

UNIwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Teoretycznej



Wiktoria Saramak

**Funkcja rozkładu prędkości w przepływie płynu
przez dywan Sierpińskiego**

**Velocity distribution function of the fluid flow
through Sierpinski carpet**

Praca Magisterska

Opiekun
dr hab. Maciej Matyka

Wrocław 2018

Spis treści

1	Gaz sieciowy Boltzmanna	5
1.1	Historia	5
1.2	Teoria kinetyczna	6
1.2.1	Funkcja rozkładu	6
1.2.2	Równanie transportu	6
1.2.3	Przybliżenie BGK	6
1.3	Model D2Q9	7
1.3.1	Wartości makroskopowe	8
1.3.2	Warunki brzegowe i algorytm	9
1.3.3	Walidacja kodu numerycznego	9
2	Funkcja rozkładu prędkości	12
2.1	Ośrodki porowate	12
2.2	Rozkład wykładniczy w układach losowych	14
3	Fraktale w ośrodkach porowatych	17
3.1	Dywan Sierpińskiego	17
3.2	Symulacje i wyniki	19
4	Podsumowanie	25

Streszczenie

Geometrie fraktalne odgrywają dużą rolę w nauce i technice, ze względu na swoje cechy strukturalne. Niniejsza praca ma na celu zbadać, w jaki sposób zachowują się płyny w takich strukturach i określić wpływ geometrii na rozkład pola prędkości cieczy. Dotychczasowe badania poświęcone przepływowi ukazały wiele wzajemnie sprzecznych hipotez dotyczących zależności pomiędzy geometrią układu, a rozkładem prędkości. W jednej z prac przedstawione zostało kryterium, zgodnie z którym w układach losowych rozkład prędkości można opisać za pomocą rozkładu potęgowo-wykładniczego (Phys. Rev. E 93, 013110 (2016)). W mojej pracy magisterskiej szukam podobnej zależności, ale w układach fraktalnych.

W pierwszym rozdziale przedstawiam charakterystykę modelu przepływu płynu - gazu sieciowego Boltzmannna. Następnie, w rozdziale drugim, opisuję stan wiedzy na temat funkcji rozkładu prędkości w ośrodkach porowatych oraz relacjonuję wyniki dotyczące zgodności rozkładu prędkości z funkcją potęgowo-wykładniczą w układach losowych. Kolejny rozdział poświęciłam geometrii dywanu Sierpińskiego i własnej symulacji przeprowadzonej w takim układzie. Do obliczeń wykorzystałam trzy różne konfiguracje tego fraktala i sporządziłam histogramy prędkości. W ostatnim rozdziale analizuję otrzymane wyniki.

Abstract

Fractal geometries play significant role in science and technology, due to their structural features. The aim of this study is to research how fluids behave in these structures and find the influence of geometry on velocity distribution function. Previous studies have revealed a lot of inconsistencies in a connection between the form of this function and a geometry of the system. One of them estimates that in randomly generated geometries the velocity distribution function can be described by power exponential distribution (Phys. Rev. E 93, 013110 (2016)). In my master's thesis I am looking for a similar relationship in fractal geometries.

The first chapter describes a Lattice Boltzmann Method thus validation of the implemented code is also added. In the second chapter, velocity distribution function in porous media and its compatibility with the power exponential distribution in random systems has been analyzed. Next chapters focus on the Sierpinski carpet geometry and simulations carried out in such a system. There have been used three different configurations of the fractal and longitudinal velocity component VDFs calculated. At the end I analyse all the results.

1 Gaz sieciowy Boltzmann

Płyny składają się z dużej ilości cząsteczek, które poruszają się chaotycznie i wzajemnie zderzają ze sobą. Opis płynów wymaga modelu matematycznego, który uwzględni zachodzące w nim zjawiska fizyczne. Wyróżniamy kilka modeli matematycznych, które różnią się między sobą skalą opisu układu.

Pierwszy model pod względem skali ma charakter mikroskopowy i zwany jest *dynamiką molekularną*. Ruch cząstek opisany jest zgodnie z równaniami Newtona, natomiast do opisu oddziaływań międzycząsteczkowych stosuje się na przykład potencjał Lennarda-Jonesa. Śledzony jest ruch każdej pojedynczej cząsteczki, a makroskopowe wielkości otrzymywane są poprzez proces uśredniania wartości mikroskopowych. Ze względu na znaczną ilość cząsteczek nawet w relatywnie małych objętościach, stosowanie modeli mikroskopowych ogranicza się do badań zachowania pojedynczych molekuł [2] lub ewentualnie niewielkich układów. W przypadku układów o większej skali można wykorzystywać modele *mezoskopowe*, w których wykorzystuje się kinetyczną teorię gazów. Na tej teorii opiera się min. model przepływu płynu, nazywany gazem sieciowym Boltzmann (ang. *lattice Boltzmann method, LBM*). Kinetyczna teoria gazów uwzględnia zjawiska zachodzące na poziomie pojedynczych atomów jak i zjawiska występujące w skali makroskopowej. W ostatnich latach to podejście budzi coraz większe zainteresowanie, a co za tym idzie, wzrasta również ilość prac naukowych poświęconych metodzie LBM [1, 2].

1.1 Historia

Model gazu sieciowego Boltzmann po raz pierwszy opisany został przez G. McNamarę i G. Zanettiego w 1988 roku [3]. Stanowił on wtedy udoskonalenie popularnych wówczas gazów sieciowych, automatów komórkowych wykorzystywanych do symulacji płynów. Zwykły gaz sieciowy, chociaż doceniany za swoją prostotę, miał wiele wad, które nie pozwoliły na wykorzystywanie go w trudniejszych symulacjach płynu, np. płynów o wysokiej liczbie Reynoldsa. Najbardziej charakterystyczną wadą gazu sieciowego jest szum statystyczny wynikający z dyskretnego charakteru modelu i ograniczeń skali układów [5]. W gazie sieciowym Boltzmann problem ten został wyeliminowany poprzez wprowadzenie ciągłej funkcji rozkładu, której wartość w punkcie reprezentuje prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o danej prędkości w tym punkcie [2, 4]. Metoda LBM jest coraz chętniej wykorzystywana w komputerowej dynamice płynów ze względu na swoje możliwości i prostotę implementacji. Posługując się tym modelem, możliwe jest symulowanie płynów jedno- lub dwufazowych, przepływów niestabilnych, zjawiska kondensacji, parowania i kawitacji, a także wymiany ciepła [1]. Możemy wyróżnić kilka wariantów modelu z podziałem na wymiarowość sieci czy przybliżenie członu kolizji (jedno-relaksacyjne, wiele-relaksacyjne). W obrębie tej pracy korzystam z najbardziej popularnego wariantu: D2Q9. Jest to dwuwymiarowy model o dziewięciu możliwych wektorach prędkości cząstek.

1.2 Teoria kinetyczna

1.2.1 Funkcja rozkładu

Podstawę teoretyczną gazu sieciowego Boltzmannna stanowi teoria kinetyczna. Zgodnie z pracami Boltzmannna gaz, jako kompozycja wzajemnie oddziałujących ze sobą cząsteczek może być opisany przez podstawowe prawa mechaniki klasycznej, a znaczna ich ilość wymaga zastosowania również praw statystyki. Zamiast przestrzeni fazowej, w której znajdują się wszystkie cząstki wprowadza się pojęcie przestrzeni konfiguracyjnej położeń i pędów pojedynczej cząsteczki gazu oraz specjalnie zdefiniowaną funkcję rozkładu $f^{(N)}(x^N, p^N, t)$ opisującą ten układ, gdzie N oznacza ilość cząstek w tym układzie [1, 4]. Wyrażenie:

$$f^1(x, p, t), \quad (1)$$

nazywamy funkcją rozkładu pojedynczej cząstki (ang. *Single particle distribution function*), która określa prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o danej pozycji x i pędzie p . Parametry pozostałych $N - 1$ cząsteczek mogą pozostać nieokreślone, ponieważ są one nierozróżnialne, a więc i wybór, która to cząsteczka nie ma w tym kontekście znaczenia. Wykorzystanie funkcji rozkładu jest wystarczające by uwzględnić wszystkie właściwości gazu, które nie zależą od pozycji cząsteczek [1]. W dalszej części pracy będę opuszczać indeks "1", a funkcja bez indeksu będzie oznaczać funkcję rozkładu jednej cząstki.

1.2.2 Równanie transportu

Znając pozycje oraz pęd cząsteczki w określonym czasie t , możemy określić postać funkcji f w kolejnym kroku czasowym $t + dt$ [1]. Otrzymujemy wtedy:

$$f(x + dx, p + dp, t + dt)dx dp = f(x, p, t)dx dp, \quad (2)$$

natomiast po uwzględnieniu kolizji, dostajemy wyrażenie:

$$v \cdot \nabla_x f + F \cdot \nabla_p f + \frac{\partial f}{\partial t} = \Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}, \quad (3)$$

znane jako równanie transportu Boltzmannna, gdzie człon $\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}$ wyróżniany jest jako człon kolizji, a całe równanie opisuje dynamikę układu [2]. Człon kolizji w równaniu określa cząstki, które w wyniku kolizji opuszczają fragment przestrzeni konfiguracyjnej ($\Gamma^{(-)}$) oraz cząstki, które tam docierają w wyniku innej kolizji ($\Gamma^{(+)}$) [1].

1.2.3 Przybliżenie BGK

Człon kolizji w równaniu transportu Boltzmannna zwykle zastępuje się przybliżeniem jedno-relaksacyjnym, zaproponowanym przez Bhatnagara, Grossa i Krooka (ang. *Single Relaxation Time BGK*) w 1954 roku [1, 2]. Zgodnie z nim człon kolizji możemy zapisać jako:

$$\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)} = \frac{f - f^{eq}}{\tau}, \quad (4)$$

gdzie τ to czas relaksacji, natomiast f^{eq} jest funkcją rozkładu w stanie równowagi termodynamicznej. Przyjmuje ona postać rozkładu Maxwella-Boltzmannna:

$$f^{eq}(v) = \frac{\rho}{(2\pi k_B T)^{d/2}} \exp - \left[\frac{v^2}{2k_B T} \right], \quad (5)$$

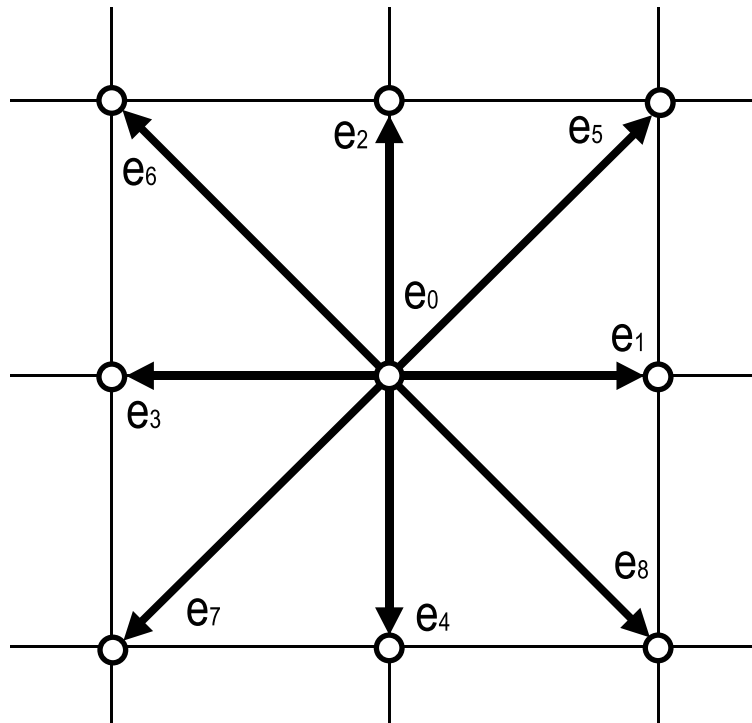
gdzie wyróżniamy: stałą Boltzmannna k_B , temperaturę T oraz prędkość cząstek v .

Głównym założeniem BGK jest traktowanie zderzeń jako procesu lokalnego dochodzenia układu do stanu równowagi ze stałym czasem relaksacji [4]. To podejście występuje zazwyczaj w najprostszym odślonie modelu LBM, ale istnieją również wersje z przybliżeniem wielo-relaksacyjnym, MRT (ang. *multiple relaxation time*) [1, 2].

1.3 Model D2Q9

Wśród gazów sieciowych Boltzmannna rozróżniamy modele typu $DnQq$, gdzie n oznacza wymiarowość przestrzeni ($n = 1, 2$ lub 3), natomiast q oznacza liczbę możliwych wektorów prędkości cząsteczki. Znacznie upraszczają one koncepcję Boltzmannna, ograniczając liczbę możliwych przestrzennych przesunięć cząstek do zaledwie kilku lub kilkunastu, a ich pozycje znajdują się wtedy jedynie w węzłach sieci [1].

Na rys. 1. znajduje się schemat sieci, na której rozpięty jest model D2Q9, oraz wektory prędkości e_a dla przykładowego węzła. Spośród dziewięciu kierunków w tym modelu e_0 oznacza cząstkę znajdującą się w spoczynku.



Rysunek 1: Model D2Q9: schemat sieci i wektorów prędkości dla przykładowego węzła.

W takiej konfiguracji jednostka sieci (lu) jest podstawową miarą długości w modelu, a krok czasowy (ts) stanowi jednostkę czasu. Wielkość prędkości z e_1 do e_4 to dokładnie jedna jednostka sieci na jednostkę czasu ($1lu\ ts^{-1}$), w przypadku e_5 do e_8 będzie to $\sqrt{2} lu\ ts^{-1}$. Jest to wygodny opis, ponieważ wartości składowych prędkości zawsze mają wtedy wartość ± 1 lub 0 [1].

1.3.1 Wartości makroskopowe

Przy pominięciu siły zewnętrznej równanie transportu przyjmuje postać dyskretną [1]:

$$f_a(x + e_a \Delta t, t + \Delta t) = f_a(x, t) - \frac{f_a(x, t) - f_a^{eq}(x, t)}{\tau} \quad (6)$$

Wartości makroskopowe dla modelu $D2Q9$ można wyznaczyć obliczając momenty funkcji rozkładu f_i , na przykład gęstość:

$$\rho = \sum_{i=0}^8 f_i, \quad (7)$$

czy lokalną prędkość:

$$u = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^8 f_i e_i. \quad (8)$$

W stanie początkowym układu wartość funkcji f_i wyznaczyć można z równowagowej funkcji rozkładu f^{eq} , której dyskretną postać opisuje następujące równanie:

$$f_i^{eq}(x) = w_a \rho(x) \left[1 + 3 \frac{e_a \cdot u}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(e_a \cdot u)^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{u^2}{c^2} \right], \quad (9)$$

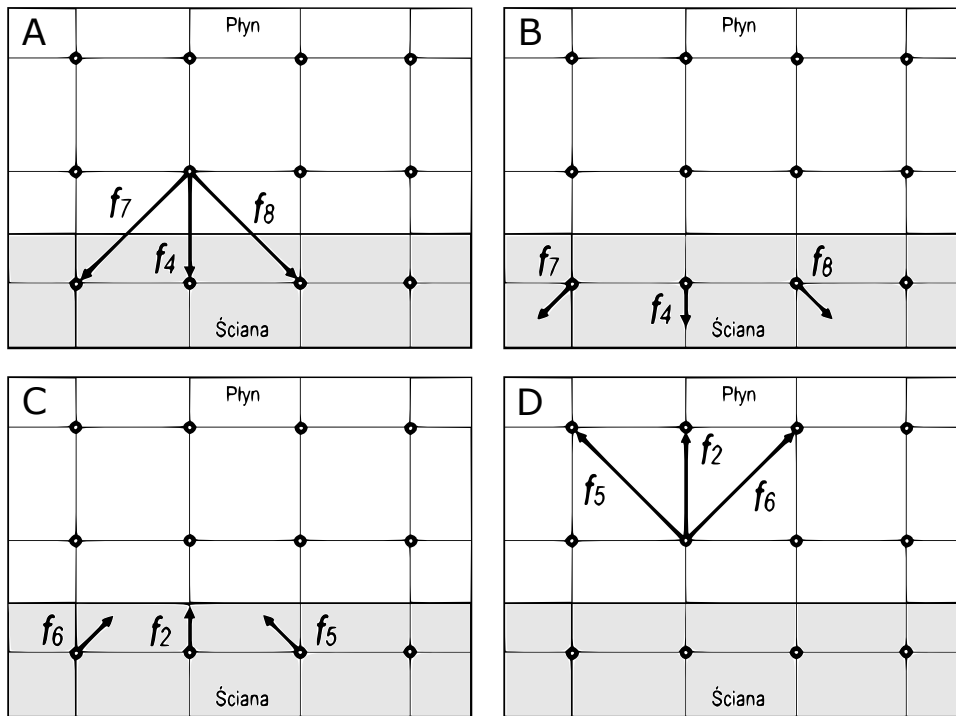
gdzie w oznacza wagi, c prędkość dźwięku, ρ gęstość [1, 2]. Wartości wag zależą od prędkości dźwięku c , którego wartość z kolei zależy od wybranego modelu. Dla przykładu, wartości w oraz c zestawiałam w tab. 1 dla trzech różnych modeli typu $DnQq$ [2].

Model	Wagi w_i	Prędkość dźwięku c_i
D2Q7	$1/2, 1/12$	$1/4$
D2Q9	$4/9, 1/9, 1/36$	$1/3$
D3Q15	$2/9, 1/9, 1/72$	$1/3$

Tabela 1: Przykłady wartości wag oraz prędkości dźwięku dla wybranych modeli.

1.3.2 Warunki brzegowe i algorytm

Problem warunków brzegowych w metodzie gazu sieciowego Boltzmanna jest bardzo złożony i obejmuje również modele, które umożliwiają symulacje trudniejszych rodzajów przepływu [1]. W niniejszej pracy koncentruję się głównie na zagadnieniu przepływu przez ośrodki porowate. W tego rodzaju symulacjach wymagane jest rozpatrzenie zachowania funkcji rozkładu przy brzegach ścianek. Zwykle w tym przypadku stosuje się prosty warunek na brzegi przy przepływie bez poślizgu (ang. *no slip boundary condition*) [2], gdzie na brzegach prędkość u jest równa zero. Zachowanie funkcji rozkładu w trakcie interakcji ze ścianką ilustruje rys. 2. Warto też wspomnieć, że istnieje modyfikacja wspomnianego warunku na odbicia (ang. *half way bounce back*), która znacznie poprawia dokładność rozwiązania w czasie i przestrzeni o jeden rząd wielkości [2].



Rysunek 2: Przepływ bez poślizgu: schemat kolejnych etapów w trakcie odbicia od przeszkody.

Po zadaniu warunków brzegowych oraz początkowych, kolejnym krokiem symulacji jest wyznaczenie dla każdego węzła sieci wartości makroskopowych oraz wartości funkcji f^{eq} z równania (9). Następnie liczone są kolizje oraz transport płynu zgodnie ze wzorem (6)[1].

1.3.3 Walidacja kodu numerycznego

Przepływ przez rurę płaską (ang. *Poiseuille flow*), to często wykorzystywany problem do walidacji kodów numerycznych. Jest to jeden z niewielu przypadków, który posiada pełne rozwiązanie analityczne [6].

Układ powinien być prostokątny z okresowymi warunkami na bokach krótszych, natomiast przy dłuższych bokach prędkość powinna być równa zero (warunki odbić

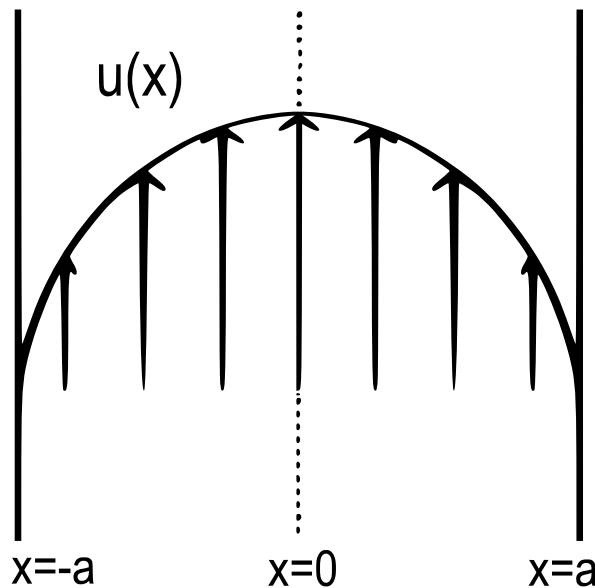
bez poślizgu). Pod wpływem siły zewnętrznej (grawitacji) lub różnicy ciśnień na krańcach rury, następuje przepływ, a dzięki warunkom periodycznym zachowuje on pełną ciągłość. To powoduje, że profil prędkości ma charakter paraboliczny, czyli największa wartość prędkości osiągnięta jest wzdłuż środka kanału [1]. Zgodnie z rachunkami analitycznymi parabola dana jest wzorem:

$$u(x) = \frac{G}{2\mu}(a^2 - x^2), \quad (10)$$

gdzie μ to lepkość kinematyczna zdefiniowana w modelu $D2Q9$ jako $\mu = \frac{1}{3}(\tau - \frac{1}{2})$, $G = \rho g$ to grawitacyjny gradient ciśnienia, natomiast a oznacza połowę szerokości kanału [1, 6]. Model $D2Q9$ zaimplementowałam zgodnie z algorytmem przedstawionym w poprzednim podrozdziale. Następnie, nałożyłam odpowiednie warunki potrzebne do symulacji przepływu Poiseuille, której parametry przedstawiłam w tab. 2. Schemat zagadnienia znajduje się na rys. 3.

Parametr	Wartość
Wielkość układu	$69 \text{ lu} \times 90 \text{ lu}$
Wartość siły zewnętrznej	$g = 0.1 \text{ lu ts}^{-1}$
Połowa szerokości kanału	$a = 33.5 \text{ lu}$
Ilość kroków symulacji	$t = 5000 - 500000 \text{ ts}$

Tabela 2: Parametry symulacji przepływu Poiseuille.

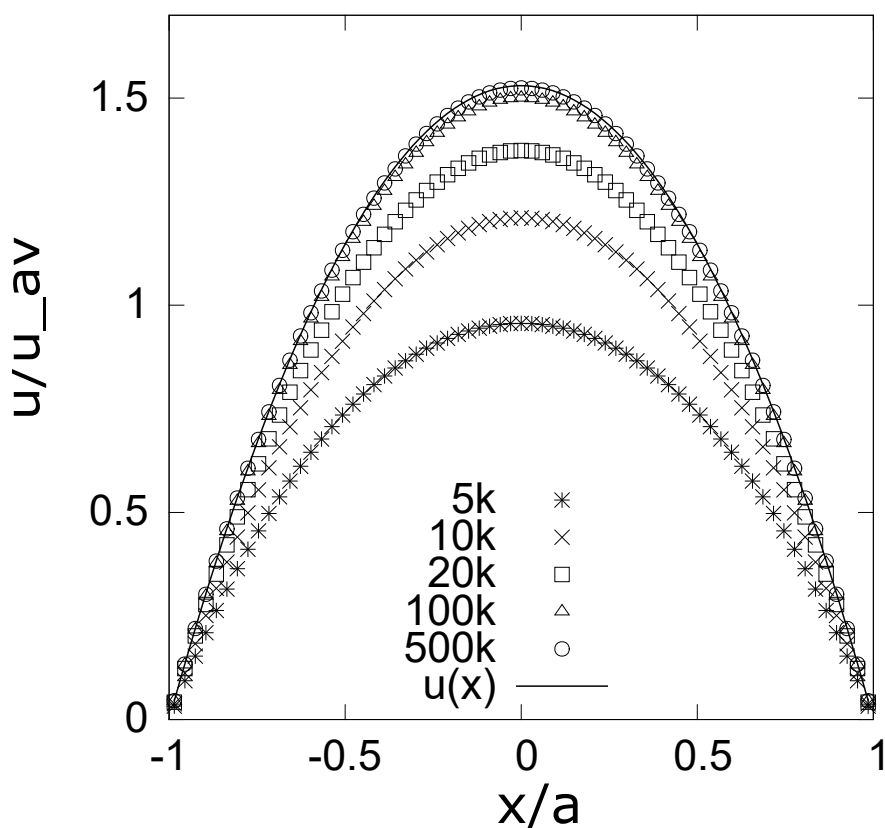


Rysunek 3: Przepływ Poiseuille: schemat zagadnienia.

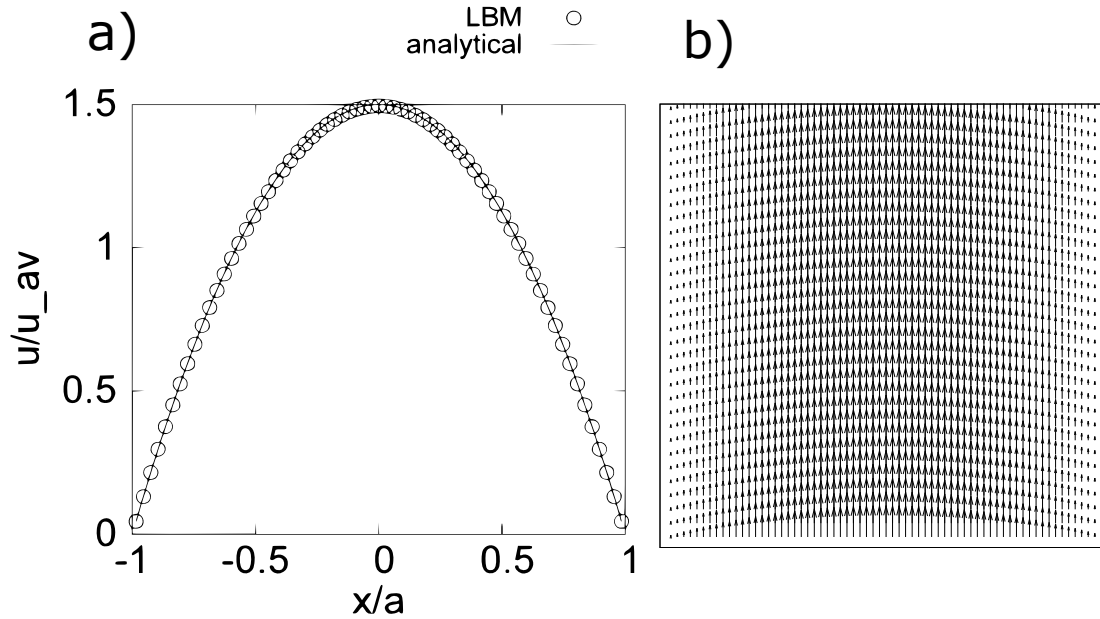
Dla parametrów zebranych w tab. 2, profil prędkości uzyskany w symulacji powinien być opisany wzorem:

$$u(x) = 0.3 \cdot (33.5^2 - x^2). \quad (11)$$

Należy zaznaczyć, że na szerokość kanału składa się również szerokość ścianek (dla każdej $1 lu$), dlatego właściwa szerokość uwzględniona w obliczeniach pomniejszona jest o $2lu$. Ponieważ w metodzie Boltzmanna rozwiązujemy równanie Naviera-Stokesa zależne od czasu, profil prędkości zależy od ilości kroków symulacji (rys. 4). Nie trudno zauważyć, że dla czasu poniżej $10^5 ts$ profil znacznie się zmienia, natomiast dla czasu blisko $5 \cdot 10^5 ts$ profil prędkości pokrywa się z wyznaczoną funkcją. Powyżej tej wartości nie zaobserwowałam znaczących zmian. Na rys. 5 znajduje się porównanie wyników uzyskanych empirycznie oraz analitycznie dla najdłuższego czasu symulacji.



Rysunek 4: Przepływ Poiseuille: zmiana profilu prędkości w zależności od czasu symulacji. Oś pozioma prezentuje wartości x podzielone przez połowę szerokości kanału a , natomiast wartości prędkości u zostały podzielone przez wartość średnią prędkości (u_{av}) jaka wystąpiła w układzie.



Rysunek 5: Przepływ Poiseuille: a) porównanie wyników z symulacji kodem napisanym na potrzeby tej pracy z obliczeniami analitycznymi. Oś pozioma prezentuje wartości x podzielone przez połowę szerokości kanału a , natomiast wartości prędkości u zostały podzielone przez wartość średnią prędkości (u_{av}) jaka wystąpiła w układzie. b) pole wektorowe obrazujące zachowanie płynu.

2 Funkcja rozkładu prędkości

2.1 Ośrodki porowate

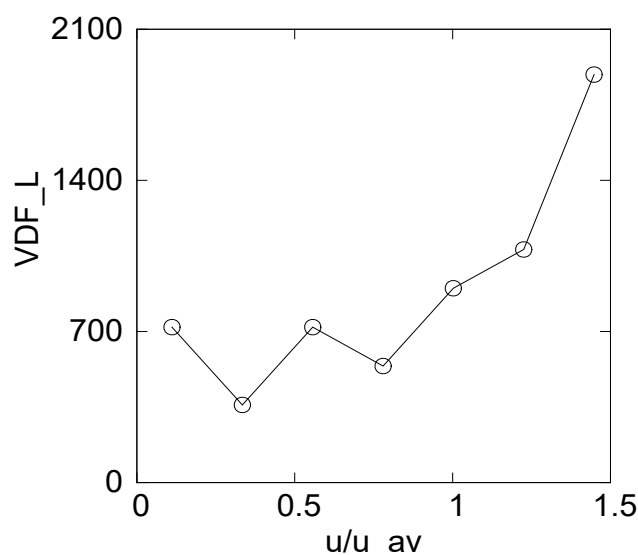
Przepływ cieczy przez ośrodek porowaty jest istotnym zjawiskiem w wielu zastosowaniach technologicznych, takich jak oczyszczanie wód gruntowych [8], reaktory chemiczne, czy leczenie nowotworów [12, 13]. Ze względu na złożoność geometrii porowatych wynikającą m.in. z postaci rozkładu ziaren oraz ich wielkości i kształtu, zachowanie płynu może być skomplikowane i nieintuicyjne [15]. Obecnie głównym celem badań w tej dziedzinie jest znalezienie zależności między strukturą ośrodka porowatego a zachowaniem płynu. Niezbędne są do tego specjalne narzędzia matematyczne, które ułatwią analizę układów o różnych geometriach.

Teoretycznie, wszystkie informacje dotyczące zachowania przepływu przez dany układ porowaty zawarte są w polu prędkości, ale silnie zależy ono od badanego układu i nie stanowi uniwersalnego narzędzia do badań. Praktyczniejszym narzędziem matematycznym, które omija nieistotne informacje zawarte w polu, jest funkcja rozkładu prędkości (ang. *Velocity Distribution Function*, VDF), czyli gęstość prawdopodobieństwa prędkości u lub jej komponentów u_L (wzdłużny) i u_T (poprzeczny) [12].

VDF wyznacza się w formie histogramu, który reprezentuje wartości prędkości (lub jej komponentów), a następnie porządkuje je w określone przedziały (kubelki). Jedną z cech VDF jest to, że umożliwia bezpośrednie określenie podstawowych cech płynu w układzie, można np. wprost z tej funkcji odczytać, czy wysąpiły wiry lub jaka jest przestrzenna zmienność prędkości. VDF ma również ścisły związek z niektórymi parametrami makroskopowymi, np. z krętością [12]. W dalszej części pracy wprowadzam oznaczenie f_L jako VDF dla komponentu wzdłużnego u_L wektora prędkości u .

Na rys. 6 znajduje się wykres przedstawiający funkcję f_L w przepływie Poiseuille. Są to wyniki z symulacji, o której mowa w podrozdziale o walidacji kodu numerycznego. Z wykresu można zauważyć, że wartości układają się rosnąco, a największą ilość wystąpień ma największy pod względem wartości zakres prędkości. Jest to spodziewany wynik biorąc pod uwagę charakter przepływu i to, w jaki sposób układają się wektory prędkości wzdłuż kanału (rys. 5.b).

Charakterystyka przepływu w skali znacznie większej niż wielkość porów jest dobrze znana, jednak w skali pojedynczych porów pojawiają się znaczne trudności. Związek między mikrostrukturą ośrodka porowatego, a obserwowaną funkcją rozkładu prędkości nie jest dokładnie znany [12, 13]. W badaniach pojawiają się różnego rodzaju geometrie porowate, min. układy gęsto upakowanych kul lub sfer [8, 9], rozproszone dyski [7], czy ośrodki generowane losowo [12]. VDF występuje w postaci rozkładu Gaussa, rozkładu logarytmicznego normalnego, wykładniczego [13, 15]. Nie jest pewne, dlaczego pojawia się taka rozbieżność. W większości badań zależności pomiędzy układem porowatym a postacią VDF nie są uniwersalne, tj. nie mają jednoznacznej postaci dla każdego układu porowatego. Jedną z teorii mówi, że to lokalne korelacje wielkości porów określają rozkłady przepływu w ośrodkach porowatych [13], z kolei inne badania przedstawiają modele, które przewidują rozkład prędkości z rozkładu wielkości porów. Chociaż to dwuzorowanie przewiduje np. wykładniczy rozkład prędkości z gaussowskiego rozkładu porów, często nie uwzględnia innych rozkładów [13, 14].



Rysunek 6: Funkcja f_L dla przepływu Poiseuille. Prędkość podzielono przez wartość średnią prędkości u_{avg} w układzie.

2.2 Rozkład wykładniczy w układach losowych

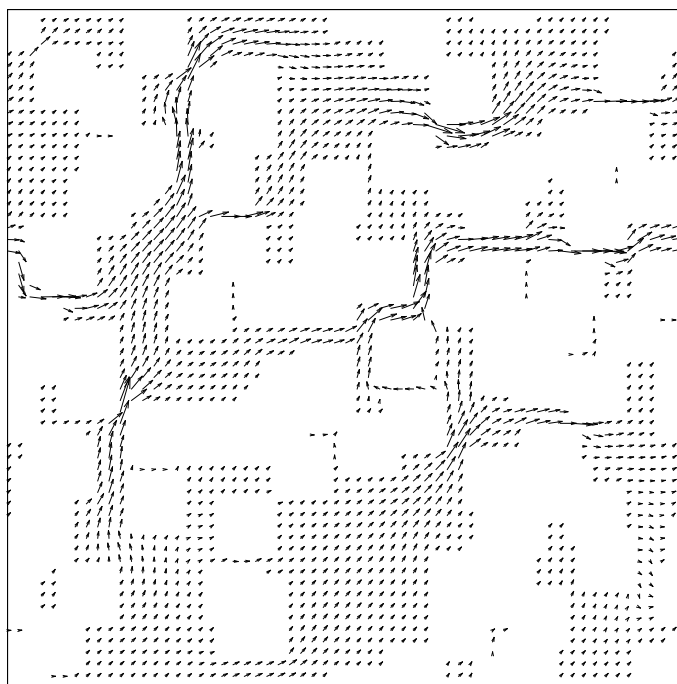
W pracy [12], gdzie również korzystano z modelu gazu sieciowego Boltzmannna, pokazano, że rozkłady VDF mogą być opisane przez rozkład wykładniczy. Symulacje przepływu płynów przeprowadzone zostały na sieciach dwuwymiarowych z losowo rozmieszczonymi kwadratami lub dyskami o zadanym promieniu. W rozkładzie wykładniczym, który wyraża się wzorem:

$$f(u) = a \exp \left[- \left(\frac{u - u_o}{u_s} \right)^\gamma \right], \quad (12)$$

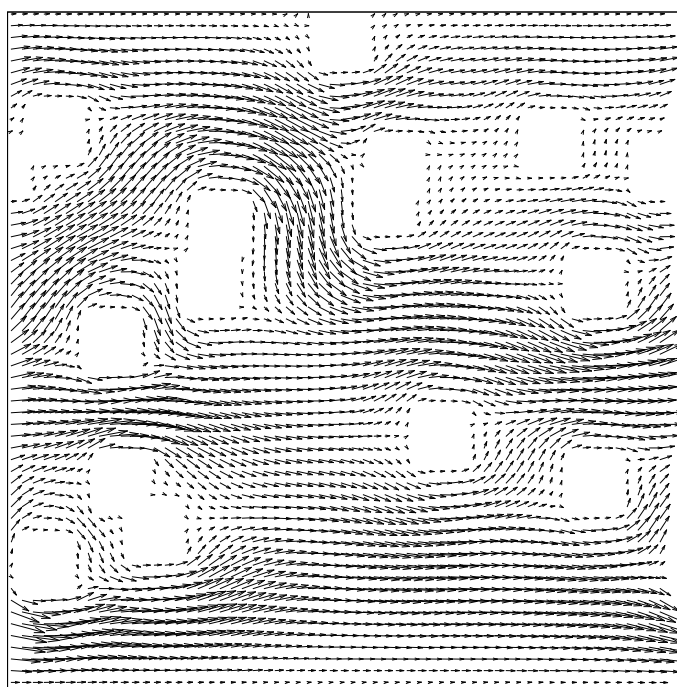
znajdują się trzy parametry wolne: u_o , u_s , a oraz wykładnik γ . Wykazano, że blisko progu perkolacji wykładnik osiąga wartość uniwersalną $\gamma = 0.5$ i rośnie wraz z porowatością maksymalnie do $\gamma = 2$. Porowatość w układach użytych w doświadczeniu wahała się od $\phi = 0.45$ do $\phi = 0.95$ [12]. Moim zadaniem było odtworzenie tego doświadczenia i wykorzystanie wyników do dalszych badań w ośrodkach o geometrii fraktalnej, co przedstawiam w kolejnym rozdziale.

W celu weryfikacji stworzonych przeze mnie narzędzi do symulacji płynów i generowania rozkładów VDF utworzyłam ośrodki o losowo generowanych geometriach. Na rys. 7, 8 znajdują się fragmenty przykładowych układów wykorzystanych w doświadczeniu w postaci pól wektorowych. Symulacje przepływu płynów zostały odtworzone dziesięciokrotnie dla układów, które utrzymywały porowatość równą $\phi = 0.5$ lub $\phi = 0.9$. Na koniec, z zebranych prędkości utworzyłam rozkłady f_L . Na rys. 9 i 10 zamieszczone są wyniki dla obu porowatości, dla których otrzymałam wykładnik γ odpowiednio równy: $\gamma = 0.65$ dla $\phi = 0.5$ oraz $\gamma = 2.0$ dla $\phi = 0.9$.

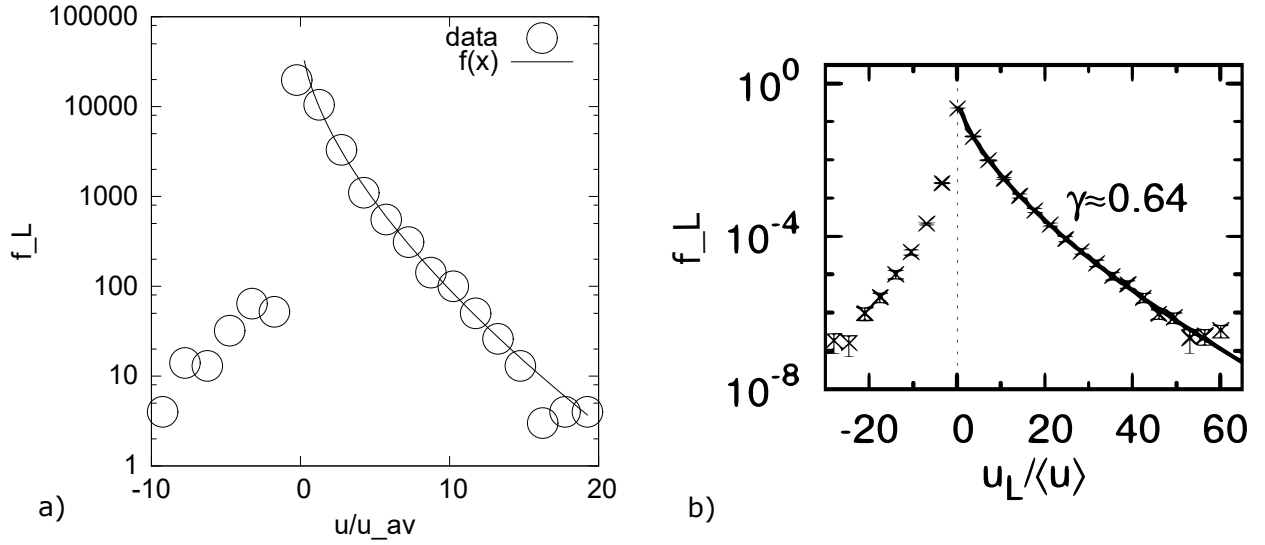
Uzyskany rezultat jest satysfakcjonujący i zgodny z przewidywaniami odtworzonego doświadczenia. Delikatne różnice występują jedynie dla niskiej porowatości. Wynika to min. z mniejszej ilości układów użytych w doświadczeniu, w porównaniu do symulacji z [12]. Warto również zaznaczyć, że niektóre pojedyncze wartości znacznie zaburzały fitowanie funkcji wykładniczej do danych, w związku z czym zostały odrzucone. Na rys. 11 przedstawiony został wykres zmiany wartości wykładnika γ w zależności od porowatości ϕ z [12] i naniesionymi moimi wynikami.



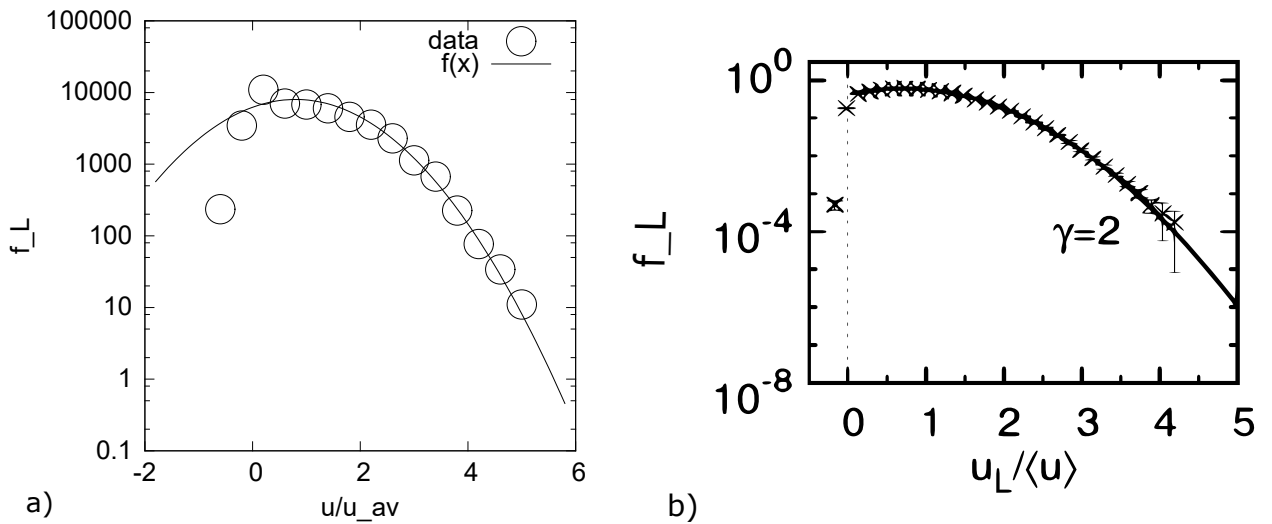
Rysunek 7: Przykład układu o geometrii tworzonej losowo i porowatości $\phi = 0.5$. Białe miejsca oznaczają przeszkody.



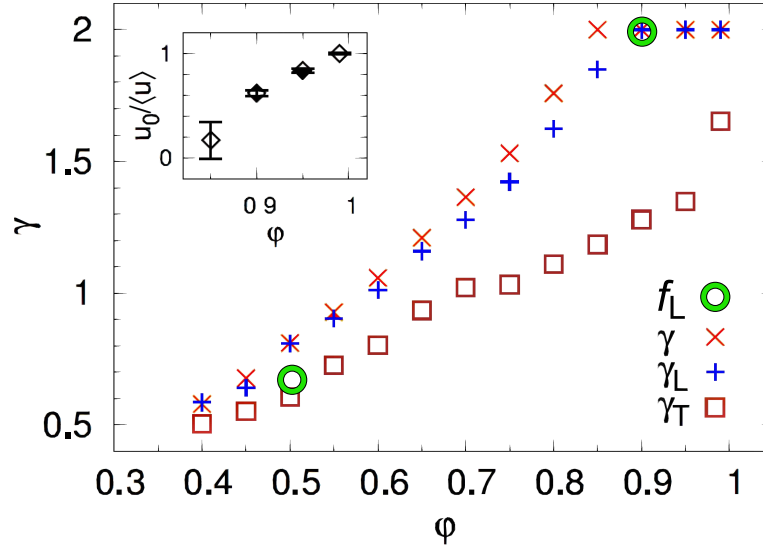
Rysunek 8: Przykład układu o geometrii tworzonej losowo i porowatości $\phi = 0.9$. Białe miejsca oznaczają przeszkody.



Rysunek 9: Postać funkcji f_L : a) moje wyniki obliczeń dla układów o porowatości $\phi = 0.5$ z dopasowanym rozkładem wykładniczym o wykładniku równym $\gamma = 0.65$ b) wyniki z [12] dla układów o porowatości $\phi = 0.45$.



Rysunek 10: Postać funkcji f_L : a) moje wyniki obliczeń dla układów o porowatości $\phi = 0.9$ z dopasowanym rozkładem wykładniczym o wykładniku równym $\gamma = 2.0$ b) wyniki z [12] dla układów o porowatości $\phi = 0.95$.



Rysunek 11: Zależność między wykładnikiem γ a porowatością (dane z [12]). Okręgi oznaczają otrzymane wartości wykładnika γ w wyniku przeprowadzonego doświadczenia.

3 Fraktale w ośrodkach porowatych

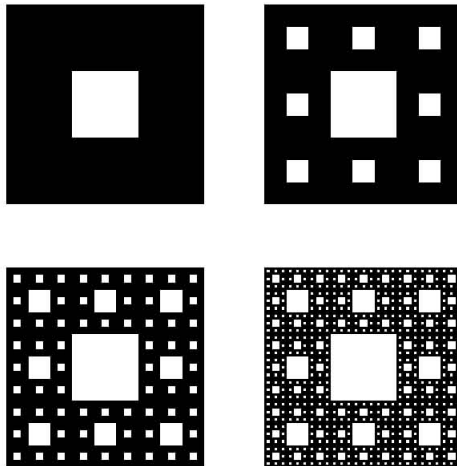
3.1 Dywan Sierpińskiego

Fraktale mają szczególną strukturę, której nie sposób opisać za pomocą tradycyjnej geometrii. Z uwagi na ich szczególne właściwości strukturalne i wizualne wykorzystywane są w różnego rodzaju technikach, np. inkrustacji czy fizykochemii powierzchniowej [21]. Co ciekawe, zapotrzebowanie na wielopasmowe i niskoprofilowe anteny (min. dla przenośnych urządzeń bezprzewodowych) doprowadziło do zastosowania fraktali również w komunikacji mikrofalowej [16, 17]. Ponieważ są samopodobnymi strukturami, zajmują mniej powierzchni, zachowując przy tym właściwości większych anten wielopasmowych [17].

Co najważniejsze, w przepływach przez ośrodki porowate fraktale również mają swoje miejsce [18]. Prawdopodobnie z uwagi na prostą geometrię najczęściej wykorzystywany jest dywan Sierpińskiego. Jego struktura pochodzi od innego fraktala, trójkąta Sierpińskiego, który pojawił się już w jedenastowiecznych bazylikach w postaci ornamentów (rys. 12) [21, 22]. Dopiero w latach 1915 - 1916 wybitny polski matematyk, Waław Sierpiński, zbadał i opisał oba fraktale, dlatego ich nazwy pochodzą od jego nazwiska [19, 20]. Dywan Sierpińskiego tworzy się dzieląc kwadrat na 9 mniejszych kwadratów, po czym usuwa się środkowy z nich. Następnie, te same czynności wykonuje się na pozostałych 8 kwadratach i powtarza ten krok w zależności od tego, którą iterację chce się otrzymać (rys. 13).



Rysunek 12: Trójkąt Sierpińskiego jako kamienna mozaika w Bazylice św. Klemensa w Rzymie [21].

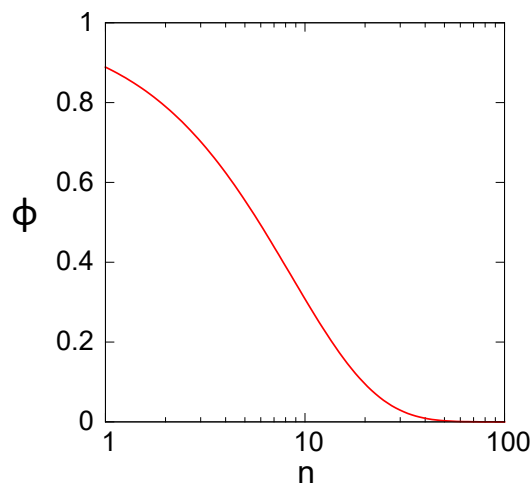


Rysunek 13: Pierwsze cztery iteracje dywanu Sierpińskiego.

W przypadku losowych konfiguracji trudno jest uzyskać przepuszczalny układ o niskiej porowatości. We fraktalach jest to możliwe dla całego zakresu porowatości, ponieważ wraz ze wzrostem wymiaru fraktalu zwiększa się rozdzielczość. Istnieje interesująca zależność łącząca porowatość dywanu Sierpińskiego z jego wymiarem, która wyraża się wzorem:

$$\phi = (8/9)^n, \quad (13)$$

a przedstawia ją rys. 14 [18]. Korzystając z tej zależności oraz tej z rys. 11 postanowiłam zbadać, czy w przypadku takich układów funkcję VDF również można wyrazić przez rozkład wykładniczy, jak w poprzednim rozdziale. Co więcej, czy wartość wykładnika γ w układach fraktalnych zgodny będzie z zależnością z rys. 11?



Rysunek 14: Zależność pomiędzy porowatością fraktalu ϕ a jego wymiarem n [18].

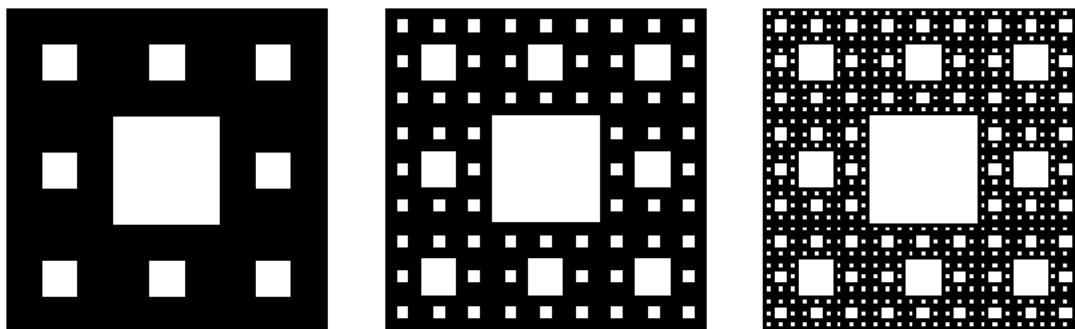
3.2 Symulacje i wyniki

Do stworzenia układu skorzystałam z algorytmu, który w zależności od podanego parametru fraktalu n tworzy odpowiednią konfigurację dywanu Sierpińskiego. W symulacji wykorzystałam trzy układy o odpowiadającym im parametrom fraktalnym: $n = 3, 4, 5$. Powodem wyboru akurat tych wartości jest za mały rozmiar sieci dla $n = 1, 2$. Warto wspomnieć, że bok kwadratu, na którym rozpięty jest dywan Sierpińskiego wyrażany jest przez funkcję potęgową:

$$a = 3^n, \quad (14)$$

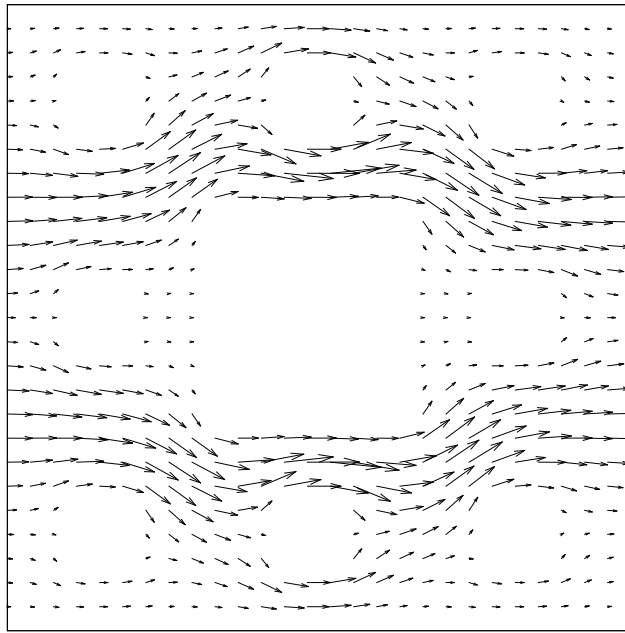
dlatego dla $n = 1$, bok sieci wynosi zaledwie $a = 3$, ale dla kolejnych wartości n rośnie bardzo szybko. Na przykład, $n = 10$ odpowiada sieci o boku długości równej aż 59049 lu . Jak się okazało, już dla $n = 6$ pojawił się problem ze skalą układu. Najmniejsze fragmenty geometrii pojawiające się w tej konfiguracji fraktalu były zbyt małe, by przepływający płyn mógł traktować je jako przeszkodę. Wynika to z tego, że gaz sieciowy Boltzmanna wymaga przeszkód o rozmiarze przynajmniej $4lu \times 4lu$ [2]. W związku z tym pominęłam tę konfigurację, a kolejne charakteryzowały się za dużym rozmiarem sieci jak na możliwości komputera, z którego korzystałam przy obliczeniach.

Ponieważ struktura układu zawsze jest taka sama, symulacja każdej z konfiguracji powtórzona była tylko raz. Symulacje kończyły się w momencie, kiedy bezwzględna zmiana wartości pola prędkości pomiędzy kolejnymi krokami symulacji była mniejsza niż pewna wartość graniczna. Na rys. 15 znajdują się schematy układów wykorzystanych w symulacjach.

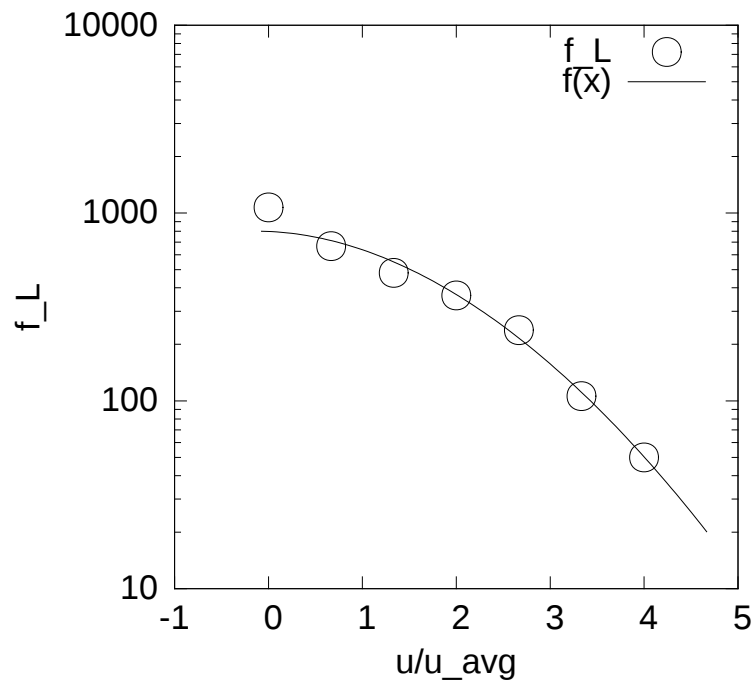


Rysunek 15: Kolejne konfiguracje dywanu Sierpińskiego dla $n = 3, 4, 5$ wykorzystane w doświadczeniu. Białe miejsca oznaczają przeszkody.

Na rys. 16 i 17 zamieściłam otrzymane wektory prędkości dla układu o wymiarze fraktalu równym $n = 3$ oraz funkcję rozkładu prędkości f_L . Podobnie jak w poprzednim rozdziale, do wartości VDF dopasowałam rozkład wykładniczy wyrażony funkcją (12).

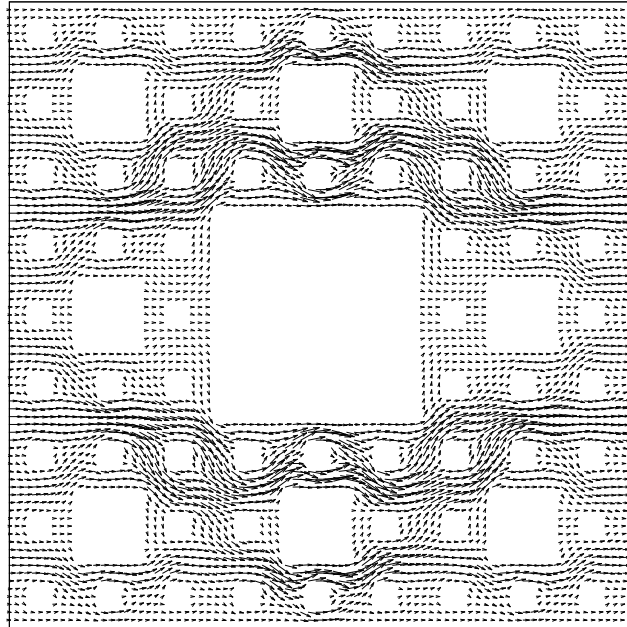


Rysunek 16: Pole wektorowe: przepływ dywanu Sierpińskiego dla $n = 3$, gdzie porowatość wynosi $\phi = 0.71$. Rozmiar układu: 27×27 (lu).

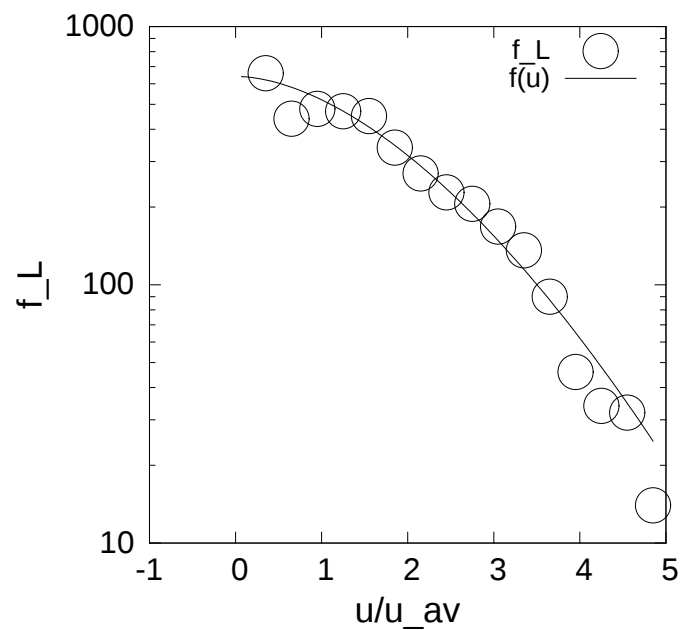


Rysunek 17: Postać funkcji f_L dla dywanu Sierpińskiego dla $n = 3$.

W ten sam sposób otrzymałam wyniki dla kolejnej konfiguracji, dla której $n = 4$. Wykres VDF oraz pole wektorowe dla tego układu znajdują się odpowiednio na rys. 18 i 19.



Rysunek 18: Pole wektorowe: przepływ dywanu Sierpińskiego dla $n = 4$, gdzie porowatość wynosi $\phi = 0.67$. Rozmiar układu: 81×81 (lu).



Rysunek 19: Postać funkcji f_L dla dywanu Sierpińskiego dla $n = 4$.

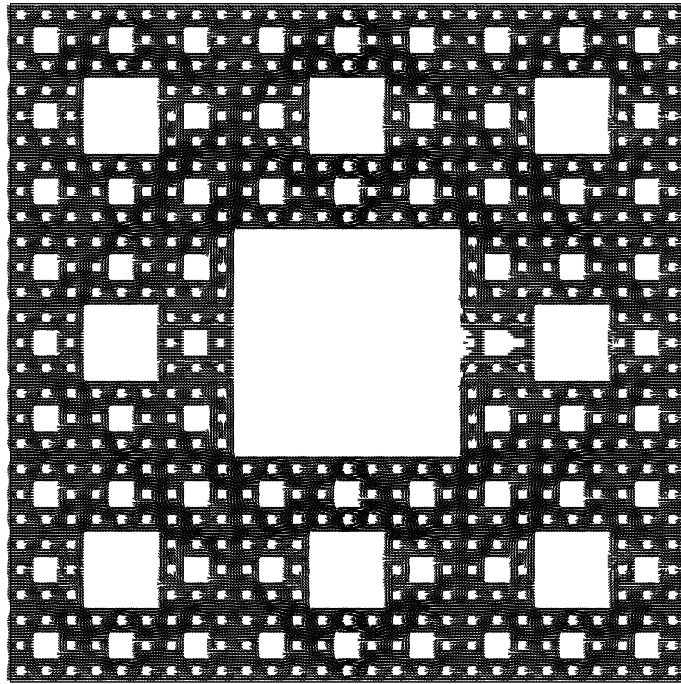
Wykres VDF oraz pole wektorowe dla ostatniego układu, gdzie $n = 5$, znajdują się odpowiednio na rys. 20 i 21. Dla wszystkich układów otrzymałam następujące wyniki:

$$\phi = 0.71, n = 3 \rightarrow \gamma = 1.8$$

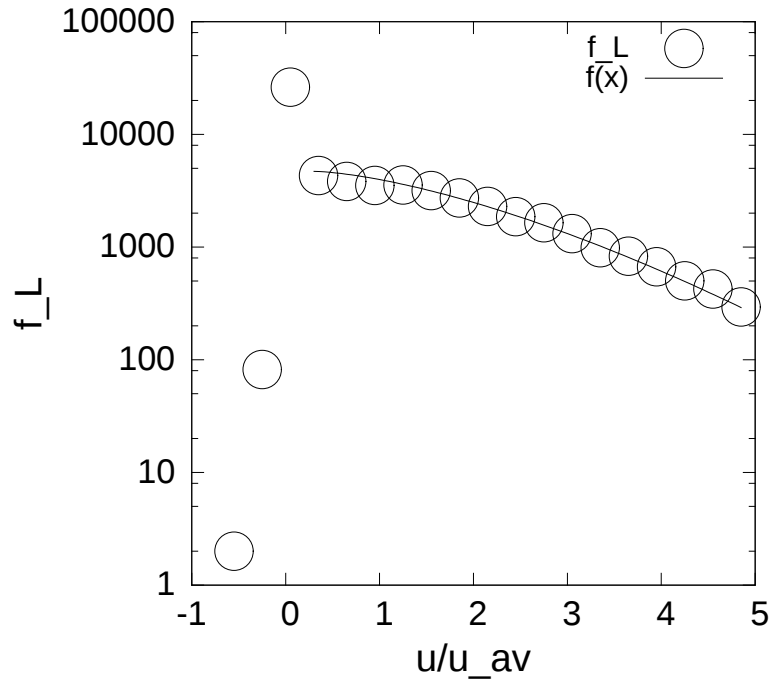
$$\phi = 0.67, n = 4 \rightarrow \gamma = 1.7$$

$$\phi = 0.61, n = 5 \rightarrow \gamma = 1.6$$

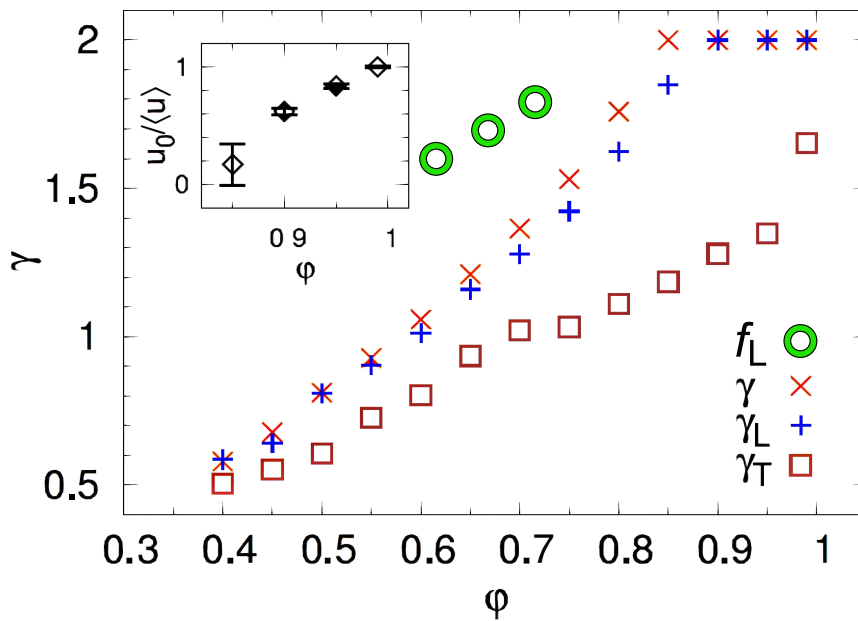
Po naniesieniu ich na zależność z rys. 11 wyraźnie widać różnice (rys. 22). Wykładnik γ dla układów o geometrii tworzonej losowo układa się wraz ze wzrostem porowatości wzdłuż pewnej prostej, natomiast dla układów fraktalnych widać niewielkie przesunięcie.



Rysunek 20: Pole wektorowe: przepływ dywanu Sierpińskiego dla $n = 5$, gdzie porowatość wynosi $\phi = 0.61$. Rozmiar układu: 243×243 (lu).



Rysunek 21: Postać funkcji f_L dla dywanu Sierpińskiego dla $n = 5$.



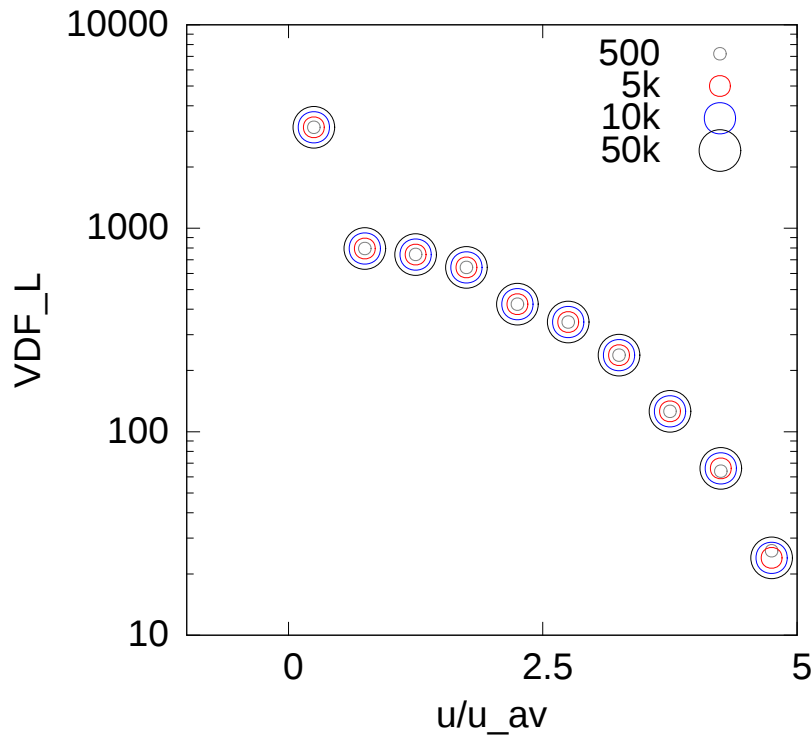
Rysunek 22: Zależność od porowatości (wzór 12). Okręgi oznaczają otrzymane wartości wykładnika γ w wyniku przeprowadzonego doświadczenia.

Z wyników zgromadzonych na rys. 17, 19, 21 przedstawiających funkcję f_L dla różnych konfiguracji fraktalu wynika, że postać dopasowanej funkcji wykładniczej (12) jest podobna dla wszystkich układów. W zależności od wartości parametrów wolnych, wykładnik tej funkcji oscylował we wszystkich układach w okolicy wartości maksymalnej $\gamma \approx 2$. Z uwagi na niewielkie różnice w porowatości pomiędzy fraktalami o

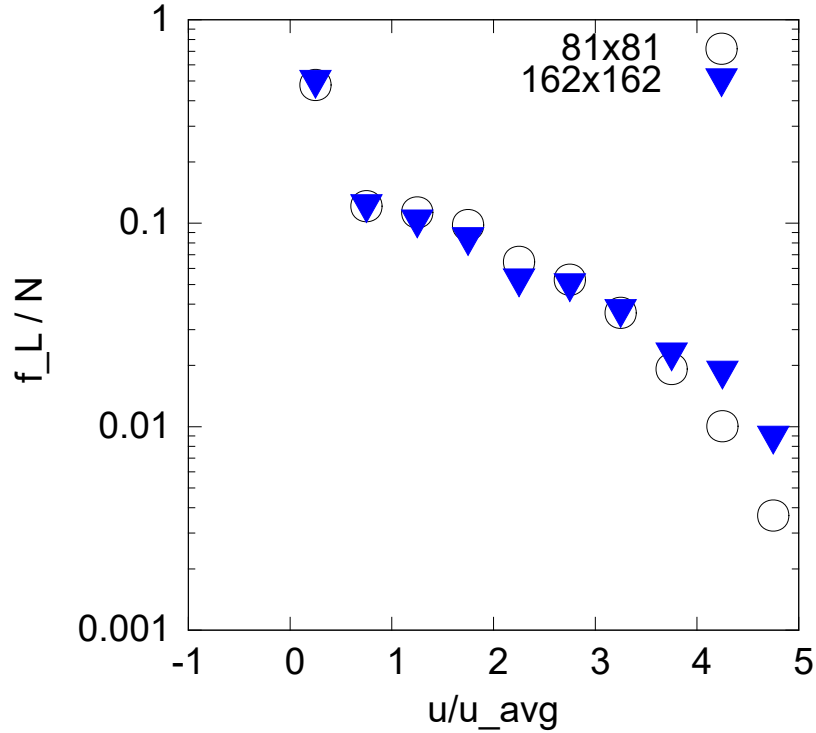
stopniach $n = 3, 4, 5$, podobieństwo w funkcji f_L nie stanowi zaskoczenia. Pomiedzy układami porowatość zmieniła się nie więcej niż o wartość $\delta\phi = 0.1$. W związku z tym zdecydowałam się wykonać dodatkowe obliczenia, które pozwolą na szerszą analizę.

Pierwszym doświadczeniem było zbadanie, czy postać VDF zależy od czasu symulacji. Obliczenia przeprowadziłam tylko dla jednej wybranej konfiguracji dywanu Sierpińskiego, gdzie stopień fraktalu $n = 4$ i odpowiadający mu bok sieci $a = 81$. Symulacje powtórzyłam dla czterech różnych kroków czasowych (ts): 500, 5000, 10000, 50000. Wyniki tego doświadczenia znajdują się na rys. 23, gdzie wartości f_L dla poszczególnych czasów symulacji przedstawiłam jako okręgi o różnych promieniach. Znacznie uprościło to wizualizację wyników, które się ze sobą pokryły. Z wykresu można odczytać, że dla każdej symulacji okręgi mają środki wspólne z wyjątkiem tej, która trwała najkrócej ($t = 500ts$).

Drugie doświadczenie polegało na zwiększeniu sieci, ale zachowaniu geometrii wybranego stopnia dywanu Sierpińskiego i zbadaniu, czy ta zmiana ma wpływ na postać VDF. Symulacje przeprowadziłam dla dwóch układów o tej samej konfiguracji fraktalu jak w poprzednim badaniu ($n=4$). Jeden z układów zachowywał zależność stopnia fraktalu z wielkością sieci zgodnie z (14), natomiast drugi był dwa razy większy od niego ($a = 162$). Wyniki symulacji tego doświadczenia znajdują się na rys. 24.



Rysunek 23: Postać f_L w zależności od czasu symulacji wykonanej dla układu o wymiarach 81x81 i stopniu fraktalu $n=4$.



Rysunek 24: Postać f_L dla dwóch układów o wymiarach 81x81 oraz 162x162. Układy zachowują tę samą geometrię dywanu Sierpińskiego, której odpowiada stopień fraktalu $n=4$. Wyniki zostały znormalizowane do ilości komórek w układzie (f_L/N).

4 Podsumowanie

W układach o geometrii tworzonej losowo mogą pojawiać się sytuacje, kiedy przepływ płynu jest lokalnie zablokowany przez przeszkody lub ścieżka płynu mocno się zawęża, a prędkość płynu znacznie wzrasta (rys. 7, 8). Między innymi takie sytuacje mają wpływ na postać VDF - ograniczony ściankami płyn zwiększa ilość wystąpień prędkości z zakresu niskich wartości i analogicznie dla drugiej sytuacji. Jeśli spojrzeć na geometrie fraktalne, oczywiście pierwsza sytuacja nigdy nie występuje. Wraz ze wzrostem stopnia fraktalu zmienia się rozdzielczość układu, dlatego zawsze jest przepuszczalny niezależnie od porowatości, a geometria zasadniczo się nie zmienia. W przypadku drugiej sytuacji, kiedy prędkość wzrasta lokalnie, w dywanie Sierpińskiego są to zawsze te same obszary układu niezależnie od stopnia fraktalu, co dobrze ilustrują pola wektorowe (rys. 16, 18, 20). Prawdopodobnie ma to wpływ na różnice pomiędzy funkcją VDF dla fraktali, a VDF dla układów o geometrii tworzonej losowo. Z rys. 22 wynika, że VDF w dywanie Sierpińskiego charakteryzuje się wyższą wartością wykładnika. Jest on wyższy zwykle dla wysokich porowatości, gdzie pojawiają się większe prędkości. Biorąc pod uwagę, że we fraktalach przepływ płynu jest mniej zaburzony przez regularną strukturę i brak takich sytuacji, jak wspomniano na początku, taka postać VDF była oczekiwana.

Wyniki przedstawione na rys. 23 pokazują, że postać VDF uzyskana z przepływu przez dywan Sierpińskiego praktycznie nie zmienia się w czasie. Zmiana prędkości w układzie znacznie ustalała po ok. 2000ts, dlatego tylko w przypadku symulacji trwającej $t = 500ts$ wartości nieco się różnią. Z kolei patrząc na rys. 24, rozdzielczość również nie

ma znaczącego wpływu na postać VDF. Wykresy są takie same z drobnymi różnicami, a wykładnik γ pozostaje identyczny. Charakterystyczny pik występujący w okolicach zera pojawił się już wcześniej na wykresach VDF dla układów losowych (rys. 9, 10) oraz układów o geometrii fraktalnej (rys. 17, 19, 21). Prawdopodobnie ma to związek z miejscami przy ściankach, a pominięcie tych fragmentów przy obliczeniach mogłoby złagodzić ten efekt.

Warto przypomnieć, że pomiędzy układami wykorzystanymi w symulacjach istnieje jedynie niewielka różnica w porowatości, równa maksymalnie $\delta\phi = 0.1$. Poza tym, w każdej symulacji przepływu przez dywan Sierpińskiego przeszkody zostały wprowadzone na górnej i dolnej ściance w układzie, co nie tylko może mieć wpływ na porowatość, ale też na geometrię. Chociaż te różnice są niewielkie, warto się upewnić, jaki dają wkład do wyników. Przede wszystkim, wykorzystanie wyższych stopni fraktalu, by zwiększyć różnice między porowatością układów powinno stanowić kolejny krok w kontynuacji tych badań. Szersza analiza większych układów znacznie je może rozszerzyć, jak podobnie przepuszczenie płynu o innych parametrach lub pod innym kątem. Równie istotna będzie analiza uzyskanej zależności z rys. 22, która wskazuje na to, że wartości układają się wzdłuż linii prostej.

Odpowiadając na postawione pytanie w rozdziale 3, dopasowanie funkcji wykładniczej do wyników uzyskanych z przepływu przez dywan Sierpińskiego jest możliwe, ale wykładnik nie spełnia zależności z rys. 11. Z przeprowadzonych badań wynika, że przepływ przez geometrię fraktalną charakteryzuje się większą prędkością, niż przepływ przez układy z geometrią tworzoną losowo. Dywan Sierpińskiego stanowił dobry wybór, jako początek badań zachowania płynu we fraktalach, jednak warto przyjrzeć się również innym tego typu geometriom. Myślę, że warto rozpatrzyć, czy dla bardziej skomplikowanych fraktali zachowanie funkcji rozkładu prędkości będzie podobne, czy może będzie miał zupełnie inny charakter z możliwością dopasowania innego rozkładu niż wykładniczy.

Literatura

- [1] T. D. T. J. Sukop, M. C., *Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [2] Z. Guo, and C. Shu, *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*. World Scientific, 2013.
- [3] G. R. McNamara, and G. Zanetti, *Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata*. Phys. Rev. Lett., vol. 61, pp. 2332–2335, Nov 1988.
- [4] M. Matyka, *Modelowanie numeryczne transportu płynów przez ośrodki porowate*. Rozprawa doktorska, Uniwersytet Wrocławski, 2008.
- [5] U. Frish, B. Hasslaher, and Y. Pomeau, *Lattice Gas Automata for the Navier-Stokes Equation*. Phys. Rev. Lett., vol. 56, pp. 1505–1508, Apr 1986.
- [6] S. Szczecina, *Własności Hydrodynamiczne Modelu Gazu Sieciowego FHP-III*. Praca magisterska, Uniwersytet Wrocławski, 2008.
- [7] Araújo, Ascânio D., et al. *Distribution of local fluxes in diluted porous media*. Phys. Rev. E, vol. 74.1: 010401, 2006.
- [8] Datta, Sujit S., et al. *Spatial fluctuations of fluid velocities in flow through a three-dimensional porous medium*. Phys. Rev. Lett., vol. 111.6: 064501, 2013.
- [9] L. W. Rong, K. J. Dong, and A. B. Yu. *Lattice-Boltzmann simulation of fluid flow through packed beds of uniform spheres: Effect of porosity*. Chemical Engineering Science 99: 44-58, 2013.
- [10] S. Succi, *The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*. Oxford university press, 2001.
- [11] M. Siena, et al. *Relationship between pore size and velocity probability distributions in stochastically generated porous media*. Phys. Rev. E, vol. 89.1 : 013018, 2014.
- [12] M. Matyka, J. Gołembiewski, and Z. Koza, *Power-exponential velocity distributions in disordered porous media*. Phys. Rev. E, vol. 93.1: 013110, 2016.
- [13] K. Alim, et al. *Local pore size correlations determine flow distributions in porous media*. Phys. Rev. Lett., vol. 119.14: 144501, 2017.
- [14] R. S. Maier, et al. *Simulation of flow through bead packs using the lattice Boltzmann method*. Physics of Fluids, vol. 10.1: 60-74, 1998.
- [15] O. O. A. Van Genabeek, *Velocity fluctuations in slow flow through porous media*. Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [16] W. Arrighetti, et al. *Circuit Models for Sierpinski gasket antennas*. arXiv preprint physics/0510069, 2005.

- [17] D. S. Sagne, R. S. Batra, and P. L. Zade, *Design of modified geometry sierpinski carpet fractal antenna array for wireless communication*. Advance Computing Conference, 2013.
- [18] L. Jian-Hua, Y. Bo-Ming, *Tortuosity of flow paths through a Sierpinski carpet*. Chinese Physics Letters, vol. 28.3: 034701, 2011.
- [19] W. Sierpiński, *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 160: 302-305, 1915.
- [20] W. Sierpiński, *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée*. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 160: 629–632, 1916.
- [21] S. L. Tait, *Self-assembling Sierpinski triangles*. Nature Chemistry, vol. 7: 370–371, 2015.
- [22] P. Brunori, P. Magrone, and L. T. Lalli, *Imperial Porphiry and Golden Leaf: Sierpinski Triangle in a Medieval Roman Cloister*. International Conference on Geometry and Graphics, Springer, 2018.