ODE
(równania różniczkowe zwyczajne)

Remigiusz Durka

Insitute of Theoretical Physics
Uniwersity of Wrocław

Równanie różniczkowe rzędu n

→ Zagadnienie wiążące zmienną niezależną x

z szukaną funkcją $f(x)$ i jej pochodnymi

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

(ODE) ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Rzędem r. różniczkowego nazywamy najwyższy rząd pochodnej

(1) $\frac{dy}{dx}=0$ $\qquad$ $\frac{dy(x)}{dx}=1$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=x$ $\qquad$ $\frac{dy(x)}{dx}=y(x)$ $\qquad$ $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$

$y=C$ $\qquad$ $y=x+C$ $\qquad$ $y=\frac{1}{2}x^2+C$ $\qquad$ $y=e^x+C$

(2) $\frac{d^2y(x)}{dx^2}=0 \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{C}\right)=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}=C$ $\qquad$ $y=C\cdot x+C_1$

(2) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2 x(t)^2=0$ $\qquad$ $y'y''-y'''(1+y'^2)=0$ (3)

$y(x)=\ldots$

Uwaga:

n-ty rząd równania $\Leftrightarrow$ n stałych $\Leftrightarrow$ n potrzebnych warunków początkowych (brzegowych)

Definicja

- **Równanie różniczkowe zwyczajne** (jednej zmiennej) **rzędu n** to równanie wiążące ze sobą **zmienną niezależną** (t) ze zmienną zależną (x) i jej pochodnymi $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}$,

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

Równania autonomiczne

- Równania, które nie zależą jawnie od zmiennej niezależnej

$$F\left(\cancel{t}, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

- Są nieco łatwiejsze do rozwiązywania
- Są powszechne w fizyce, bo „fundamentalne prawa natury nie zależą od czasu"
- Przykład: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$ (druga zasada dynamiki Newtona)

Autonomous

A differential is *autonomous* if it does not depend on the variable x.

Równ. różn. zwyczajne jednej zmiennej x, rzędu n o postaci

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Matematyka

nazywamy funkcjonał o n+2 zmiennych.

$$F\left(t, x(t), \frac{d\,x(t)}{dt}, \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = 0$$

Fizyka

Rozwiązaniem ODE jest funkcja y(x) dla której Funkcjonał F jest tożsamościowo spełniony

Równanie różniczkowe liniowe rzędu *n jednej zmiennej x*(*t*)

Równanie różniczkowe nazywamy **liniowym rzędu *n* zmiennej zależnej** $x(t)$, gdy F można zapisać w postaci kombinacji liniowej funkcji x i jej pochodnych:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t) \cdot x^{(i)}(t) + a_0\, x(t) = b(t)$$

gdzie:

- $x^{(i)}$ – pochodne rzędu $i = 0, 1, \ldots, n$ zmiennej zależnej $x(t)$ względem zmiennej t,
  $a_i(t), i = 0, 1, \ldots, n$ *oraz* $b(t)$ – różniczkowalne funkcje zmiennej t, niekoniecznie liniowe.

Innymi słowy: równanie jest liniowe, gdy zmienna zależna i jej pochodne występują tylko w 1-szej potędze i nie ma wyrazów zawierających funkcje zmiennej x czy funkcje jej pochodnych, np. $\sin x(t), \exp(x^3), \ln(x'')$ itd.

Przy tym mamy dwa istotne przypadki:

- $b(t) = 0$ – wtedy równanie nazywa się **jednorodnym**,
- $b(t) \neq 0$ – wtedy równanie nazywa się **niejednorodnym**.

Autonomous $$F\left(\cancel{x}, y, y', y'', \ \ldots, \ y^{(n)}\right) = 0$$

A differential is *autonomous* if it does not depend on the variable x.

II Prawo dynamiki Newtona

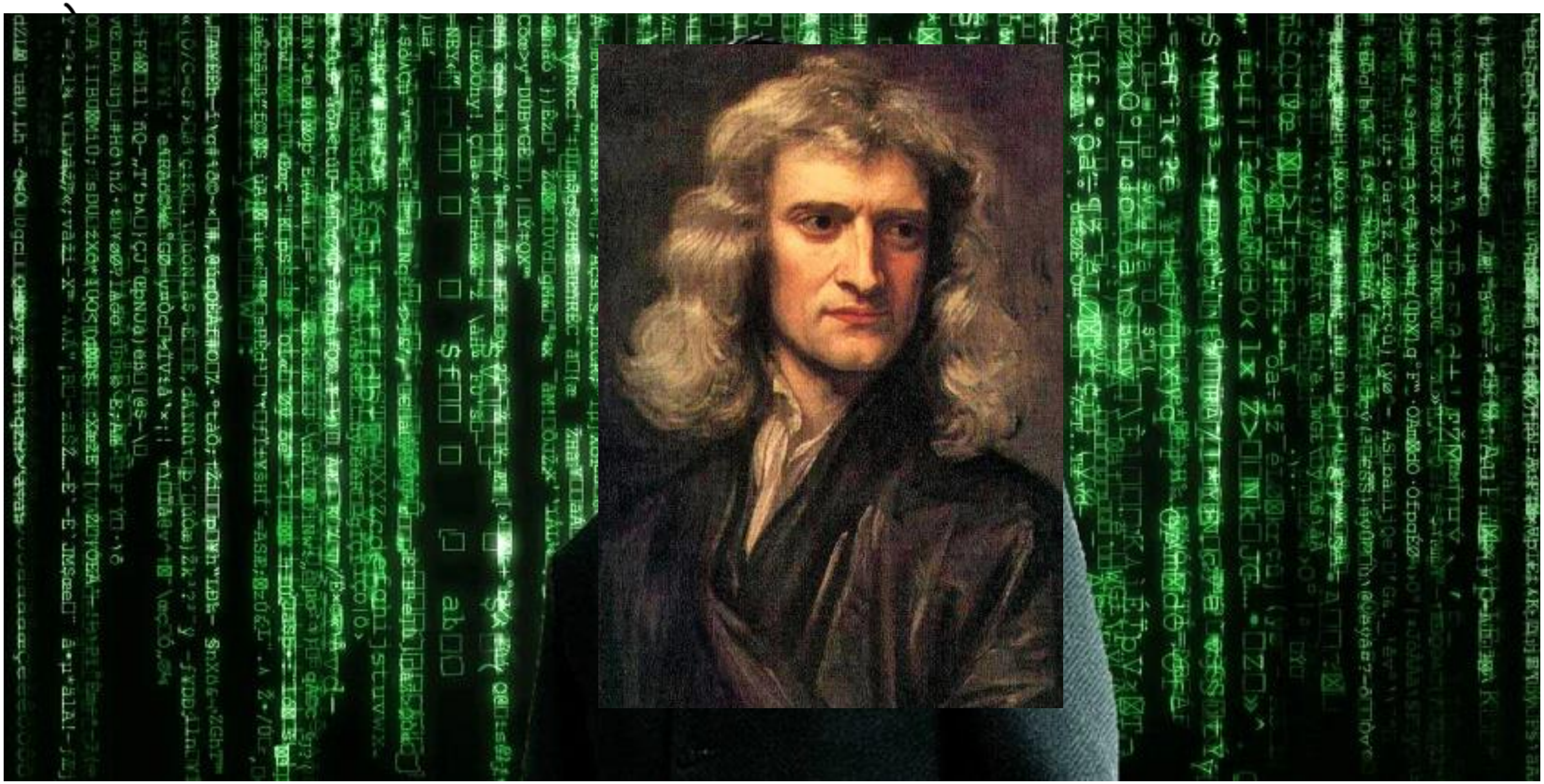
Newton

Najważniejsze równanie!

$$F = m \cdot a$$

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}}$$



1) Brak siły $F = 0$ $V(t) = \text{const.} = V_0$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0 \quad \left\lfloor \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = 0 \right\rfloor$$

2 rząd → 2 stałe → 2 warunki brzegowe

$$\int \frac{d}{dt}(\ \ )\,dt \underset{+\tilde{c}_1}{=} \int 0 \cdot dt \quad +\tilde{c}_2$$

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = C$$

$$\int \frac{d}{dt}(x(t))\,dt = \int C\,dt$$

$$x(t) = C \cdot t + C_1$$

$$V(t) = C = V_0$$

$$x(t) = V_0 \cdot t + x_0$$

$x(0) = x_0$ $V(0) = V_0$

$x(1) = \tilde{x}_0$ $V(1) = \tilde{V}_0$

$$X(t) = C \cdot t + C_1$$

$$V(t) = C$$

$$x(t) = V_0 \cdot t + x_0$$

$$\underset{x_0}{x(0)} = C \cdot 0 + C_1 \iff C_1 = x_0$$

$$\underset{V_0}{V(0)} = C \iff C = V_0$$

Uwaga:

n-ty rząd równania

⇕

n stałych

⇕

n potrzebnych warunków początkowych (brzegowych)

2) Stale site $F = -m \cdot g$ $\dot{x}(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$ $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a t^2}{2}$

$\ddot{x} = \frac{-mg}{m}$ $\ddot{x} = -g$ $g = 9{,}81$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x\right) dt = -\int g\,dt$$

$$\int \frac{d}{dt} x(t) = \int (-g \cdot t + c)\,dt$$

$$x(t) = -\frac{g t^2}{2} + c \cdot t + c_1$$

$x(0) = x_0$
$v(0) = v_0$

$x(0) = \boxed{c_1 = x_0}$ $v(t) = -g \cdot t + c$
$v(0) = \boxed{c = v_0}$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

3)

$$F = -k \cdot x \qquad \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\ddot{x} = \frac{-k}{m} \cdot x \qquad \ddot{x} = -\omega^2 \cdot x$$

Wyjście z wykładniczej potęgi

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

λ stała

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 \cdot e^{\lambda t} \quad / : e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 = -\omega^2 \qquad \lambda_1 = i\omega \qquad \lambda_2 = -i\omega$$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i(\omega t)} + e^{-i(\omega t)}}{2}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) dt = -\omega^2 \int x(t)\, dt$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega^2 \left(\int x(t)\, dt\right) + C$$

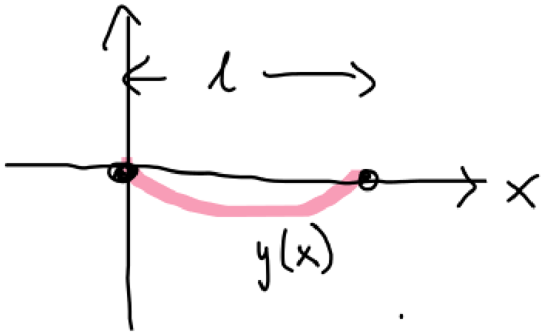
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\dot{x}(t) = -A \sin(\omega t) \cdot \omega + B \cdot \omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Prawo lekko elastycznych ciał

Inne zagadnienie → UGIĘCIE PRĘTA lub PÓŁKI



$$y''(x) = -\left(\frac{x^2}{l} - x\right) \leftarrow$$ Inne prawo niż dynamiki Newtona (prawo wynikające z mechaniki lekko elastycznych ciał)

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) dx = -\int \left(\frac{x^2}{l} - x\right) dx$$

$$\frac{d}{dx} y(x) = -\left(\frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{l} - \frac{1}{2} x^2\right) + C$$

$$y(x) = -\left(\frac{1}{12 \cdot l} \cdot x^4 - \frac{1}{6} x^3\right) + C \cdot x + C_1$$

Warunki brzegowe

$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$

$y(l) = 0 \;\longrightarrow\; 0 = y(l) = -\left(\frac{1}{12 l} \cdot l^4 - \frac{1}{6} l^3\right) + C \cdot l \;\rightsquigarrow\; C = -\frac{l^2}{12}$

Ostatecznie $$y(x) = -\frac{1}{12}\left(\frac{x^4}{l} - 2x^3 + l^2 \cdot x\right)$$

Ogólnie $\quad y''(x) = f(y) \quad / \cdot 2y'dx \qquad$ np. $f(y) = \sin(y(x))$

$$2y'y''dx = 2f(y)y'dx$$

$$\int d(y'^2) = 2\int f(y)\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$$

$$y'^2 = 2\int f(y)dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$$

$$x(y) = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{\int 2f(y)dy + C}}$$

remark:
sometimes you get opposite relation, not x(t)

$$\ddot{x}(t) = \frac{-1}{x(t)^2}$$

$$t = \arccos\sqrt{x} + \sqrt{(1-x)x}$$

1st order ODE i równanie o zmiennych rozdzielonych

\# Równanie rzędu pierwszego $F(x, y(x), y(x)) = 0$

$$y' = 0 \qquad y' = x \qquad y' = y + x$$

Specjalna klasa

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$ ← równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\Big\downarrow \int$$

$$\int P(x)\,dx = \dots = \int Q(y)\,dy$$

Przykład

zmienna zależna

równanie

warunek początkowy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad y(0) = 1$$

zmienna niezależna

$$ydy = -xdx$$ separacja zmiennych

$$\int ydy = -\int xdx$$ obustronne całkowanie

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$ obliczenie całek

ale $\frac{1^2}{2} = -\frac{0^2}{2} + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{1}{2}$ wyznaczenie stałej

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

rozwiązanie

Warunki początkowe – przykład

równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

warunek początkowy

$$\mathbf{y(0) = 1}$$

$$\frac{\mathbf{y}^2}{2} = -\frac{\mathbf{x}^2}{2} + C$$

rozwiązanie ogólne

$$\frac{\mathbf{1}^2}{2} = -\frac{\mathbf{0}^2}{2} + C$$

podstawienie warunku brzeg.
do rozwiązania ogólnego

$$C = \frac{1}{2}$$

wyznaczenie stałej

a) $\dfrac{dy(x)}{dx} = x^2 \xrightarrow[\text{rozdelíme zmien}]{} dy = x^2\,dx \xrightarrow[\int]{} \int dy = \int x^2\,dx$

$y = \frac{1}{3}x^3 + C$!

b) $\dfrac{dy}{dx} = y \longrightarrow \dfrac{dy}{y} = dx \longrightarrow \int \dfrac{dy}{y} = \int dx$

$\ln|y| = x + C$

$e^{\ln|y|} = e^{x+C}$

$|y| = e^{x+C}$

$\downarrow$

$y = \pm e^{x+C} = \underbrace{\pm e^x \cdot e^C}_{\overline{C}}$

$y(x) = \overline{C} \cdot e^x$

$y(x) = C \cdot e^x$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 1 \qquad \int dy = 1 \cdot \int dx \rightarrow y = x + C$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \sin x \qquad \int dy = \int \sin x \cdot dx \rightarrow y = -\cos x + C$

Równania Różniczkowe rzędu 2 o stałych współczynnikach

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + q\cdot y = 0 \qquad \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

Podst. $y(x) = e^{k\cdot x}$

$$k^2 e^{kx} + p\cdot k\cdot e^{kx} + q\cdot e^{kx} = 0 \quad /: e^{k\cdot x}$$

$$\underline{k^2} + p\underline{k} + q = 0 \qquad \Delta = p^2 - 4q$$

1) $\Delta > 0$ $\begin{cases} k_1 & \text{real} \\ k_2 & \text{real} \end{cases}$ $y(x) = C_1\cdot e^{k_1\cdot x} + C_2\cdot e^{k_2\cdot x}$

2) $\Delta = 0$ $k_1 = k_2 = -\frac{1}{2}p$ $y(x) = (C_1 + x\cdot C_2)\, e^{\overset{= -\frac{1}{2}p}{k_1}\cdot x} = (C_1 + C_2\cdot x)\, e^{-\frac{1}{2}p\cdot x}$

3) $\Delta < 0$ $k_1 = \alpha + i\beta$ complex, $k_2 = \alpha - i\beta$ complex $y(x) = (C_1\cdot\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))\cdot e^{\alpha x}$

Przykłady

a) $y'' + y' - 12y = 0$ $\quad y = e^{kx} \longrightarrow k^2 e^{kx} + k \cdot e^{kx} - 12 e^{kx} = 0$

$$k^2 + k - 12 = 0 \qquad k_1 = \frac{-1+7}{2} = 3$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0 \qquad k_2 = \frac{-1-7}{2} = -4$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 e^{-4x}$$

b) $4y'' + \underline{4}y' + y = 0 \longrightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 0$

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \qquad k = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$$

c) $y'' + 6y' + 13y = 0 \longrightarrow k^2 + 6k + 13 = 0$

$$\Delta = 36 - 52 = -16$$

$$\sqrt{-16} = i \cdot 4$$

$$\alpha = -3 \qquad \beta = 2$$

$$k_1 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i$$

$$k_2 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i$$

$$y(x) = \left(C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)\right) \cdot e^{-3x}$$

Przykład: równanie Newtona

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

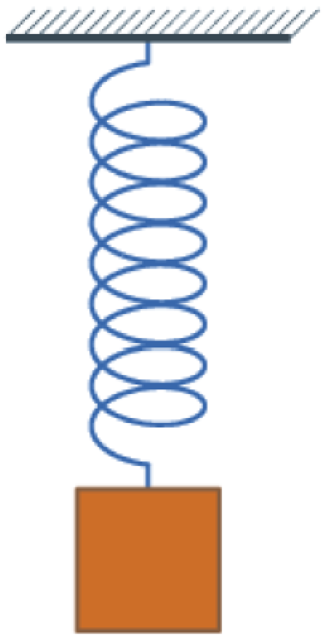
sprowadzamy do układu dwóch równań rzędu 1

poprzez wprowadzenie nowej zmiennej $\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = F(\boldsymbol{x})$$

Przykład: oscylator harmoniczny



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} \\ \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\dfrac{k}{m}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

k: stała sprężystości
m: masa

Octave

Przykład: oscylator harmoniczny

$$\frac{d\overset{=x_1}{x}}{dt} = v$$

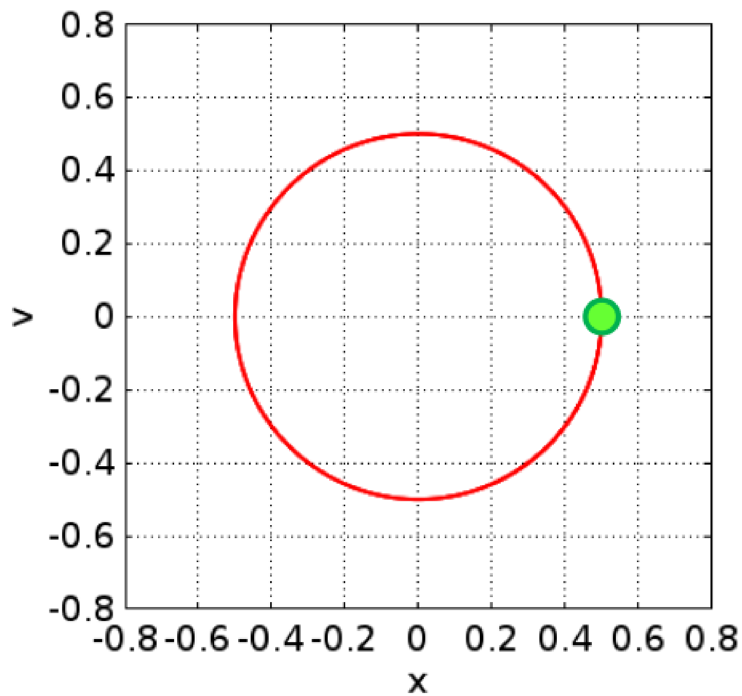
$$\frac{d\overset{=x_2}{v}}{dt} = -x$$

$$x(0) = 0.5$$

$$v(0) = 0$$

$$\frac{k}{m} = 1$$

```
f = @(x,t) [x(2), -x(1)];
t = 0:0.01:20;
x0 = 0.5; v0 = 0;
sol = lsode(f, [x0, v0], t);
plot(sol(:,1), sol(:,2));
```

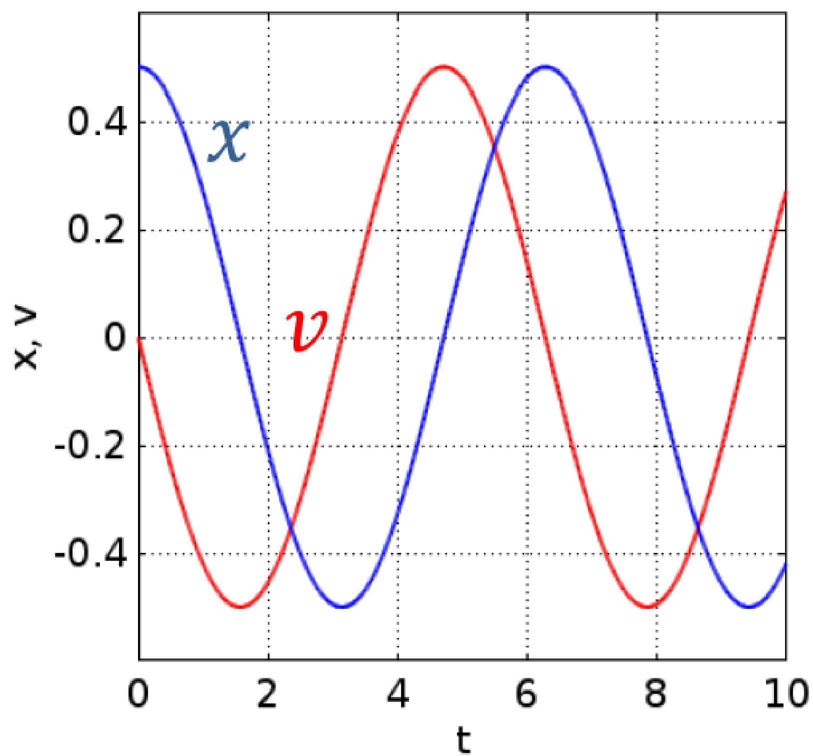


lsode-linear solver ODE

oscylator harmoniczny: **zależność od czasu**

$$x(t) \propto \cos(\omega t)$$

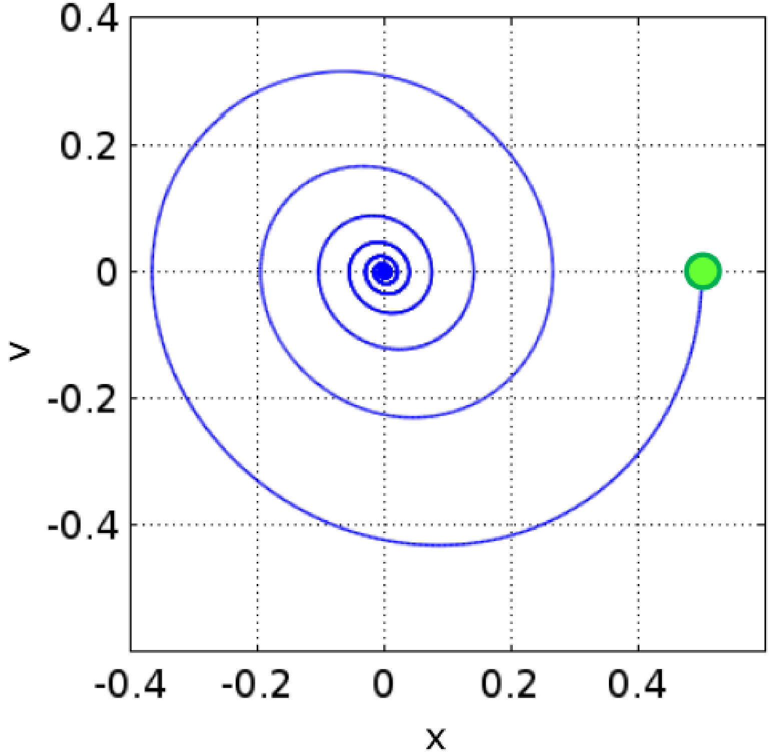
$$v(t) \propto \sin(\omega t)$$



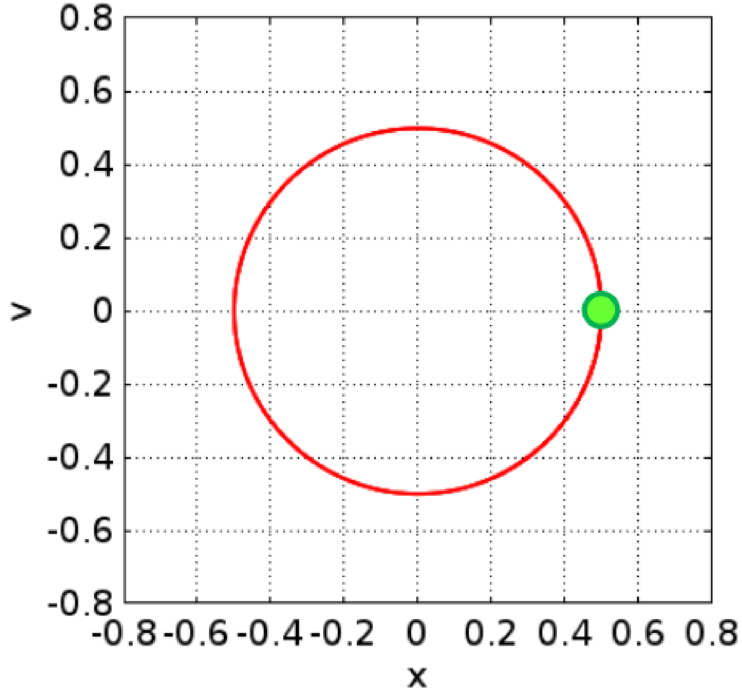

```
plot(t, sol(:,2), "r;v;");
plot(t, sol(:,1), "b;x;");
```

Punkty stałe, orbity, atraktory, chaos

Punkt stały
(stabilny, przyciągający)
(tłumiony oscylator harmoniczny)

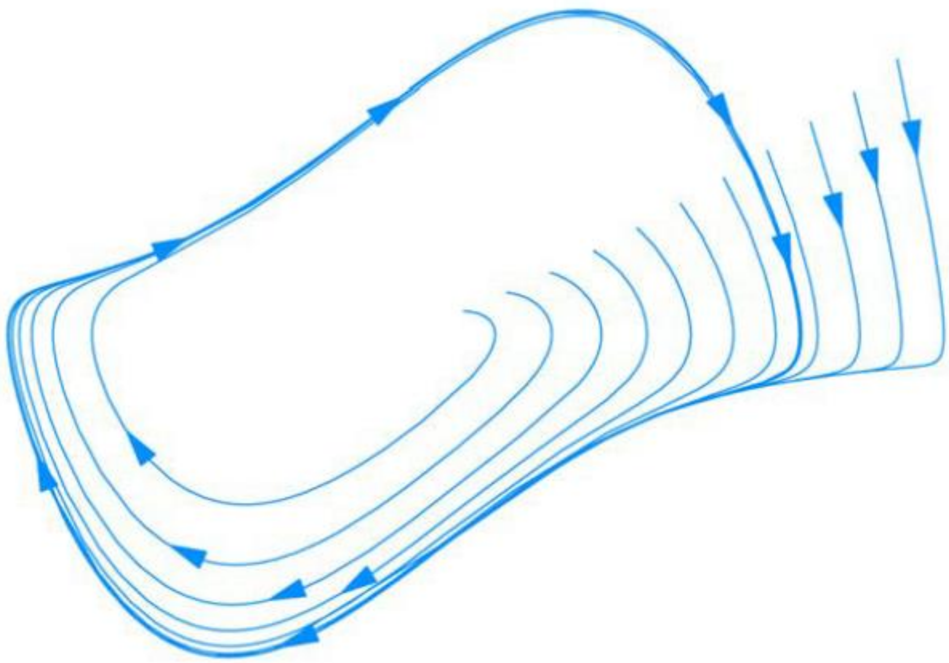


Orbita
(oscylator harmoniczny)

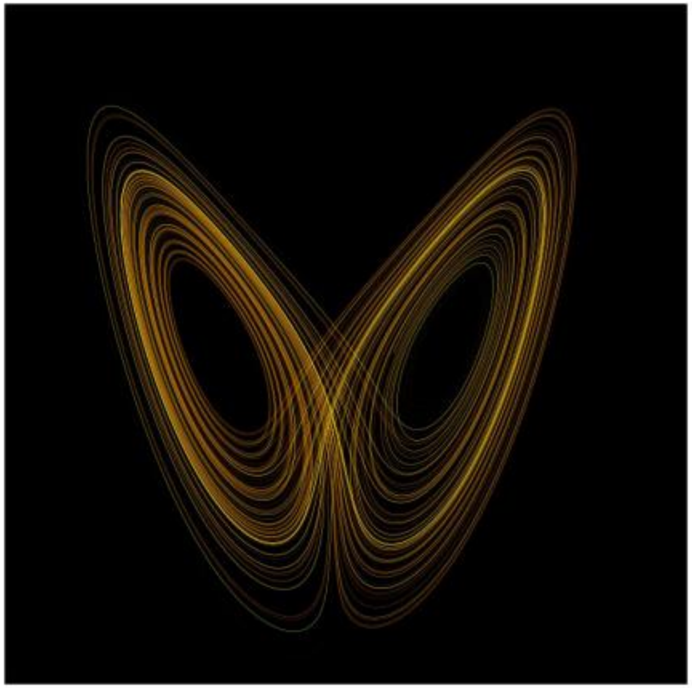


Punkty stałe, orbity, atraktory, chaos

Atraktor
(oscylator Van der Pola)



Dziwny atraktor
(atraktor Lorenza, obiekt 3D)



Efekt motyla

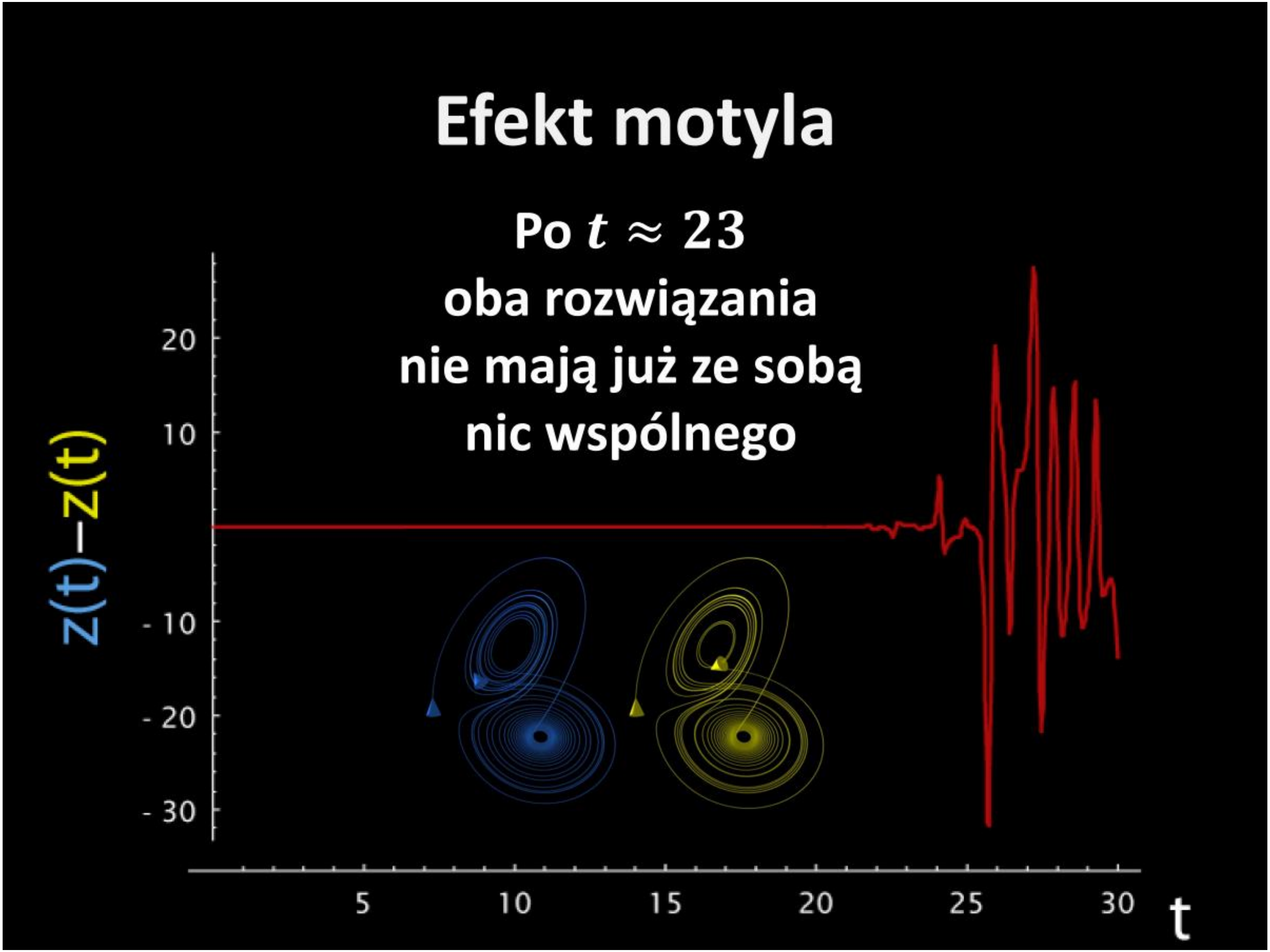
Dwie trajektorie o warunku początkowym przesuniętym wzdłuż osi „x” o 10^{-5}

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z$$

te równania są nieliniowe...


Efekt motyla
Po $t \approx 23$
oba rozwiązania
nie mają już ze sobą
nic wspólnego
z(t)−z(t)
20
10
- 10
- 20
- 30
5
10
15
20
25
30
t

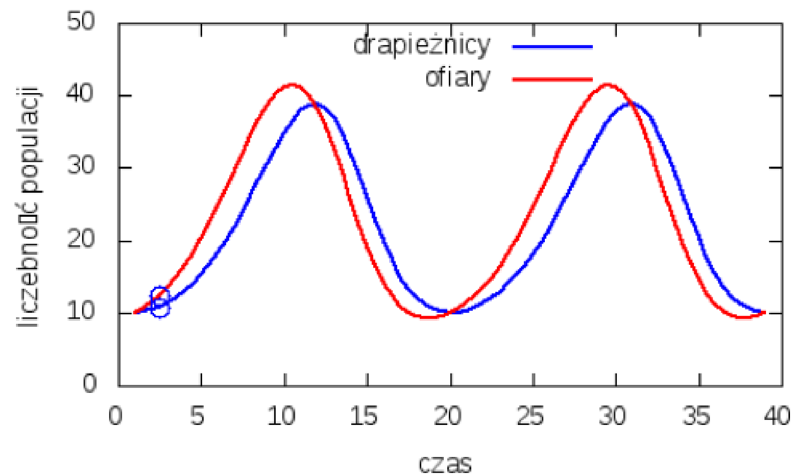
Przykład

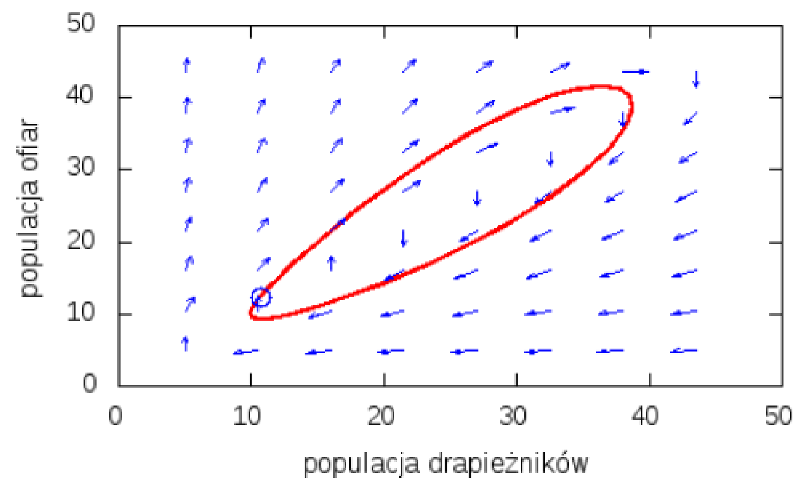
Równania Lotki-Voltery

$$\frac{du}{dt} = u(1 - v)$$

$$\frac{dv}{dt} = av(u - 1)$$

- Model układu drapieżnik (v) – ofiara (u); a jest parametrem modelu





Równania Lotki-Voltery w Octave

$$\underbrace{\frac{du}{dt}}^{=x_1} = u(1 - v)$$

$$\underbrace{\frac{dv}{dt}}^{=x_2} = 1.5v(u - 1)$$

dwa równania ⇒ parametr x funkcji to dwuelementowy wektor stanu; funkcja zwraca prawe strony równania jako wektor dwuelementowy (**dx**)

```
function dx = lotka_voltera (x, t)
  dx = zeros(2,1);   # wektor dwuelementowy
  a = 1.5;           # parametr
  u = x(1);          # x to zmienne zależne
  v = x(2);
  dx(1) = u*(1-v);      # pierwsze równanie
  dx(2) = a*v*(u-1);  # drugie równanie
endfunction
```

lub:

```
f = @(x,t) [x(1)*(1-x(2)), 1.5*x(2)*(x(1)-1)];
```

$$\underbrace{x(1)}_{u}\quad \underbrace{x(2)}_{v}\quad \underbrace{x(2)}_{v}\quad \underbrace{x(1)}_{u}$$

Równania Lotki-Voltery w Octave

czas (wektor 1xN)

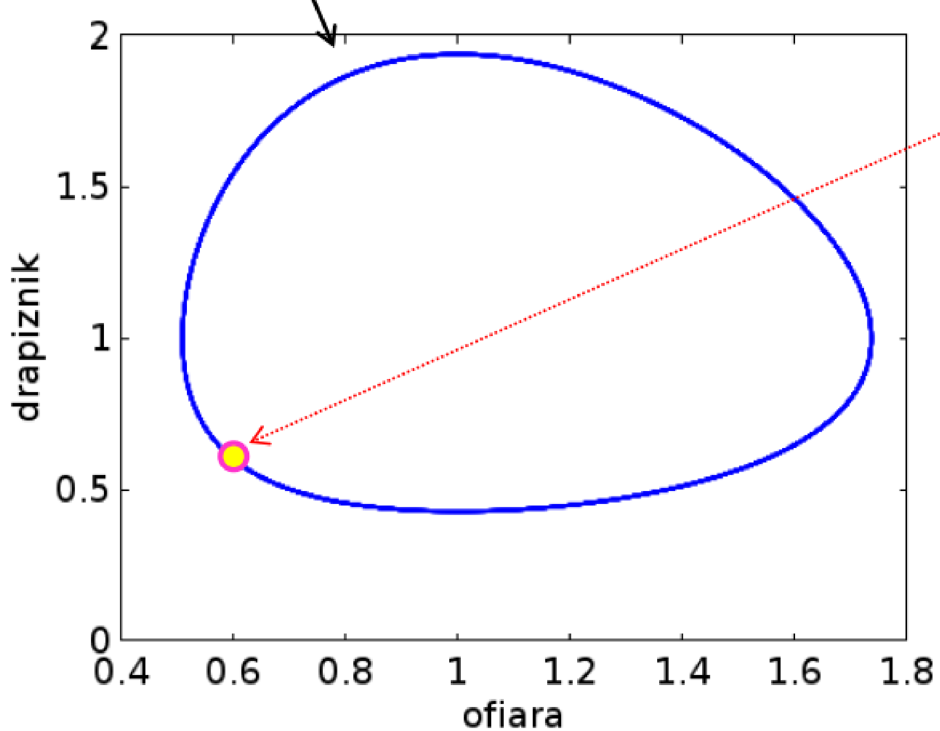
rozwiązanie (wektor 2xN)

```
t = 0:0.01:20;
sol = lsode("lotka_voltera", [0.6,0.6], t);
plot(sol(:,1), sol(:,2), "b");
```

$= x_1$ $= x_2$

użycie wyniku

warunek początkowy (wektor 1x2)



Wolfram Alpha

solve (dx/dt = -x)

wprowadzenie równania

Assuming "solve" is referring to equation solving | Use as a word instead

Input interpretation:

solve	$x'(t) = -x$

interpretacja

Separable equation:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -1$$

równanie o zmiennych rozdzielonych

ODE classification:

first-order linear ordinary differential equation

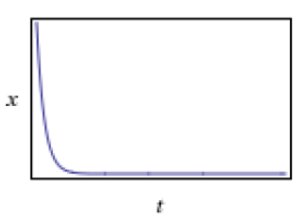
klasyfikacja równania: pierwszego rzędu, liniowe, zwyczajne równanie różniczkowe

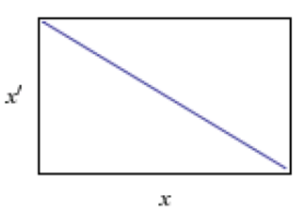
Differential equation solution:

$$x(t) = c_1\, e^{-t}$$

rozwiązanie ogólne

Plots of sample individual solution:





$x(0) = 1$

Wykres rozwiązania dla szczególnego warunku początkowego solve (x''=-x, x(0) = 1, x'(0) = 0)

równanie i warunki początkowe

Input:

$\{x''(t) = -x(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0\}$

interpretacja

ODE names:

klasa równania

Autonomous equation:

$x''(t) = -x(t)$

Van der Pol's equation:

$x''(t) + x(t) = 0$

ODE classification:

second-order linear ordinary differential equation

klasyfikacja równania:
drugiego rzędu, liniowe, zwyczajne
równanie różniczkowe

Alternate form:

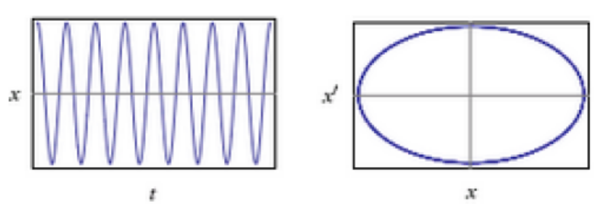
$\{x''(t) + x(t) = 0,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0\}$

Differential equation solution:

rozwiązanie

$x(t) = \cos(t)$

Plots of the solution:



wykres

układ równań i warunki początkowe

solve (x' = y+z, y'=x-z+1, z'= x+y+3, x(0)=1, y(0)=1, z(0)=0)

Input:

$$\{x'(t) = y(t) + z(t),\ y'(t) = x(t) - z(t) + 1,\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3,\ x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0\}$$

interpretacja

ODE classification:

First-order system of linear differential equations

klasyfikacja:
układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

Share

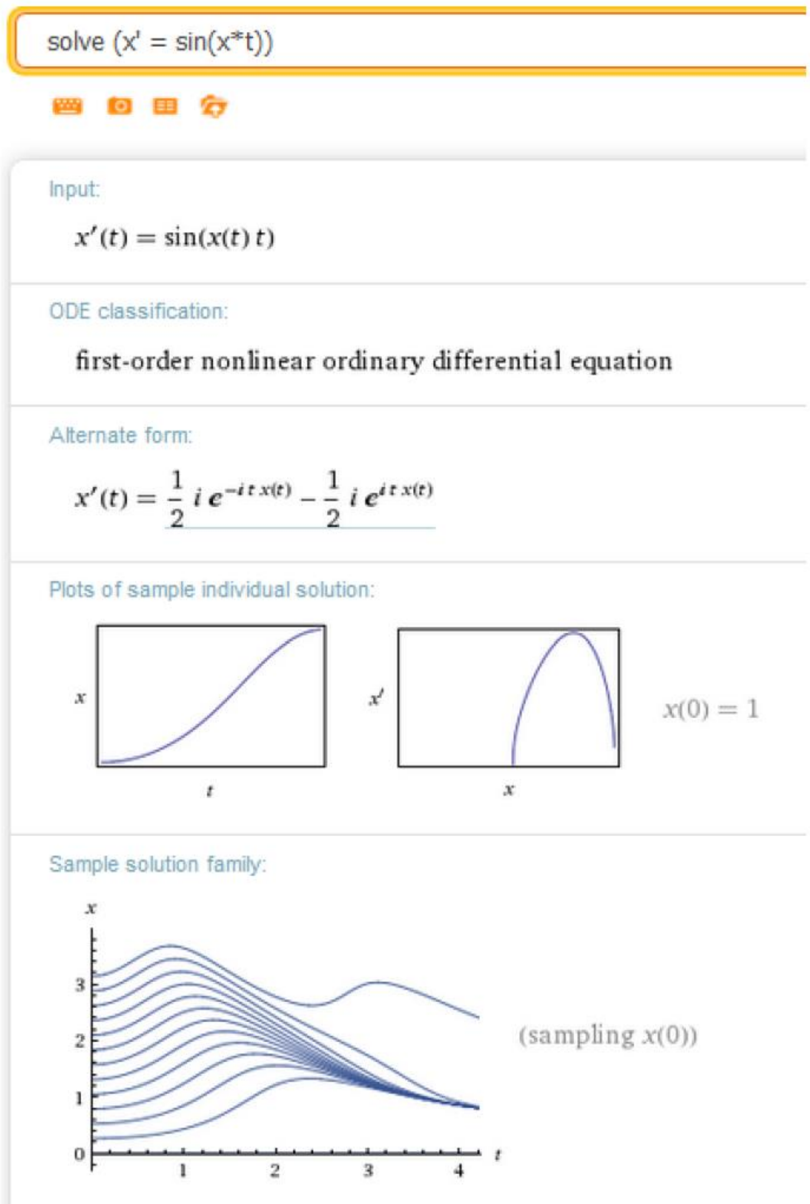
Differential equation solutions:

$$x(t) = 2t + 4e^{-t} + 3e^{t} - 6$$

$$y(t) = -2t - 4e^{-t} + 5$$

$$z(t) = 2t + 3e^{t} - 3$$

rozwiązanie



równanie

interpretacja

klasyfikacja równania:
pierwszego rzędu, nieliniowe,
zwyczajne równanie różniczkowe

wykres rozwiązania dla
szczególnego warunku
początkowego

wykres rozwiązania dla
kilku warunków
początkowych

Wolfram Mathematica

DSolve

Solve a differential equation:

In[1]:= **DSolve[y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[x], x]**

Out[1]= $\left\{\left\{y[x] \to e^{-x} c_1 + \frac{1}{2} a (-\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x])\right\}\right\}$

Include a boundary condition:

In[2]:= **DSolve[{y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[0] == 0}, y[x], x]**

Out[2]= $\left\{\left\{y[x] \to -\frac{1}{2} a e^{-x} (-1 + e^{x} \mathrm{Cos}[x] - e^{x} \mathrm{Sin}[x])\right\}\right\}$

Obtain the general solution of a higher-order differential equation:

In[1]:= **DSolve[{y''[x] + 4 y[x] == 7}, y[x], x]**

Out[1]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{7}{4} + c_1 \mathrm{Cos}[2 x] + c_2 \mathrm{Sin}[2 x]\right\}\right\}$

Particular solution:

In[2]:= **DSolve[{y''[x] + 4 y[x] == 7, y[0] == 1, y'[0] == 2}, y[x], x]**

Out[2]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{4} (7 - 3 \mathrm{Cos}[2 x] + 4 \mathrm{Sin}[2 x])\right\}\right\}$

NDSolve

Solve a first-order ordinary differential equation:

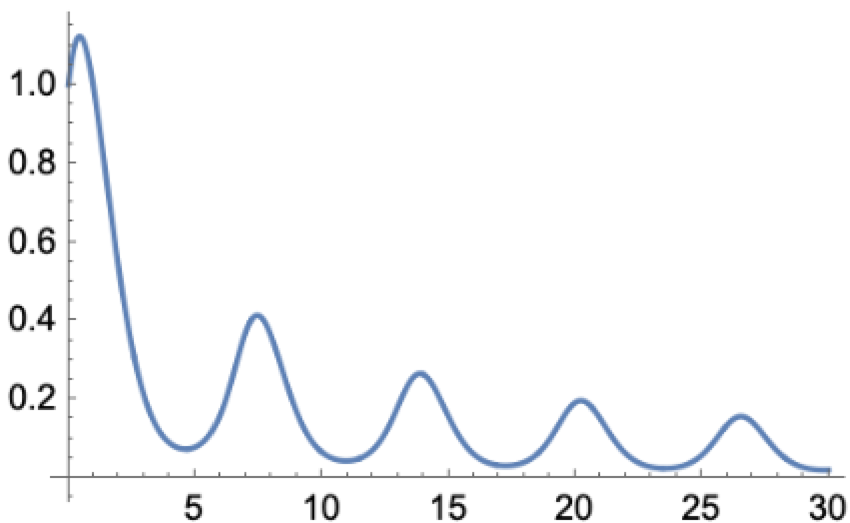
In[1]:=
```
s = NDSolve[{y'[x] == y[x] × Cos[x + y[x]], y[0] == 1}, y, {x, 0, 30}]
```

Out[1]=
```
{{y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 30.}} Output: scalar ]}}
```

Use the solution in a plot:

In[2]:=
```
Plot[Evaluate[y[x] /. s], {x, 0, 30}, PlotRange → All]
```

Out[2]=



Use the function and its derivative in a plot:

In[3]:=
```
ParametricPlot[Evaluate[{y[x], y'[x]} /. s], {x, 0, 20}]
```

Out[3]=