu ciśnienia ∇P , odpowiedzialnego za ten przepływ:

$$Q = -KA\nabla P, \quad (3.1)$$

gdzie stała proporcjonalności K nazywana jest współczynnikiem *przewodnictwa hydrodynamicznego*. Średnią prędkość płynu przepływającego przez substancję porowatą możemy wyrazić jako:

$$v = \frac{Q}{\phi A} = \frac{q}{\phi} = -\frac{K}{\phi}\nabla P, \quad (3.2)$$

gdzie q oznacza strumień przepływu, a ϕ jest współczynnikiem porowatości. Porowatość obliczamy ze wzoru:

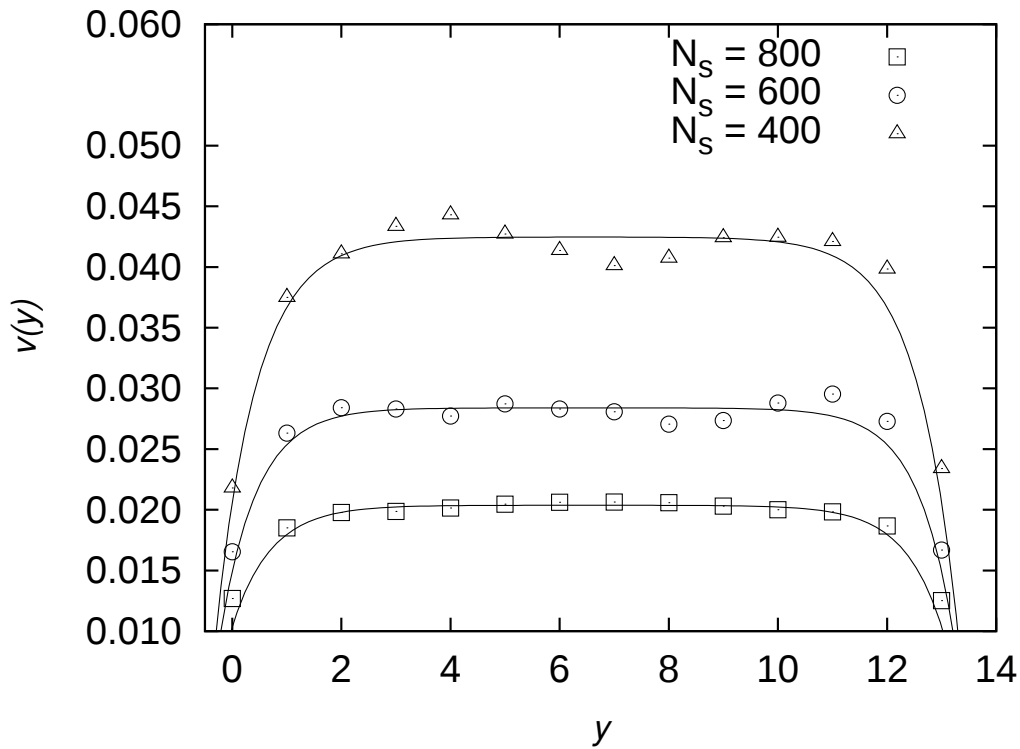
$$\phi = \frac{V_p}{V_u} = 1 - \frac{V_r}{V_u}, \quad (3.3)$$

gdzie V_p oznacza całkowitą objętość (powierzchnie w przypadku dwuwymiarowym) porów, V_r - objętość przeszkód oraz V_u - objętość badanego układu. Równania (3.1) i (3.2) nazywamy *prawem Darcy’ego* [12][18].

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie, że prawo Darcy’ego jest spełnione dla przepływu płynu opisanego modelem FHP-III przez substancję porowatą. Realizacja eksperymentalnego dowodu zostanie przeprowadzona w dwóch etapach: w pierwszym powtórzone zostanie doświadczenie K. Balasubramaniana, F. Hayota i W. F. Saama, w którym pokazano wpływ rozpraszaczy w układzie na profil Poiseuille’a, natomiast w drugim etapie zostanie pokazany jawny wpływ zmiany gradientu ciśnienia na średnią prędkość płynu.

3.2 Przepływ Poiseuille’a w układzie z rozpraszaczami

W doświadczeniu mającym na celu pokazanie, że jest możliwe wyprowadzenie dla modelu FHP-III prawa Darcy’ego, powtórzono symulację przepływu płynu przez kanał płaski umieszczając na drodze płynu przeszkody w postaci pojedynczych cząstek materii. Kontakt cząstki płynu z przeszkodą ogranicza się do zmiany kierunku prędkości cząstki na przeciwny (warunek brzegowy *bez poślizgu*). W badanym układzie umieszczono losowo $N_s = 400, 600$ oraz 800 przeszkód, co stanowi kolejno 2%, 3% i 4% powierzchni kanału. Profile prędkości przepływu (rys. 3.1) zostały otrzymane poprzez uśrednienie wyników z 30 symulacji z różnym rozstawieniem przeszkód przy stałym gradientie ciśnienia $\nabla P = 3,22 \cdot 10^{-2}$.



Rysunek 3.1: Profil prędkości w kanale z przeszkodami.

Widzimy, że wraz ze wzrostem liczby rozpraszaczy profil Poiseuille’a ulega spłaszczeniu. Balasubramanian, Hayot i Saam zaproponowali rozwiązanie równania Naviera–Stokesa, które opisują przedstawioną zależność funkcji prędkości płynu od wysokości kanału [BAL]:

$$v(y) = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \left[1 - \frac{\cosh[r(y - L/2)]}{\cosh[rL/2]} \right] \quad (3.4)$$

gdzie stała α jest wprost proporcjonalna do gęstości rozpraszaczy ($\alpha = 2\rho_s$) i $r = \sqrt{\alpha/\nu}$. Gdy α zmierza do zera, funkcja prędkości (3.4) redukuje się do wzoru (3.2).

Uzyskany profil prędkości dla $N_s = 800$ rozpraszaczy nie jest płaski tylko w obszarach leżących przy powierzchniach ograniczających kanał. W pozostałym obszarze prędkość

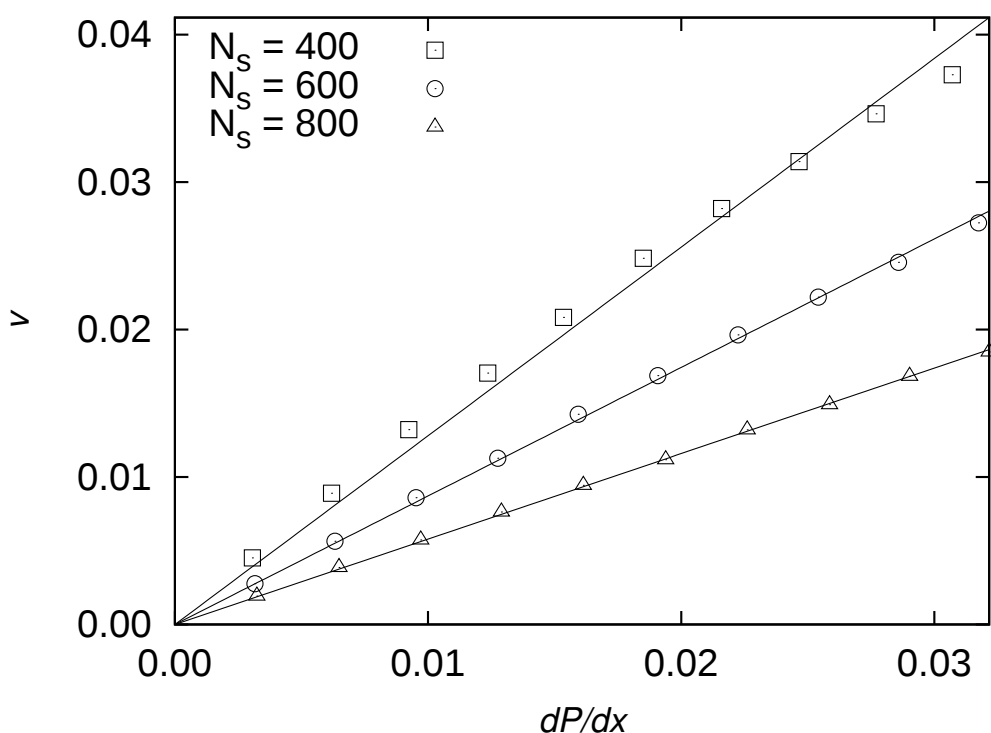
cieczy jest stała i wyraża się wzorem:

$$v(y) = -\frac{1}{\rho\alpha} \frac{\Delta p}{\Delta x}, \quad (3.5)$$

jest zatem proporcjonalna tylko do gradientu ciśnienia ∇P i współczynnika $K/\phi = 1/\rho\alpha$, co stanowi treść prawa Darcy'ego (3.2).

3.3 Zależność średniej prędkości cieczy od przyłożonego gradientu ciśnienia w ośrodku porowatym

Wzór (3.5) opisuje liniową zależność prędkości cieczy przepływającej przez substancję porowatą od wartości gradientu ciśnienia. W celu zbadania tej zależności dla płynu opisanego modelem FHP-III, po raz kolejny zostało powtórzone doświadczenie przepływu cieczy przez kanał płaski. Dla zadanej liczby rozpraszaczy ($N_s = 400, 600$ i 800) w układzie, zmierzono wartości średniej prędkości płynu v dla gradientu ciśnienia ∇P z przedziału od $0.3 \cdot 10^{-2}$ do $0.3 \cdot 10^{-1}$. Rysunek 3.2 przedstawia otrzymane charakterystyki.



Rysunek 3.2: Linowa zależność średniej prędkości cieczy od wartości gradientu ciśnienia.

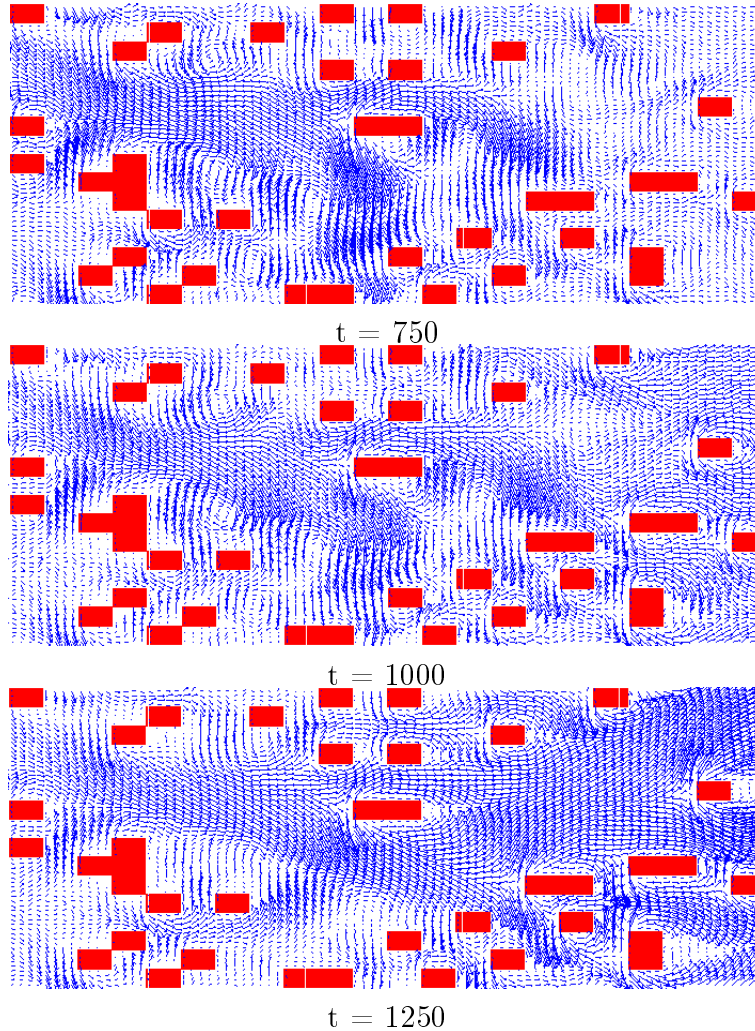
Zgodnie z oczekiwaniami średnia prędkość płynu rośnie w sposób liniowy wraz ze wzrostem gradientu ciśnienia. Zauważamy również, że szybkość zmiany prędkości zależy od ilości występujących w układzie rozpraszaczy. Tablica 3.1 przedstawia otrzymane wartości współczynników prawa Darcy'ego.

N_s	K/ϕ	ϕ	K
400	1.28	0.98	1.25
600	0.87	0.97	0.85
800	0.58	0.96	0.56

Tablica 3.1: Wartości współczynników prawa Darcy’ego w zależności od liczby rozpraszczy.

3.4 Wizualizacja przepływu przez materiał porowaty

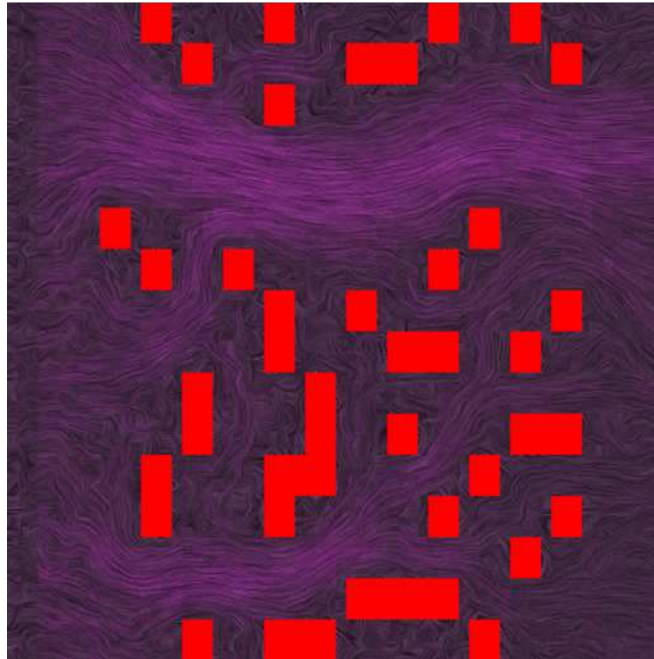
W układzie o rozmiarze $256 \times 256 j.s.$ umieszczono losowo kwadratowe przeszkody o długości boku $a = 16 j.s.$ w taki sposób, że porowatość układu wyniosła $\phi = 85\%$. Przez tak zdefiniowany układ przepuszczono płyn opisany modelem FHP-III o prędkości zadanej gradientem ciśnienia $\nabla P = 2,8 \cdot 10^{-3}$.



Rysunek 3.3: Przepływ płynu opisanego modelem FHP-III przez makroskopowy materiał porowaty. Ciecz płynie z prawej strony do lewej. Ciemniejszy kolor oznacza większą prędkość płynu.

Na rysunku 3.4 widzimy etapy powstawania preferowanych przez ciecz kanałów przepływu.

W czasie $t = 1250$ następuje równowaga hydrodynamiczna – powstałe kanały nie zmieniają się w czasie. Użyta metoda wizualizacji (przedstawianie wektorów prędkości jako strzałki o długości proporcjonalnej do szybkości cieczy) pozwala określić miejsca, w których ciecz płynie wolniej bądź szybciej. Użycie bardziej wyrafinowanych sposobów wizualizacji np. metody *Line Integral Convolution* (opisanej w Dodatku B) umożliwia zaobserwowanie linii prądów płynu oraz towarzyszących przepływowi wirów. Rysunek 3.4 przedstawia przykład wizualizacji przepływu metodą LIC. Zauważamy powstanie dwóch wyraźnych kanałów przepływu, w których ciecz płynie szybciej (kolor jaśniejszy).



Rysunek 3.4: Wizualizacja przepływu płynu z wykorzystaniem metody LIC. Kolor jaśniejszy oznacza większą prędkość przepływu.

Przedstawione w tej sekcji (jak również w pozostałych częściach pracy) ilustrację przepływu zostały otrzymane w autorskich programach komputerowych pisanych w języku C# przy pomocy bibliotek .NET 2.0, Tao OpenGL i środowiska programistycznego Visual Studio .NET 2005 firmy Microsoft.

Rozdział 4

Podsumowanie

Celem zaprezentowanej pracy było przedstawienie idei modelu gazu sieciowego (rozdział pierwszy) oraz pokazanie praktycznych możliwości tej teorii na przykładzie modelu FHP-III (rozdział drugi i trzeci).

Podczas badania zjawiska wyrównywania ciśnienia w układzie okazało się, że proces ten można opisać funkcją eksponencjalną, co umożliwiło obliczenie czasu relaksacji ciśnienia. Porównując otrzymany rezultat z analogicznym wynikiem uzyskanym dla modelu FHP-I (posiadającego skromniejszy zbiór reguł kolizji) okazało się, że ciśnienie w modelu FHP-III wolniej dochodzi do stanu równowagi.

Badając rozchodzenie się fali dźwiękowej w płynach opisywanych kolejno modelami HPP i FHP pokazano, że sieć trójkątna w przeciwieństwie do kwadratowej (przy regułach kolizji dotyczących tylko najbliższych sąsiadów) zapewnia izotropowość modelu. Wynik ten osiągnięto poprzez zbadanie zależności średniej gęstości cząstek w funkcji odległości od epicentrum fali dźwiękowej dla obu badanych modeli.

Podczas symulowania płaskiego przepływu Poiseuille’a udało się pokazać, że gęstość (oraz ciśnienie) cieczy, której przepływ jest wynikiem przyłożonego gradientu ciśnienia, zmienia się liniowo wzdłuż długości kanału. Otrzymane podczas eksperymentu wartości lepkości kinematycznej nie odbiegały od wartości analitycznych wynikających ze wzoru (1.21), co potwierdziło nie tylko poprawną implementację modelu, ale również zdolność modelu FHP-III do symulowania pewnych hydrodynamicznych zjawisk fizycznych.

Ostatecznie w rozdziale trzecim pokazano, że symulowane modelem FHP-III przepływu płynu przez substancje porowate spełniają prawo Darcy’ego.

W opisanych powyżej doświadczeniach ani razu nie istniała potrzeba numerycznego rozwiązywania równań Naviera-Stokesa – wszystkie wyniki uzyskano stosując model automatu komórkowego, którego ewolucja (jak to opisano w rozdziale pierwszym) opiera się na dyskretnym zbiorze reguł spełniających tylko pewne z góry określone założenia. Jest to niewątpliwie dowód na to, że idea von Neumanna wprowadziła nową jakość i metody opisu rzeczywistości, w których podstawowym dogmatem jest prostota definicji. Zaletą modelu FHP-III nie jest to, że istnieje dla niego pewien obszar zastosowań, lecz fakt iż jest punktem wyjścia do innych, lepiej opisujących rzeczywistość modeli - lecz to już jest temat na kolejną pracę...

Dodatek A

Algorytm modelu FHP-III

A.1 Algorytm modelu LGCA

Ewolucję [7] ξ w modelu gazu sieciowego możemy zapisać w postaci złożenia dwóch operatorów: kolizji ζ i przesunięcia ϕ . Lokalnie kolizja dotyczy tylko cząstek gazu zmierzających do wspólnego węzła, natomiast przesunięcie odpowiada za zmianę stanu wszystkich najbliższych sąsiadów (NN - Nearest Neighbour) danego węzła:

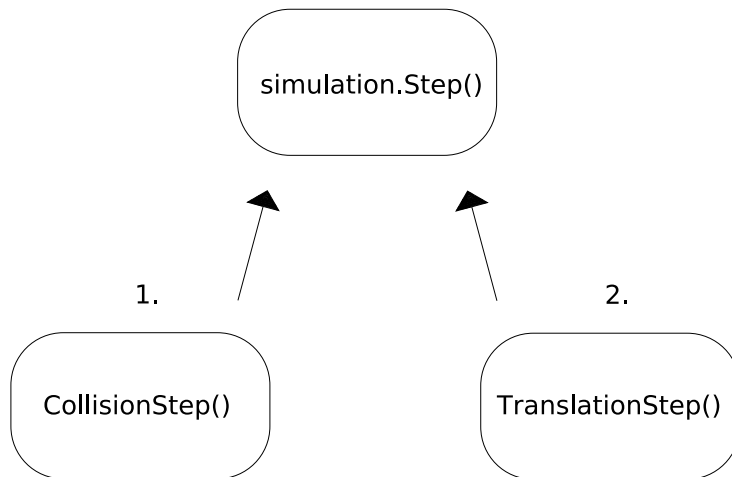
$$\xi = \phi \circ \zeta. \quad (\text{A.1})$$

Dwukrotne zadziałanie operatorem ζ na węzeł nie powoduje zmiany jego stanu:

$$\zeta^2 = I. \quad (\text{A.2})$$

gdzie I jest operatorem tożsamości.

Możliwość rozłożenia operatora ewolucji na elementy składowe (A.1) pozwala na użycie tej samej idei w implementacji gazu sieciowego: metoda odpowiedzialna za wykonanie kroku czasowego automatu powoduje wywołanie dwóch pod-metod odpowiedzialnych kolejno za kolizję i przesunięcie, z których każda zmienia stan wszystkich komórek w układzie (rys. A.1).



Rysunek A.1: Diagram metody odpowiedzialnej za ewolucję modelu.

Model gazu sieciowego reprezentuje stany swoich węzłów w postaci etykiet (liczb całkowitych), zatem operatory kolizji i przesunięcia ograniczają się tylko do zmiany tych liczb.

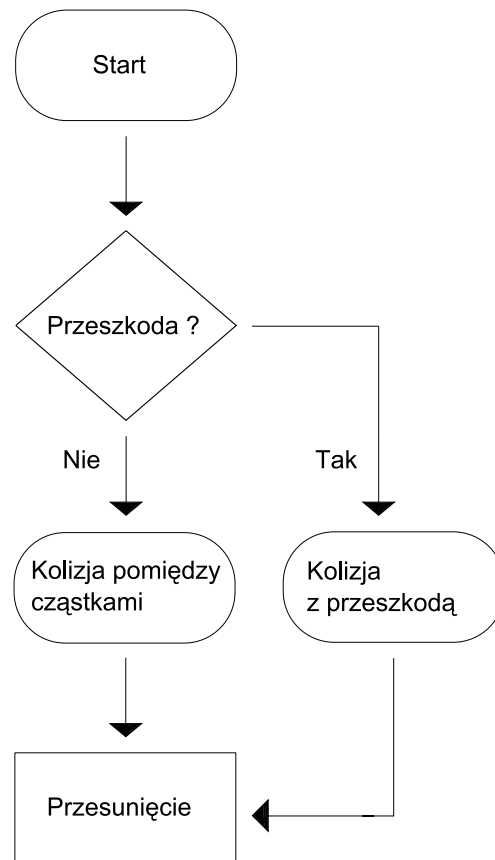
Reguły kolizji charakterystyczne dla każdego rodzaju gazu LGCA zapamiętywane są w tablicy liczb całkowitych $C[]$, która każdemu indeksowi (wartość węzła przed kolizją) przypisuje nową wartość wynikającą bezpośrednio z zasad kolizji (w przypadku gdy kolizja nie zachodzi, tablica zwraca wartość indeksu):

$$C[n(\mathbf{x})] = n(\mathbf{x}) + \Delta. \quad (\text{A.3})$$

W przypadku, gdy wynikiem kolizji jest jeden z dwóch równoprawdopodobnych stanów (FHP-II, FHP-III), stosuje się tablicę dwuwymiarową o dwóch wierszach, z których każdy zawiera osobne definicje reguł. Przypisanie nowej wartości do węzła poprzedzone jest losowaniem numeru wiersza:

$$\begin{aligned} r &= \text{Random}(0, 1) \\ C[r, n(\mathbf{x})] &= n(\mathbf{x}) + \Delta[r]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Powyższe operacje wykonują się tylko wtedy, gdy wybrany węzeł nie jest zdefiniowany jako przeszkoda. W przeciwnym wypadku nowy stan węzła określany jest na podstawie warunków brzegowych (z *poślizgiem*, *bez poślizgu* lub innych) - rys. A.2.



Rysunek A.2: Algorytm kolizji.

Operator translacji przesuwa cząstkę z danego węzła do najbliższego sąsiada wzdłuż wektora prędkości tej cząstki. Zadanie to realizuje się poprzez zastosowanie operatorów bitowych $|$ i $\&$ dla każdego najbliższego sąsiada:

$$n(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k) \mid = (2^k \& n(\mathbf{x})) \quad (\text{A.5})$$

gdzie $k = 0, \dots, NN - 1$.

A.2 Kod źródłowy modelu gazu sieciowego FHP-III

Poniższe fragmenty kodu zostały napisane w języku C# i nie stanowią samodzielnej aplikacji. Przedstawiona implementacja klasy dla modelu FHP-III nie uwzględnia m.in warunków początkowych oraz cyklicznych warunków brzegowych.

```
private int NodesTable[ , ]; //tablica węzłów automatu komórkowego
private int BoundryTable[ , ]; //tablica przeszkód
private Random rand = new Random(); //generator liczb losowych
private int[ , ] C = { //tablica z regułami kolizji
{
0, 1, 2, 3, 4, 66, 6, 7, 8, 36, 68, 38, 12, 74, 14, 15,
16, 96, 9, 98, 72, 42, 13, 102, 24, 52, 84, 45, 28, 90, 30, 110,
32, 33, 65, 35, 18, 19, 69, 39, 80, 81, 21, 83, 26, 54, 77, 87,
48, 49, 41, 51, 104, 105, 27, 107, 56, 57, 116, 117, 60, 122, 93, 63,
64, 34, 5, 67, 10, 11, 70, 71, 20, 100, 22, 23, 76, 86, 78, 79,
40, 50, 73, 101, 44, 106, 46, 47, 88, 58, 108, 109, 92, 62, 94, 95,
17, 97, 37, 99, 82, 43, 75, 103, 25, 114, 85, 55, 29, 118, 31, 111,
112, 113, 53, 115, 89, 59, 91, 119, 120, 121, 61, 123, 124, 125, 126, 127
},
{
0, 1, 2, 3, 4, 66, 6, 7, 8, 18, 68, 69, 12, 22, 14, 15,
16, 96, 36, 37, 72, 42, 74, 75, 24, 104, 44, 54, 28, 108, 30, 110,
32, 33, 65, 35, 9, 98, 11, 39, 80, 50, 21, 101, 84, 27, 86, 87,
48, 49, 81, 51, 25, 114, 45, 107, 56, 57, 89, 117, 60, 122, 93, 63,
64, 34, 5, 67, 10, 38, 70, 71, 20, 82, 13, 102, 76, 46, 78, 79,
40, 41, 100, 43, 26, 106, 77, 47, 88, 116, 29, 118, 92, 62, 94, 95,
17, 97, 19, 99, 73, 83, 23, 103, 52, 53, 85, 55, 90, 91, 31, 111,
112, 113, 105, 115, 58, 59, 109, 119, 120, 121, 61, 123, 124, 125, 126, 127
}
};
```

W powyższym listingu przedstawiono jawną postać tablicy kolizji C . Zakładamy, że tablice zawierające węzły automaty ($NodesTable$) i przeszkody ($BoundryTable$) są już wypełnione.

```
public void EvolutionCollisionStep() //operator kolizji
{
var afterCollision = new int[GasSize.Width, GasSize.Height];

for (var i = 0; i < GasSize.Width; i++)
{
for (var j = 0; j < GasSize.Height; j++)
{
if (BoundryTable[i, j] == 0) //kolizja cząstek
afterCollision[i, j] = C[rand.Next(2), NodesTable[i, j]];

else //kolizja z przeszkodą (bez poślizgu)
{
afterCollision[i, j] |= ((1 & NodesTable[i, j]) << 3);
}
}
}
}
```

```

        afterCollision[i, j] |= ((2 & NodesTable[i, j]) << 3);
        afterCollision[i, j] |= ((4 & NodesTable[i, j]) << 3);
        afterCollision[i, j] |= ((8 & NodesTable[i, j]) >> 3);
        afterCollision[i, j] |= ((16 & NodesTable[i, j]) >> 3);
        afterCollision[i, j] |= ((32 & NodesTable[i, j]) >> 3);
    }
}
}
NodesTable = afterCollision;
}

```

Metoda *EvolutionCollisionStep* jest odpowiedzialna za kolizję cząstek z przeszkodami jak również z innymi cząstkami. Dla każdego węzła obliczany jest nowy stan, który zapisywany jest w tablicy tymczasowej *afterCollision*. Po uaktualnieniu stanów wszystkich węzłów zawartość tablicy tymczasowej staje się zawartością tablicy węzłów automatu komórkowego.

```

public void EvolutionTranslationStep() //operator przesunięcia
{
    var afterTranslation = new int[GasSize.Width, GasSize.Height];
    var boundryTable = BoundryTable;
    for (var i = 0; i < GasSize.Width; i++)
    {
        for (var j = 0; j < GasSize.Height; j++)
        {
            //dla każdego najbliższego sąsiada:
            var z = (j - 1) % 2;
            afterTranslation[i + z, j + 1] |= (1 & NodesTable[i, j]);
            afterTranslation[i + 1, j] |= (2 & NodesTable[i, j]);
            afterTranslation[i + z, j - 1] |= (4 & NodesTable[i, j]);
            afterTranslation[i - 1 + z, j - 1] |= (8 & NodesTable[i, j]);
            afterTranslation[i - 1, j] |= (16 & NodesTable[i, j]);
            afterTranslation[i - 1 + z, j + 1] |= (32 & NodesTable[i, j]);
            afterTranslation[i, j] |= (64 & NodesTable[i, j]);
        }
    }
    NodesTable = afterTranslation;
}

```

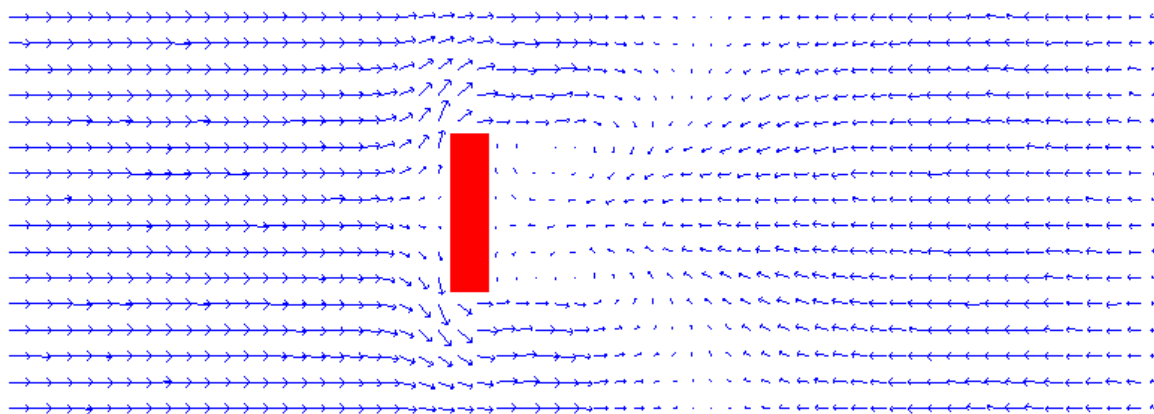
Przesunięcie cząstek gazu sieciowego realizowane jest w metodzie *EvolutionTranslationStep*. Dla każdego węzła o indeksach i, j aktualizowane są stany jego sześciu sąsiadów oraz jego samego. Zadaniem zmiennej z jest umożliwienie wskazania sąsiadów wzdłuż wektorów sieci trójkątnej automatu komórkowego.

Dodatek B

Wizualizacja pól wektorowych

B.1 Wizualizacja pól wektorowych metodą Line Integral Convolution

Symulacje komputerowe przepływu płynów charakteryzują się tym, że bardzo często wynikami końcowymi (lub pośrednimi) są pola skalarne (np. gęstości, ciśnienia) i wektorowe (pola prędkości). Jednym z najprostszych sposobów wizualizacji pól skalarnych jest reprezentacja każdej wartości w postaci koloru, którego nasycenie zależy wprost od tej wartości. W przypadku pól wektorowych problem jest bardziej skomplikowany: oprócz wartości długości wektora należy pokazać również jego nachylenie. Można tego dokonać poprzez zilustrowanie pola wektorowego jako zbiór strzałek, z których każda przyporządkowana jest jednemu wektorowi z pola (rys. B.1).



Rysunek B.1: Wizualizacja pola wektorowego za pomocą strzałek. Obraz przedstawia przeszkodę opływaną przez ciecz z dwóch kierunków.

W przypadku zastosowania powyższej metody do graficznej reprezentacji pól prędkości płynu pojawia się pewne, istotne ograniczenie: niemożliwe jest zilustrowanie strug płynu.

Metoda Line Integral Convolution (LIC) została zaprezentowana przez B. Cabral'a i L. Leedom'a w 1993 roku . Ze względu na swoją efektywność i jakość otrzymywanych obrazów bardzo szybko znalazła swoje miejsce w wizualizacji wyników naukowych [15].

B.1.1 Algorytm LIC

Na podstawie pola wektorowego V i funkcji szumu T (losowej tekstury w postaci bitmapy) LIC generuje obrazy przedstawiające krzywe, które w każdym punkcie ilustrują kierunki wektorów z pola.

Algorytm metody polega na obliczeniu nasycenia (lub wartości jednej ze składowej RGB) koloru dla każdego wektora z pola według następującego wzoru:

$$I(x_0) = \int_{s_0-L}^{s_0+L} k(s-s_0)T(\sigma(s))ds \quad (\text{B.1})$$

Funkcja $\sigma(s)$ reprezentuje strugę płynu sparametryzowaną miarą łukową s . Wartości $\sigma(s)$ wyznacza się bezpośrednio z pola wektorowego V stosując aproksymację, bądź metody całkujące (np. Runge-Kutta) [16][17]. Punkt $x_0 = \sigma(s_0)$, L jest połową długości drogi całkowania, natomiast funkcja k jest znormalizowaną (B.2) wagą (funkcją filtru).

$$\int_{s_0-L}^{s_0+L} k(s-s_0)ds = 1 \quad (\text{B.2})$$

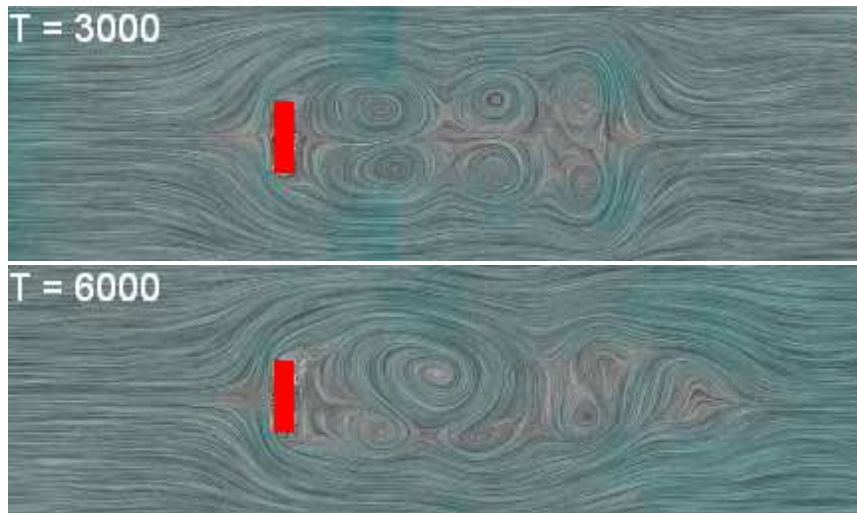
Całka (B.1) może być uproszczona do postaci dyskretniej:

$$I(x_0) = \sum_{i=-n}^n k_i T(x_i), \quad x_i = \sigma(s_0 + ih_t) \quad (\text{B.3})$$

Wartość h_t reprezentuje odległość pomiędzy dwoma punktami pomiarowymi. Analizując granice sumowania stwierdzamy, że liczba punktów, które muszą zostać uwzględnione dla jednej wartości x_0 , wynosi $2n + 1$. Funkcja filtrująca została wybrana w następującej postaci:

$$k_i = \frac{1}{2n+1}, \quad \sum_{i=-n}^n k_i = 1 \quad (\text{B.4})$$

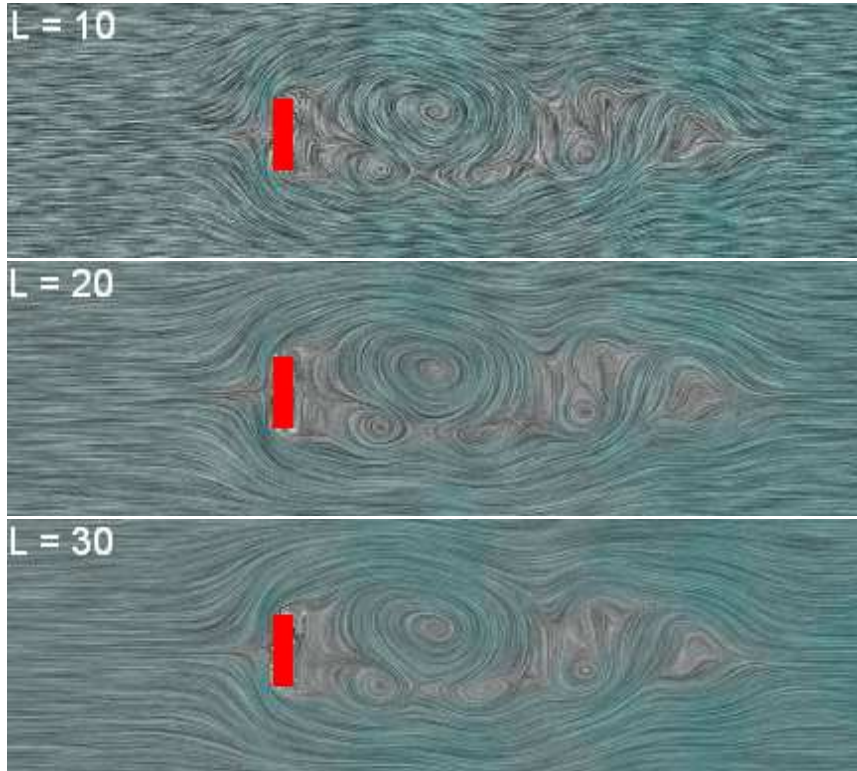
W literaturze wzór (B.4) nosi nazwę Uniform Weighted Function (UWF). Rysunek B.2 przedstawia przykładowe wizualizację pól wektorowych, otrzymanych podczas analizy modelu gazu sieciowego FHP-III.





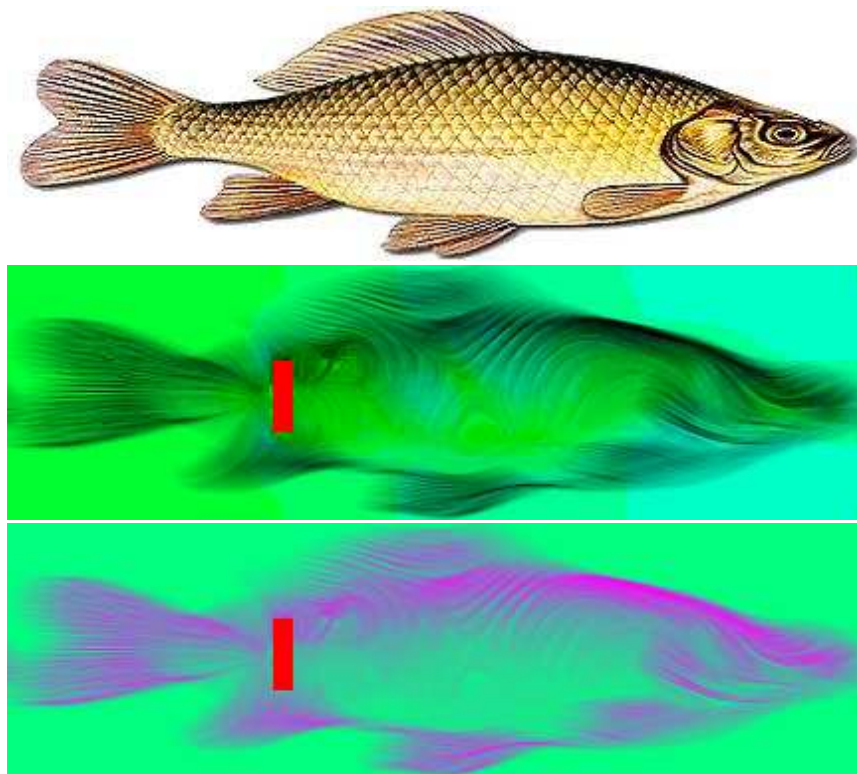
Rysunek B.2: Wizualizacja pól prędkości płynu FHP-III za pomocą algorytmu LIC. Rozmiar układu wynosi $3056 \times 1024LU$, rozmiar przeszkody $96 \times 288LU$ średnia gęstość $\rho = 1.32$, gradient ciśnienia $\Delta p / \Delta x = 1.1 \cdot 10^{-4}$, długość krzywej całkowania $L = 30$. Dane do rysunków pobrano w 3000, 6000, i 9000 kroku symulacji.

Na rysunku B.3 został przedstawiony wpływ długości krzywej prądu L dla całki (B.1); wraz ze zwiększaniem się długości krzywej linie prądu stają się bardziej wyraźne.



Rysunek B.3: Wizualizacja przepływu płynu

Wizualizacja pól wektorowych nie jest jedynym zastosowaniem metody LIC: użycie dowolnej bitmapy jako funkcji szumu T w równaniu (B.1) spowoduje zniekształcenie wejściowego obrazu wzdłuż linii prądu wejściowego pola wektorowego. To „odwrotne” użycie LIC jest wykorzystywane w grafice komputerowej [15]; dzięki tej metodzie możliwe jest uzyskiwanie efektów rozmycia obrazu, ruchu, braku ostrości. Rysunek B.4 przedstawia modyfikację obrazu ryby [19] za pomocą pola wektorowego otrzymanego dla przepływu płynu symulowanego modelem FHP-III.



Rysunek B.4: Przykłady modyfikacji bitmapy za pomocą pola wektorowego prędkości płynu. Uzyskane modyfikacje obrazu ryby zostały otrzymane poprzez zastosowanie wzoru (B.1) dla natężenia różnych składowych RGB. $T = 6000$ i $L = 30$ dla pola wektorowego.

Bibliografia

- [1] B. Chopard, P. Luthi, A. Masselot *Cellular Automata and Lattice Boltzmann Techniques: An Approach to Model and Simulate Complex Systems*
- [2] H. O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe *Granice Chaosu Fraktale*, część 2
- [3] B. Chopard, M. Droz *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*
- [4] S. Wolfram *A New Kind Of Science*
- [5] C. Lamaitre, C. A. Reyes, J. A. Gonzalez *Advances in Artificial Intelligence*
- [6] C. Adami, R. K. Belew, H. Kitano, C. E. Taylor *Artificial Life VI*
- [7] D. A. Wolf-Gladrow *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*
- [8] J. M. Buick *Lattice Boltzmann Methods in Interfacial Wave Modelling*
- [9] U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau *Lattice Gas Automata for the Navier-Stokes Equation*, Physical Review Letters vol. 56
- [10] J. M. Buick, C. A. Greated *Investigation of a lattice gas model for surface gravity waves*
- [11] K. Balasubramanian, F. Hayot, W. F. Saam *Darcy's Law from lattice-gas hydrodynamics*, Physical Review A, vol. 36
- [12] L. D. Landau, E. M. Lifszyc *Hydrodynamika*
- [13] W. Haase, S. Wróbel *Relaxation Phenomena*
- [14] R. Gryboś *Podstawy mechaniki płynów*, część 1 i 2
- [15] C.-M. Wang, J.-S. Lee *Using ILIC algorithm for an impressionist effect and stylized virtual environments*
- [16] B. Cabral, L. C. Leedom *Imaging vector fields using line integral convolution*
- [17] D. Stalling *Fast Texture-Based Algorithms for Vector Field Visualization*
- [18] C. Pan, M. Hilpert, C. T. Miller *Pore-scale modeling of saturated permeabilities in random sphere packings*
- [19] http://www.zasadki.pl/ryby%20image/ryba_karas_m.jpg (data korzystania ze strony: czerwiec 2008).