

Matematyka dla informatyki stosowanej i systemów pomiarowych

2024/2024

dr Remigiusz Durka

Instytut Fizyki Teoretycznej

*Zakład Teorii Grawitacji i Oddziaływań
Fundamentalnych*



**Uniwersytet
Wrocławski**

Odruch Pawłowa

- ▶ Kupić lampkę, którą używać tylko do nauki.

Trenować intuicję

- ▶ Pada pytanie? Starać się dać w głowie odpowiedź
- ▶ Dobra odpowiedź: +10 do samopoczucia!
- ▶ Zła odpowiedź: zastanowić się czemu polegliśmy

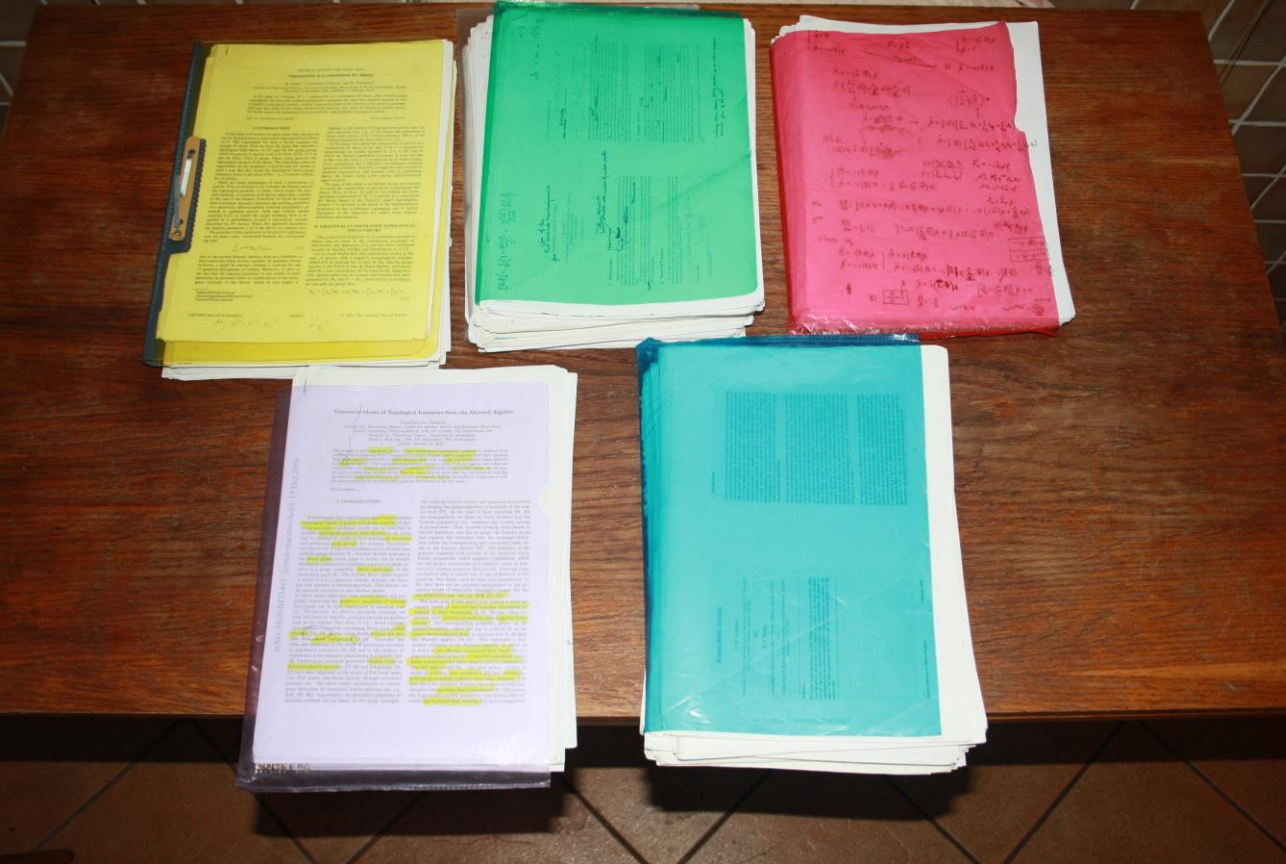
Egzaminy i sprawdziany

- ▶ Jeśli zarywać noce, to robić to **poza ostatnią nocą!**
- ▶ 15% lepsze wyniki dzięki picu wody przed sprawdzianem.

*Tak jak od sportowców oczekujemy naturalnej sportowej rywalizacji,
tak od studentów na kierunkach ścisłych oczekujemy odruchowego:*

ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW!





- ▶ Trzymaj **porządek** w papierach!
- ▶ Zakup całą **ryzę papieru!** (zwolnienie z ekologii na 3 lata)
- ▶ Dzięki Uwr - masz MS Teams, Worda, PowerPointa, Excella oraz folder **OneDrive (1 TB)**
- ▶ Zrób sobie podfoldery z: Wykład, Ćwiczenia
- ▶ Używaj Chatów do pisania notatek.
- ▶ Współpracuj z ludźmi (ale nie odpisuj)
- ▶ Nabywaj wartościowe umiejętności
(język obcy, jak się uczyć, jak prezentować rzeczy, etc.)

Ciągi

(ogólny wyraz, granica, suma)

Ciąg to przyporządkowanie wszystkim liczbom naturalnym z przedziału $\langle 1, n \rangle$ (lub wszystkim liczbom naturalnym), elementów z pewnego zbioru.

(ciąg skończony vs ciąg nieskończony)

Etykiety (labels)

$$n = \{1, 2, \dots\}$$

Ciąg to funkcja

$$f: n \rightarrow a_n \quad \text{gdzie} \quad f(n) = a_n$$

Przykład 1.

- 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6... - ciąg kolejnych liczb naturalnych.
- 2) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... - ciąg kolejnych liczb parzystych dodatnich.
- 3) 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ... - naprzemienny ciąg liczb dodatnich i ujemnych.
- 4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ - malejący ciąg ułamków.
- 5) 3, 9, 27, 81, 243, ... - ciąg kolejnych potęg 3.
- 6) 80, 77, 74, 71, 68, 65, 62, 59, 56, ... - ciąg malejący

$$a_n = (-1)^n \cdot 3$$

↓

$$-3, 3, -3, 3, -3, \dots$$

Alternating harmonic series

The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$$

is known as the **alternating harmonic series**. It is [conditionally convergent](#) by the [alternating series test](#), but not [absolutely convergent](#). Its sum is the [natural logarithm of 2](#).

Using alternating signs with only odd unit fractions produces a related series, the [Leibniz formula for \$\pi\$](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Ciągi arytmetyczny i geometryczny

Arithmetic	Geometric
$a_n = a_1 + (n - 1)r$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$	$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$
$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Ciągi arytmetyczne i geometryczne to
nie wszystko!!!

Szeregi

Dla danego nieskończonego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) definiuje się N -tą **sumę częściową** ciągu (a_n) bądź *sumę częściową szeregu* wzorem

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Szeregiem nazywa się ciąg (s_N) sum częściowych.

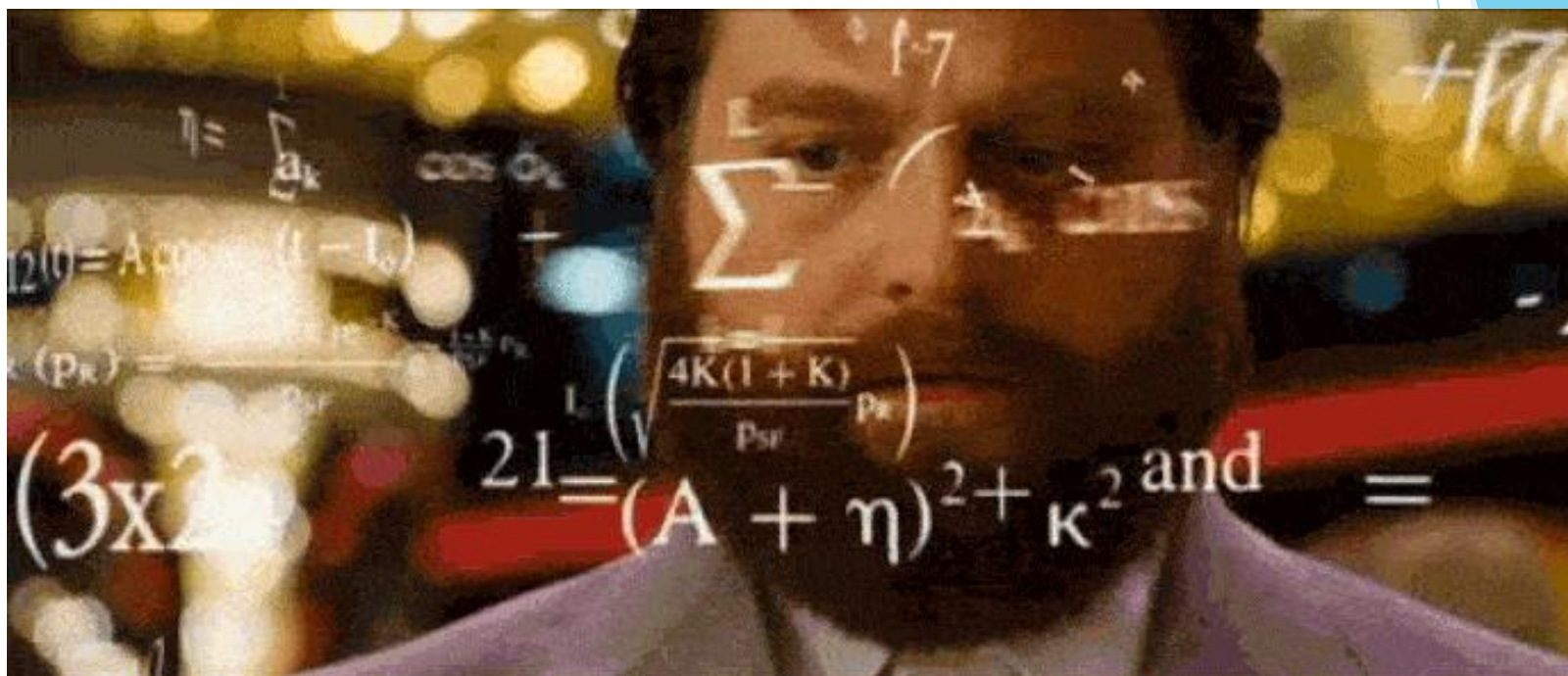
Sumą szeregu nazywa się liczbę $S = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$, o ile **granica** ta istnieje i jest właściwa. W przeciwnym przypadku szereg nie ma sumy.

Szereg, który ma sumę nazywa się zbieżnym, który jej nie ma – rozbieżnym.

Zarówno szereg, jak i jego sumę oznacza się

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Prawidłowe rozwiązywanie zadań powinno wyglądać tak...



ZADANIE: Dany jest ciąg (a_n) geometryczny $a_1=2, a_2=6, a_3, a_4, \dots$
Liczby $a_3, c, c/2$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.
Oblicz c .

Ciąg geometryczny: $a_2 = a_1 q$
czyli $q = 6/2 = 3$

Zaś to daje automatycznie
 $a_3 = a_2 q = 6 * 3 = 18$

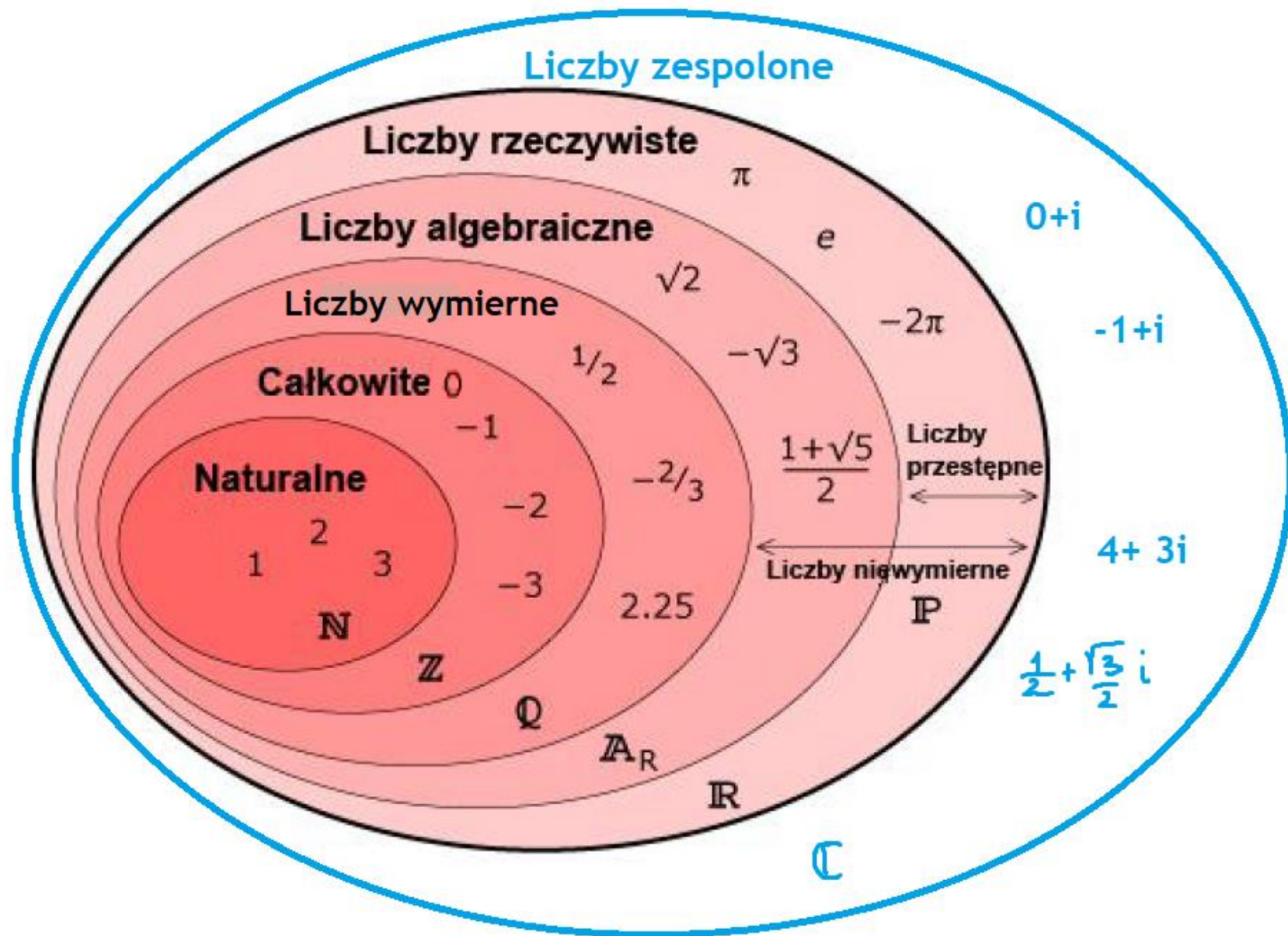
Ciąg arytmetyczny? $b_2 - b_1 = r$ oraz $b_3 - b_2 = r$

$c - 18 = r = c/2 - c$ (czyli możemy odpuścić r)
 $c - 18 = c/2 - c$

$c + c/2 = 18$
 $3/2 c = 18$
 $c = 12$

Sprawdzenie!!! Czy: $\{2, 6, 18\}$ jest geometryczny? Czy $\{18, 12, 6\}$ jest arytmetyczny?

Liczby



Liczby

► Liczby naturalne ($\mathbb{N}$):

- Zbiór liczb naturalnych: $N=\{1,2,3,\dots\}$
- Są to liczby, które wykorzystujemy do liczenia i porządkowania.
- Czasami zbiór liczb naturalnych zaczyna się od 0, co zależy od przyjętej definicji: $N^*=\{0,1,2,3,\dots\}$

► Liczby całkowite ($\mathbb{Z}$):

- Zbiór liczb całkowitych: $Z=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$
- Zawiera wszystkie liczby naturalne oraz ich przeciwne (liczby ujemne).
- Umożliwia reprezentację wartości poniżej zera, co jest istotne w wielu dziedzinach inżynierskich.

Liczby wymierne

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

- ▶ Liczby wymierne to liczby rzeczywiste, które można przedstawić w postaci ilorazu liczby całkowitej i liczby całkowitej różnej od zera.
- ▶ Rozwinięcie dziesiętne liczby wymiernej jest skończone i okresowe.
- ▶ Każdą liczbę wymierną można rozwinąć w skończony ułamek łańcuchowy.

$$A = 0.7162162162 \dots$$

Here the repetend is 162 and the length of the repetend is 3. First, we multiply by an appropriate power of 10 to move the decimal point to the right so that it is just in front of a repetend. In this example we would multiply by 10 to obtain:

$$10A = 7.162162162 \dots$$

Now we multiply this equation by 10^r where r is the length of the repetend. This has the effect of moving the decimal point to be in front of the "next" repetend. In our example, multiply by 10^3 :

$$10,000A = 7162.162162 \dots$$

The result of the two multiplications gives two different expressions with exactly the same "decimal portion", that is, the tail end of $10,000A$ matches the tail end of $10A$ exactly. Here, both $10,000A$ and $10A$ have .162162162... after the decimal point.

Therefore, when we subtract the $10A$ equation from the $10,000A$ equation, the tail end of $10A$ cancels out the tail end of $10,000A$ leaving us with:

$$9990A = 7155.$$

Then

$$A = \frac{7155}{9990} = \frac{53}{74}$$

It is not known if πe , π/e , π^e , $\pi^{\sqrt{2}}$, $\ln \pi$, Catalan's constant, or the Euler–Mascheroni constant γ are irrational

Perhaps the numbers most easy to prove irrational are certain [logarithms](#).

Assume $\log_2 3$ is rational. For some positive integers m and n , we have

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}.$$

It follows that

$$2^{m/n} = 3$$

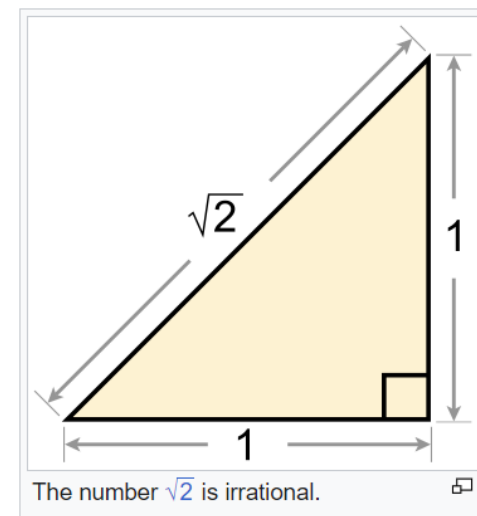
$$(2^{m/n})^n = 3^n$$

$$2^m = 3^n.$$

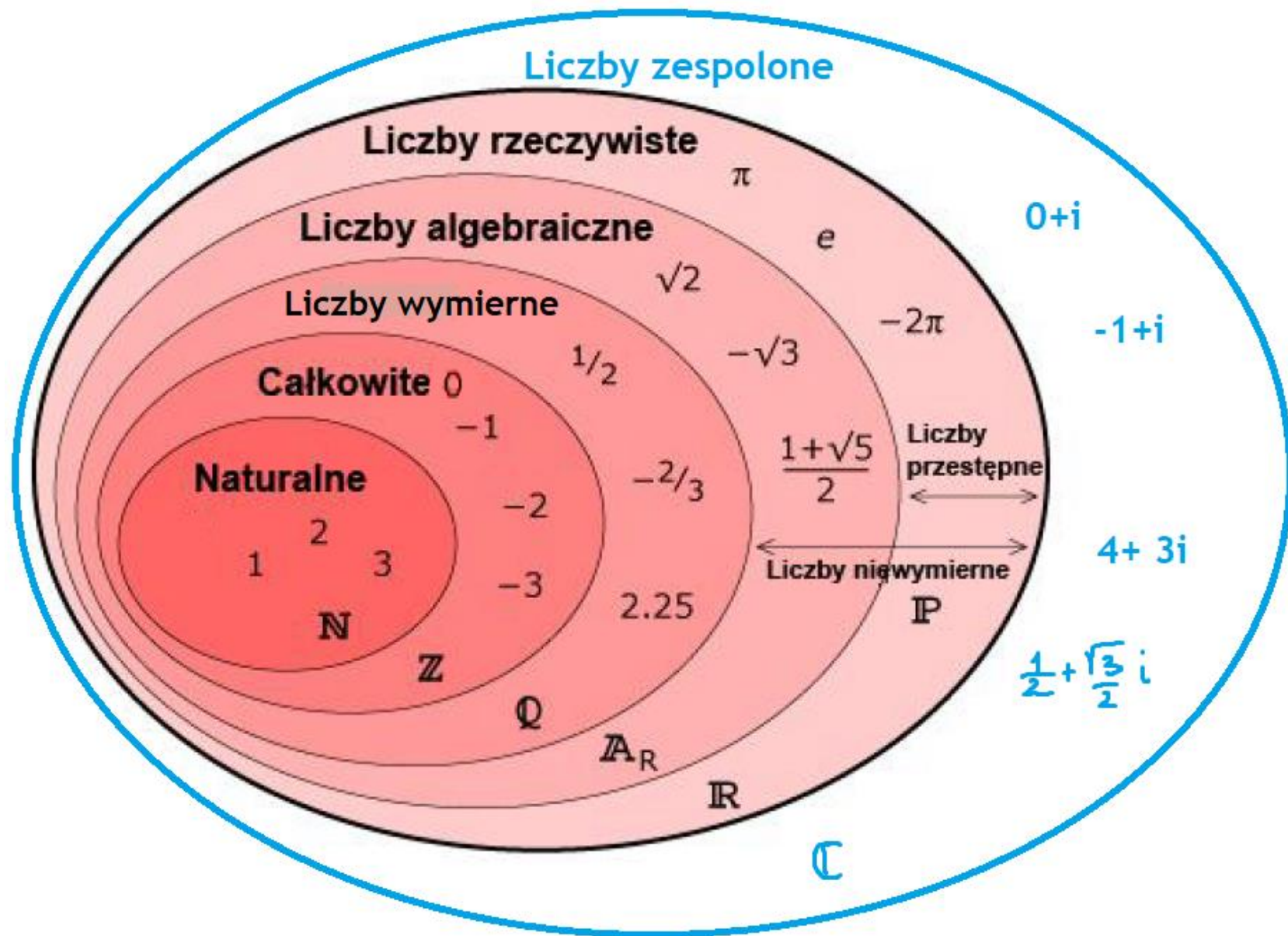
Czy $0,999\dots = 1$?

Liczby niewymierne

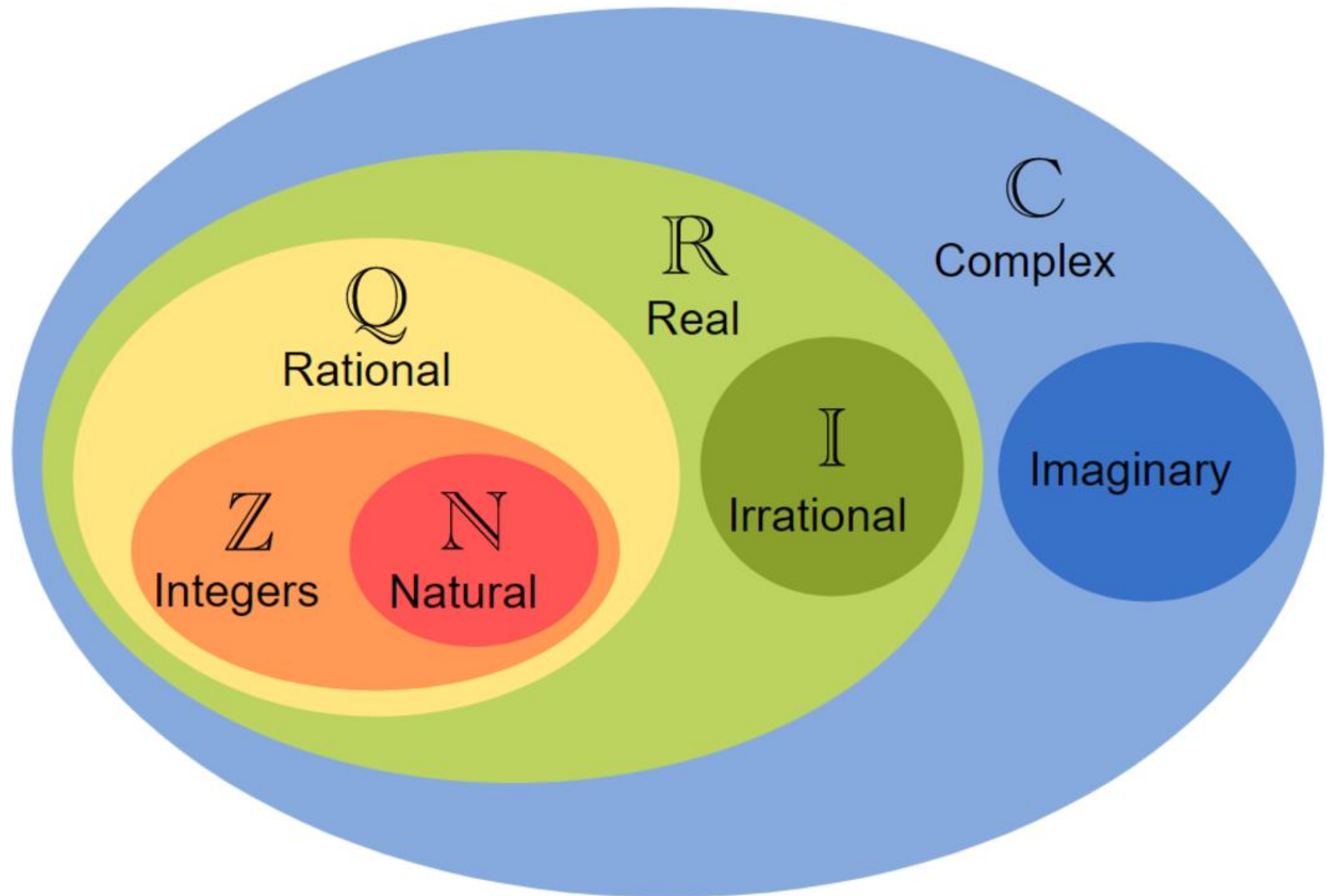
- ▶ **Liczby niewymierne** to liczby rzeczywiste niebędące **liczbami wymiernymi**, czyli takie liczby rzeczywiste, których nie można przedstawić w postaci ilorazu liczby całkowitej i liczby całkowitej różnej od zera.
- ▶ **Rozwinięcie dziesiętne** liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.
- ▶ Każdą liczbę niewymierną można rozwinąć w nieskończony **ułamek łańcuchowy**.



Liczby



Liczby



Liczby zespolone = rzeczywiste+urojone

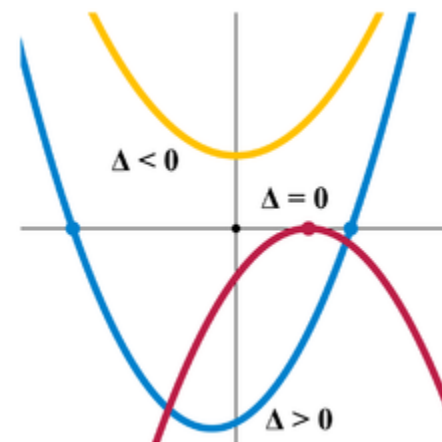
Historia poszukiwania rozwiązania $x^2 + 1 = 0$

Rozważmy równanie kwadratowe:

$$x^2 + 1 = 0$$

Przekształćmy je, aby znaleźć rozwiązanie:

$$x^2 = -1$$



W tym momencie napotykamy problem, ponieważ żadna rzeczywista liczba podniesiona do kwadratu nie może dać wyniku ujemnego. Jednakże, wprowadzając pojęcie jednostki urojonej i , która spełnia $i^2 = -1$, możemy zapisać rozwiązanie w postaci:

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Stąd mamy dwa rozwiązania:

$$x_1 = i, \quad x_2 = -i$$

Liczby zespolone = rzeczywiste+urojone

Liczby zespolone

Rozwiązanie to zapoczątkowało ideę liczb zespolonych. Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci:

$$z = a + bi$$

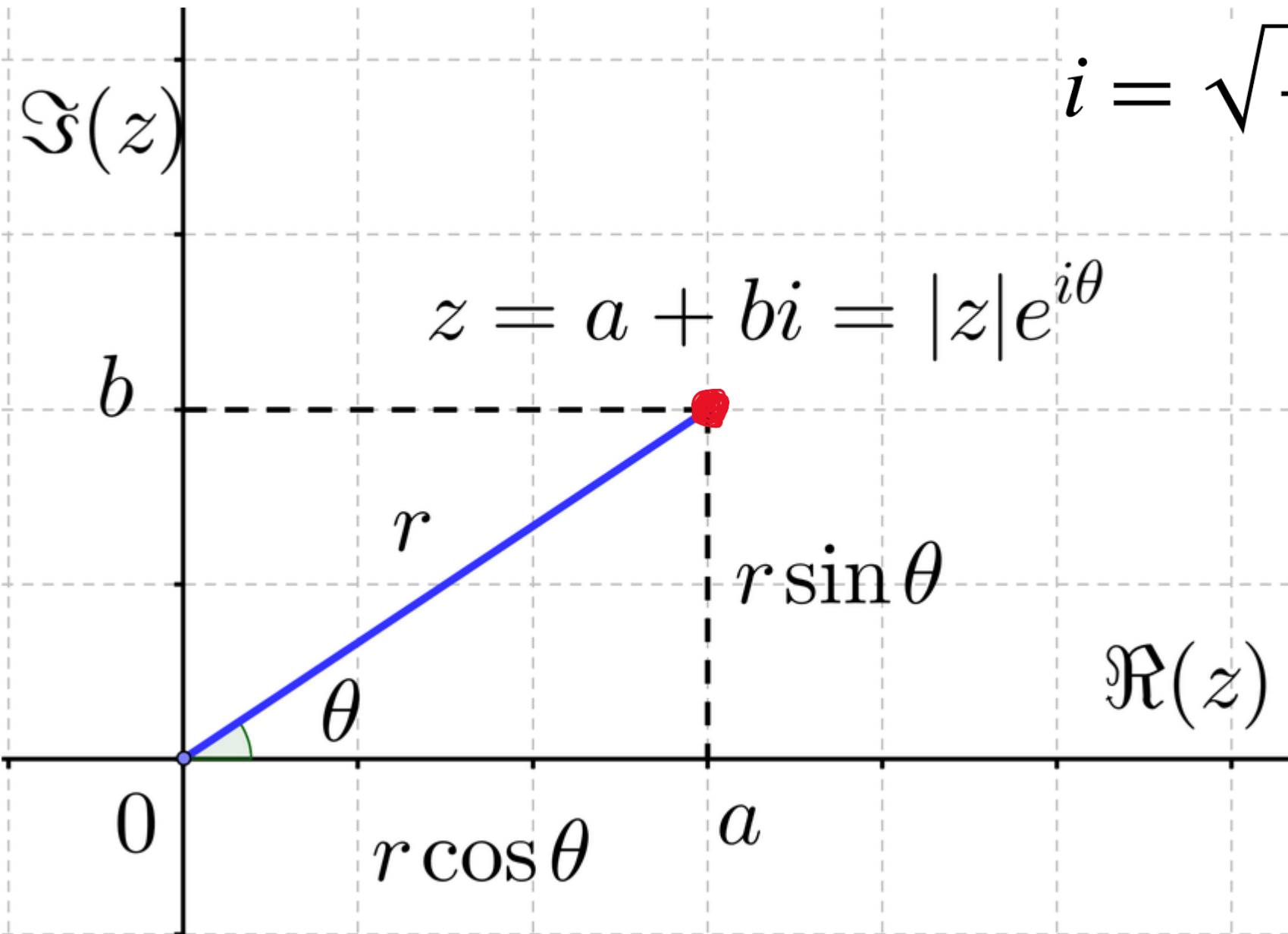
gdzie a to część rzeczywista, a b to część urojona. W ten sposób każda liczba rzeczywista jest szczególnym przypadkiem liczby zespolonej, gdy $b = 0$.

Diagram illustrating the components of a complex number $z = a + bi$:

- a is labeled as **część rzeczywista** (Real part) and $\text{Re}(z)$.
- b is labeled as **część urojona** (Imaginary part) and $\text{Im}(z)$.
- i is labeled as **jednostka urojona** (Imaginary unit) and is defined as $i = \sqrt{-1}$.

Liczby zespolone = rzeczywiste+urojone

$$i = \sqrt{-1}$$



Dwumian Newtona

Dwumianem Newtona nazywamy wzór:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

gdzie symbol $\binom{n}{k}$ oznacza współczynnik dwumianowy i jest obliczany ze wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Silnia

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Potęgi i silnia

$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a \quad \div a$$

$$a^2 = a \cdot a \quad \div a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \quad \div a$$

$(-1)!$ is undefined.

$$0! = 1 \quad (\text{by definition})$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Wzory do zapamiętania

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Mnożenie jako szybkie dodawanie

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_4 = \text{'cztery razy trzy'} = 4 \cdot 3 = 12$$

Potęgowanie jako szybkie mnożenie

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_4 = \text{'trzy do potęgi czwartej'} = 3^4 = 81$$

Co następne?

$$\begin{cases} x^a & \text{funkcja potęgowa} \\ a^x & \text{funkcja wykładnicza} \end{cases}$$

$$x^2 \quad \text{versus} \quad 2^x$$

Potęga vs wykładnik

Co szybciej rośnie, x^2 vs 2^x ?

$$x = 10$$

$$x^2 = 10^2 = 100$$

$$2^{10} = 2^5 \cdot 2^5 = 32 \cdot 32 = 1024$$

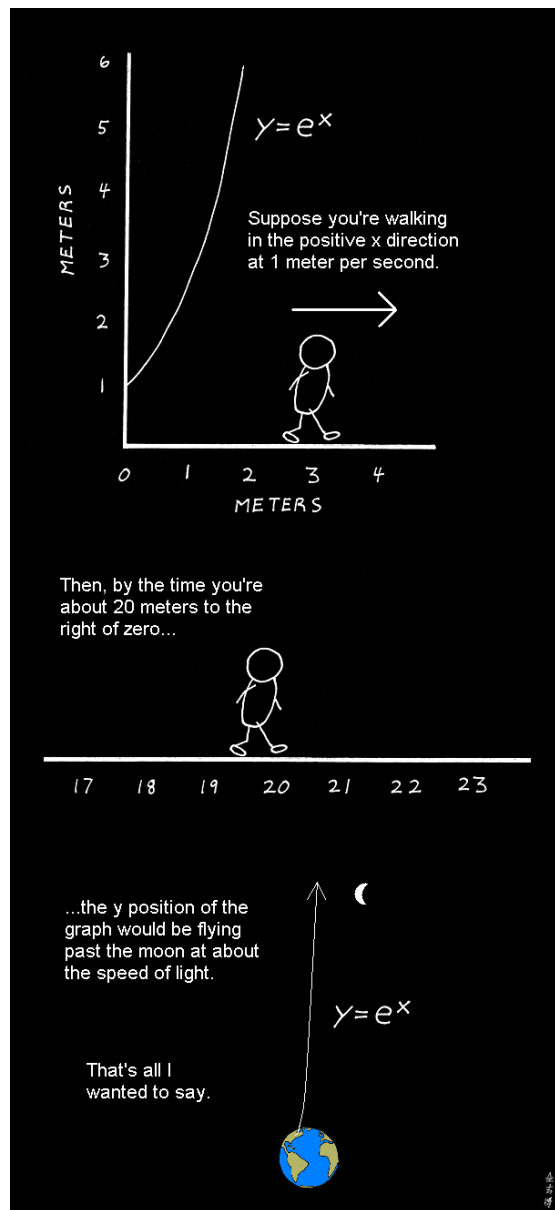
$$x = 100$$

$$x^2 = 100^2 = 10000$$

$$2^{100} = ?$$

Ile cyfr ma liczba 2^{100} , wiedząc, że $\log_{10} 2 = 0.3$?

$$2^{100} = (10^{\log_{10} 2})^{100} = 10^{100 \cdot \log_{10} 2} \approx 10^{30}$$



Logarytmy

$$\log_{\text{red}} \text{blue} = \text{yellow} \iff \text{red}^{\text{yellow}} = \text{blue}$$

$$\text{red}^{(\log_{\text{red}} \text{blue})} = \text{blue}$$

$$\log_{\text{red}} (\text{red}^{\text{blue}}) = \text{blue}$$

$$\log_{\text{red}} (\text{blue} \times \text{yellow}) = \log_{\text{red}} \text{blue} + \log_{\text{red}} \text{yellow}$$

$$\log_{\text{red}} \left(\frac{\text{blue}}{\text{yellow}} \right) = \log_{\text{red}} \text{blue} - \log_{\text{red}} \text{yellow}$$

$$\log_{\text{red}} (\text{blue}^{\text{yellow}}) = \text{yellow} \log_{\text{red}} \text{blue}$$

$$\log_{\text{red}} \text{blue} = \frac{\log_{\text{yellow}} \text{blue}}{\log_{\text{yellow}} \text{red}}$$

$$\log_{\text{red}} (\sqrt[\text{yellow}]{\text{blue}}) = \frac{\log_{\text{red}} \text{blue}}{\text{yellow}}$$

$$\text{yellow}^{(\log_{\text{red}} \text{blue})} = \text{blue}^{(\log_{\text{red}} \text{yellow})}$$

$$\text{yellow}^{(\log_{\text{red}} \text{blue})} = \text{blue}^{(\log_{\text{red}} \text{yellow})}$$

Logarithm Properties

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

The following can be derived from the above

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

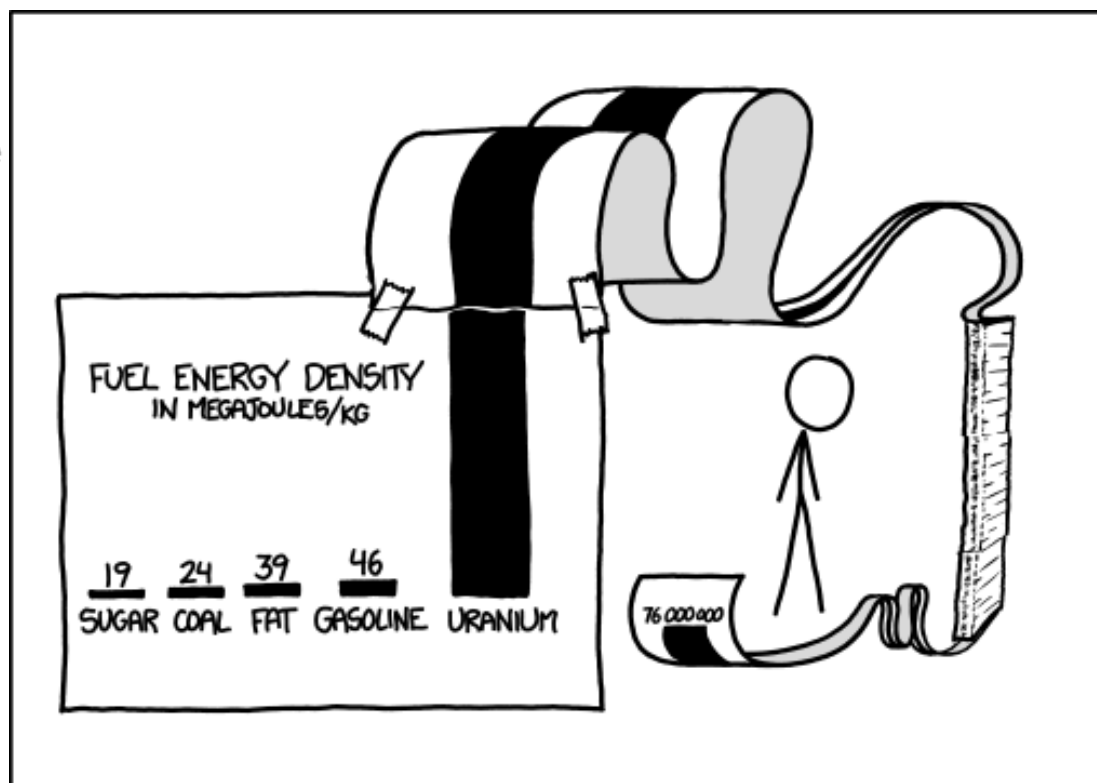
$$\log_a a^r = r$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

$$\log_a b \log_b c = \log_a c$$

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}, m \neq 0$$



SCIENCE TIP: LOG SCALES ARE FOR QUITTERS WHO CAN'T
FIND ENOUGH PAPER TO MAKE THEIR POINT *PROPERLY*.

Liczba e

- ▶ Podstawa logarytmu naturalnego $\log_e (...) = \ln(...)$
- ▶ (domyślnie w Octavie $\log = \ln$, więc potrzeba $\log_{10}$)
- ▶ liczba Nepera - stała matematyczna wykorzystywana w wielu dziedzinach matematyki i fizyki.
- ▶ W przybliżeniu wynosi 2,718281828459...

Jako **granica ciągu**, e jest określana przez

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Jako **suma szeregu**, e jest określana przez

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

Liczbę e można również zdefiniować jako taki argument funkcji

$$f(x) = x^{1/x}, \quad x > 0$$

dla którego jej wartość jest największa.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Thanos problem



log_2 (people on Earth/1 person)

Extended Keyboard

Upload

Input interpretation:

$$\log_2 \left(\frac{\text{world population}}{1 \text{ person}} \right)$$

$\log_b(x)$ is the base- b logarithm

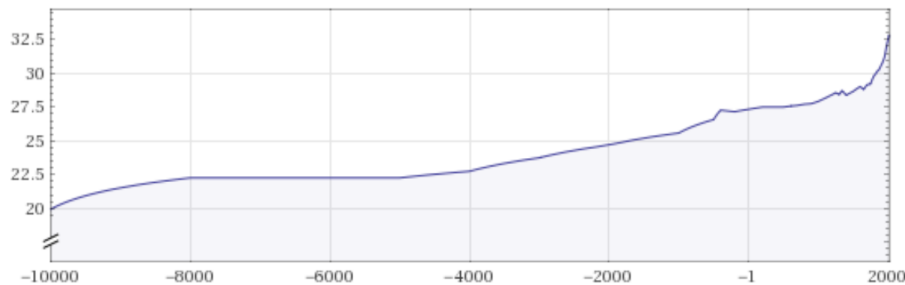
[Open code](#)

Result:

[Show details](#)

32.8 (2017 estimate)

History:



(from 10000 BC to 2017)

