Całki

Remigiusz Durka

Insitute of Theoretical Physics
Uniwersity of Wrocław

Notacja

pochodna:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r, bend left] & v(t) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

całka:

$$x = \int v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

1 Całka nieoznaczona

Całkowanie może być traktowane jako operacja odwrotną do różniczkowania. Definiujemy ją z grubsza w następujący sposób.
Operację całkowania funkcji jednej zmiennej $f(x)$ zapisujemy w postaci

$$\int f(x)\,dx = F(x),$$

przy czym w wyniku całkowania otrzymujemy taką funkcję $F(x)$, która po zróżniczkowaniu daje funkcję podcałkową $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

$F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną. Zauważmy, że takich funkcji jest nieskończenie wiele, gdyż dodanie dowolnej stałej do $F(x)$ daje funkcję pierwotną równie dobrą jak $F(x)$ (bo pochodna stałej jest równa zero i $\frac{d}{dx}(F(x)+C) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$).

Sposób czytania

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

„Całka z ef od iks **po** de iks”

Całka nieoznaczona - definicja

- Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną na pewnym przedziale P. Każdą funkcję $F(x)$ różniczkowalną na P i spełniającą w każdym punkcie $x \in P$ warunek

$$F'(x) = f(x)$$

nazywamy ***funkcją pierwotną*** funkcji f
lub ***całką nieoznaczoną*** funkcji f
lub po prostu ***całką*** funkcji f i oznaczamy

$$\int \boldsymbol{f(x)dx}$$

Całkowanie a różniczkowanie

- Całkowanie funkcji to po prostu obliczanie dowolnej całki tej funkcji
- Całkowanie (funkcji ciągłej) jest operacją odwrotną do różniczkowania:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f$$

$$\int F'(x)dx = F + C$$

Całkowanie przez części

$$\boxed{f g' = f \cdot g - f' \cdot g}$$

$$\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

$$f = \ln x \qquad g' = x$$

$$f' = \frac{1}{x} \qquad g = \frac{1}{2} x^2$$

Check $\left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \right)'$

$$= \frac{2}{2} x \cdot \ln x + \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} x + 0$$

$$= x \cdot \ln x$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int x\cdot\cos(\underbrace{x^2+1}_{})\,\underbrace{dx}_{} = \int \cancel{x}\cdot\cos(u)\,\frac{1}{2\cancel{x}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int\cos(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\sin(u)+C$$

$$= \frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$$

$$x^2+1=u$$

$$d(x^2+1)=du$$

$$2x\cdot dx=du$$

$$dx=\frac{du}{2x}$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int \frac{x\,dx}{(2x^2+3)} = \int \frac{\cancel{x} \cdot \frac{du}{4\cancel{x}}}{u} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+3| + C$$

$$2x^2 + 3 = u$$

$$4x\,dx = du$$

$$dx = \frac{du}{4x}$$

Całka oznaczona

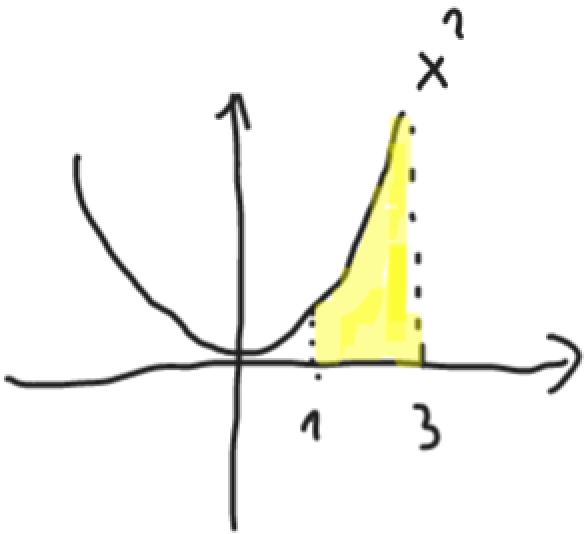
- Niech F będzie dowolną całką nieoznaczoną funkcji f ciągłej na przedziale $[a, b]$. Wtedy różnicę

$$F(b) - F(a)$$

nazywamy **całką oznaczoną** funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}$$

Całka oznaczona



$$P = \int_1^3 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + \cancel{C}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \cancel{C}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(3^3 - 1\right) = \frac{26}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \left(-\cos x + C\right)\Bigg|_0^\pi = \left(-\overset{-1}{\underline{\cos\pi}} + \cancel{C}\right) - \left(-\overset{1}{\underline{\cos 0}} + \cancel{C}\right)$$

$$= +1 + 1 = 2$$

Całka oznaczona

Przykład 2

- pole

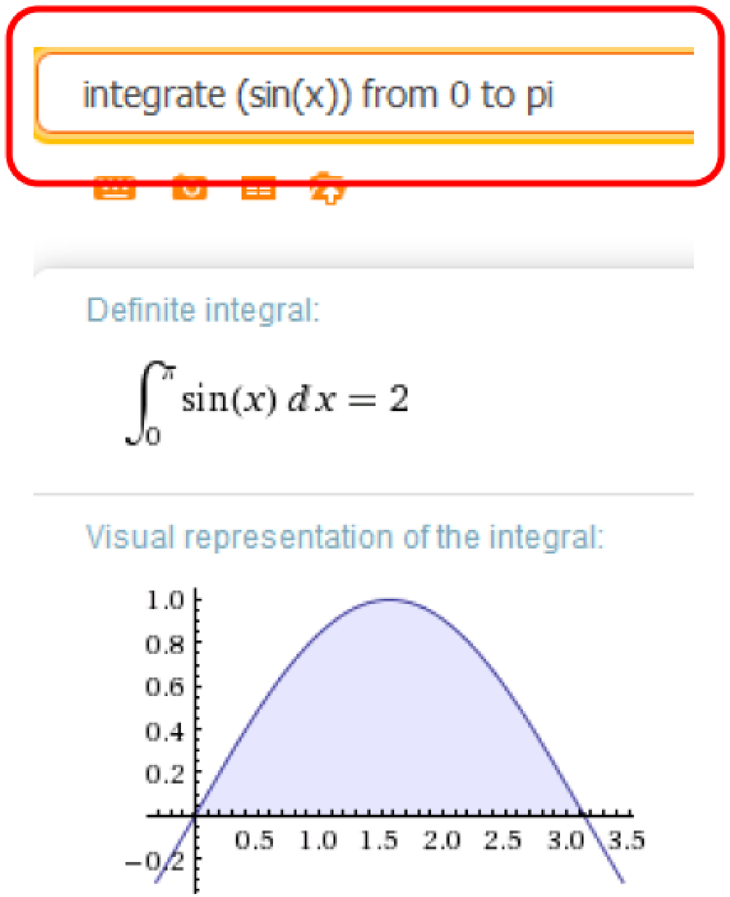
$$f(x) = \sin(x)$$

$$\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx =$$

$$-\cos x \Big|_{x=0}^{\pi} =$$

$$-(\cos \pi - \cos 0) =$$

$$-(-1 - 1) = 2$$



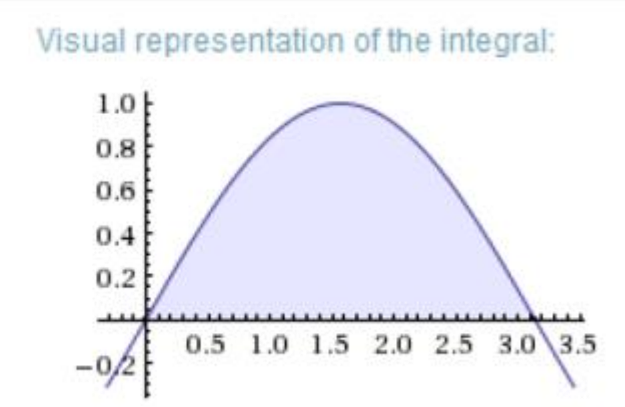
Fizyka

$x(t)$ położenie

$V(t)$ prędkość = pochodna $x(t)$ po t

$a(t)$ przyspieszenie = pochodna $V(t)$ po t

Droga = całka $V(t)$ po d t od t_1 do t_2
=(pole powierzchni pod funkcją $V(t)$)



Trajektoria = krzywa, którą zakreśla w przestrzeni poruszający się obiekt

Metody numeryczne

- Opierają się na całce Riemanna (sumowanie plus ekstrapolacja)
- Octave – 5 metod:

```
quad   (f, a, b)
quadv  (f, a, b)
quadl  (f, a, b)
quadgk (f, a, b)
quadcc (f, a, b)
```

Przykład

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

```
>> quad(@(x)(1/sqrt(x)), 0, 1)
   ans =  2.00000000000000
>> [q, ier, nfun, err] =   quad(@(x)(1/sqrt(x)), 0, 1)
   q =  2.00000000000000  # wartość
   ier = 0                           # 0 oznacza sukces
   nfun =  231                       # liczba wywołań funkcji
   err =   5.77e-015                 # oszacowanie błędu
```