

Matematyka
dla
informatyki stosowanej
i systemów pomiarowych
2023/2024

dr Remigiusz Durka

Instytut Fizyki Teoretycznej
*Zakład Teorii Grawitacji i Oddziaływań
Fundamentalnych*



Uniwersytet
Wrocławski

Zakres zajęć

- ▶ Realizacja w ciągu zaledwie dwóch semestrów w wymiarze 75 godzin na semestr, z czego
- ▶ 45 godzin (3 tygodniowo) zarezerwowano na zajęcia w pracowni komputerowej
- ▶ 30 godzin (2 tygodniowo) przeznaczone są na wykłady

Zaliczenie

- ▶ Ćwiczenia/Laboratorium: 2 kolokwia
- ▶ Wykład: egzamin pisemny

Kurs dostępny online

<http://users.ift.uni.wroc.pl/~zkoza/matematyka/>

- ▶ autor: prof. Zbigniew Koza

<http://ift.uni.wroc.pl/~rdurka/matissp/>

- ▶ autor: dr Remigiusz Durka

Zagadnienia

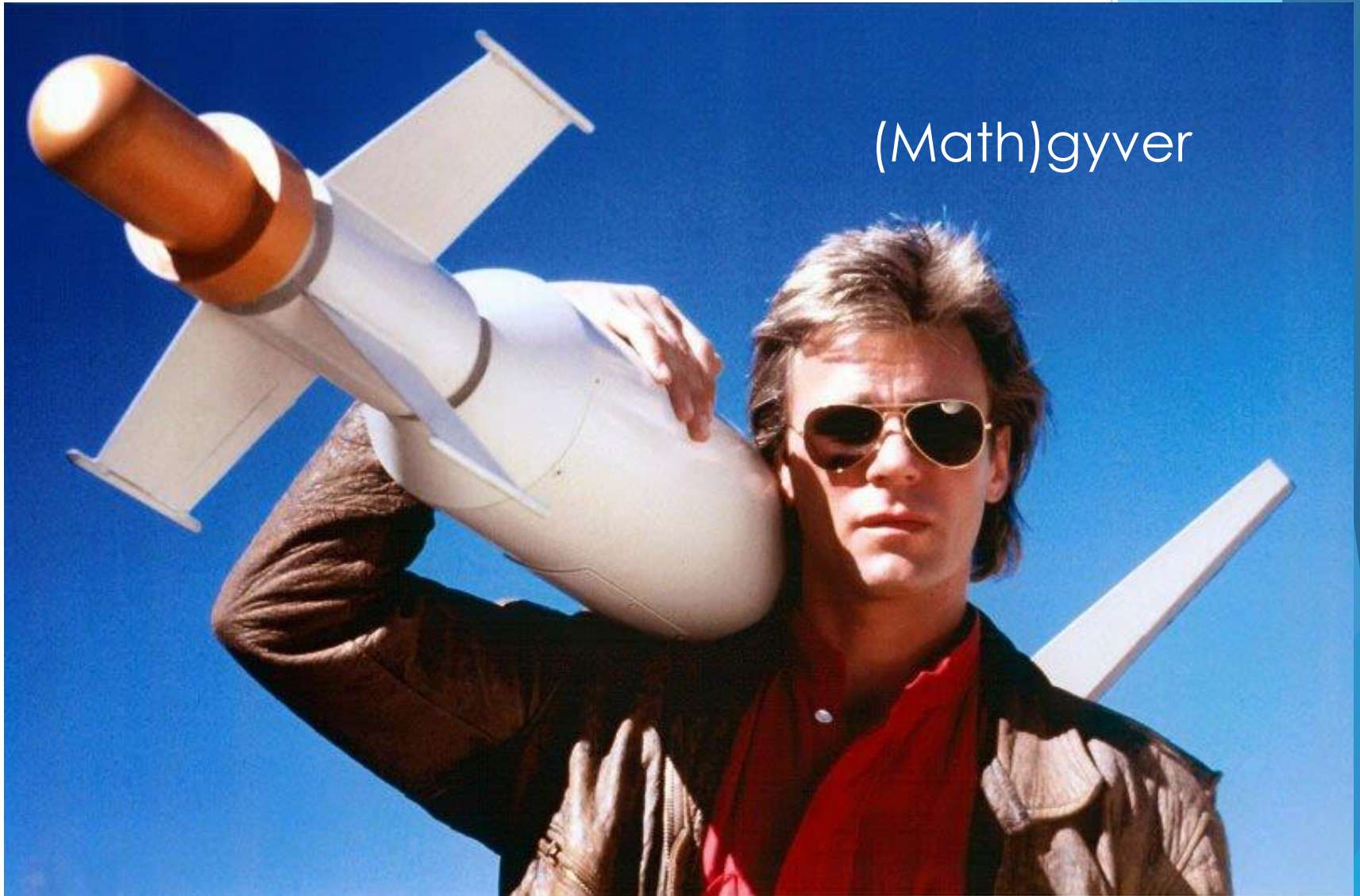
- ▶ Narzędzia informatyczne do obliczeń inżynierskich (numerycznych i symbolicznych)
 - ▶ Granice funkcji, ciągi, szeregi
 - ▶ Funkcje i ich wykresy
 - ▶ Narzędzia do wizualizacji funkcji/danych
 - ▶ Pochodne i całki funkcji jednej i dwóch zmiennych
 - ▶ Równania różniczkowe zwyczajne
 - ▶ Równania różniczkowe cząstkowe
-
- ▶ Liczby zespolone
 - ▶ Wektory i macierze
 - ▶ Układy równań liniowych
 - ▶ Zagadnienie na wartości i wektory własne
 - ▶ Równania nieliniowe i algebraiczne
 - ▶ Interpolacja i aproksymacja

Idea stojąca za kursem

- ▶ Podstawową ideą leżącą u podstaw jego konstrukcji jest przekonanie, że licencjacki kurs matematyki powinien dać studentom **ogólne rozeznanie w matematyce wyższej** traktowanej jako *narzędzie* do rozwiązywania konkretnych problemów a sposób nauczania powinien nadążać za najnowszymi osiągnięciami techniki.
- ▶ Kurs oparty jest na **narzędziach informatycznych:**
(*Octave, Gnuplot, Wolfram Alpha*)

Idea stojąca za kursem

- ▶ Kurs **ten nie ma na celu** kształcenia zawodowych matematyków i w bardzo niewielkim stopniu porusza zagadnienie dla matematyków kluczowe: dowodzenie twierdzeń w oparciu o rygorystyczny formalizm.
- ▶ Nauka matematyki **jako narzędzia** pozwala szybko pokazać jej użyteczność bez wrzucania studentów na zbyt dla nich głębokie wody matematycznej abstrakcji...
- ▶ Wadą takiego podejścia jest oczywiście **groźba powierzchownego potraktowania** matematyki, bo siłą matematyki jest jej zdolność do uogólnień, które z kolei wymagają pewnego poziomu abstrakcji.



(Math)gyver

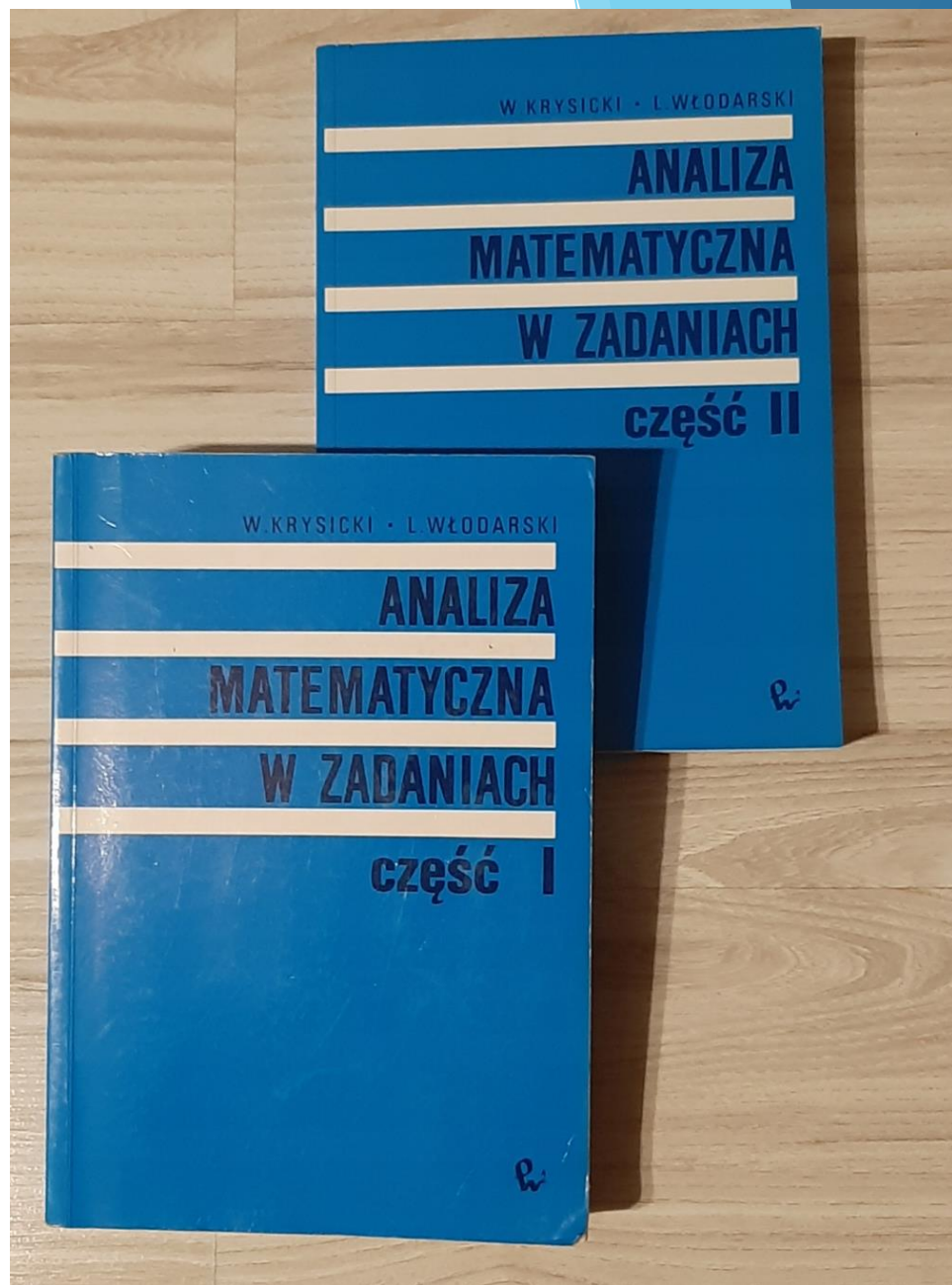
Jednoosobowa armia do rozwiązywania problemów

Analiza matematyczna w zadaniach

tom 1

tom 2

Krysicki, Włodarski

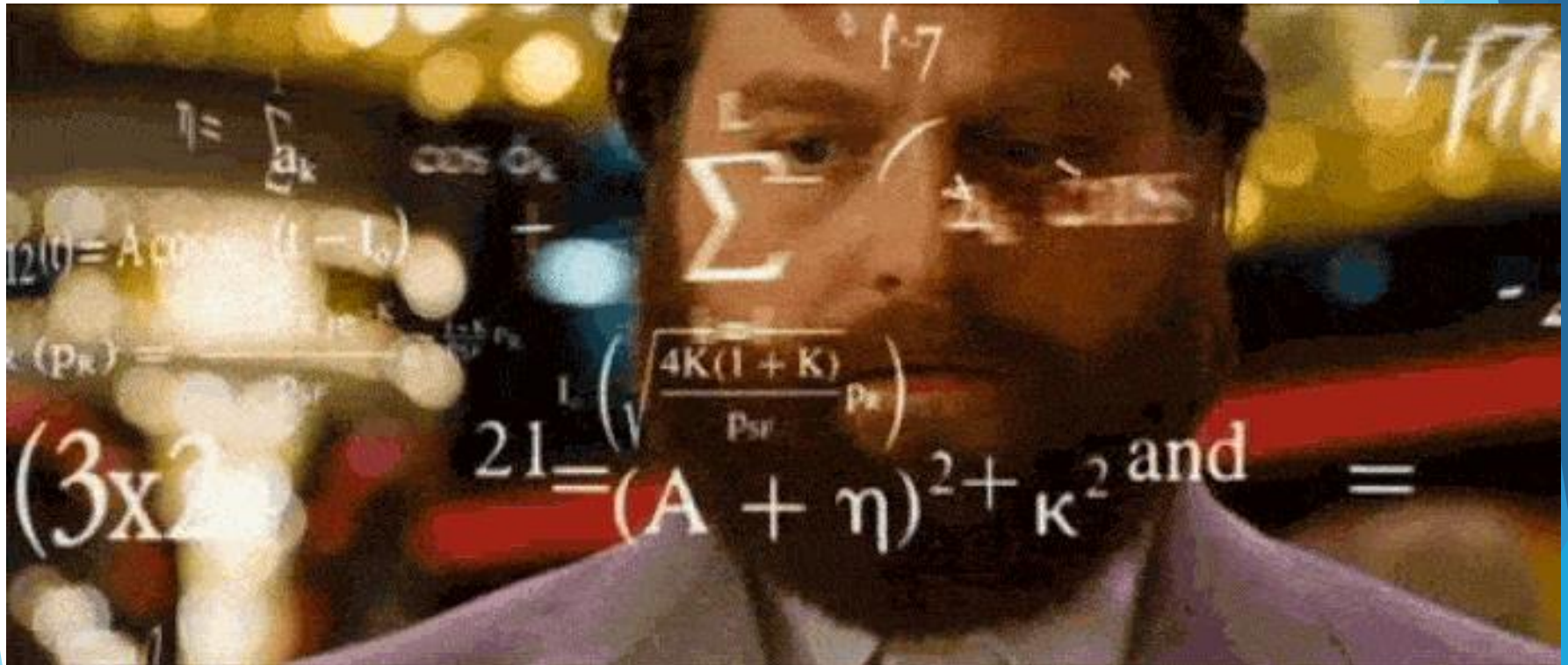


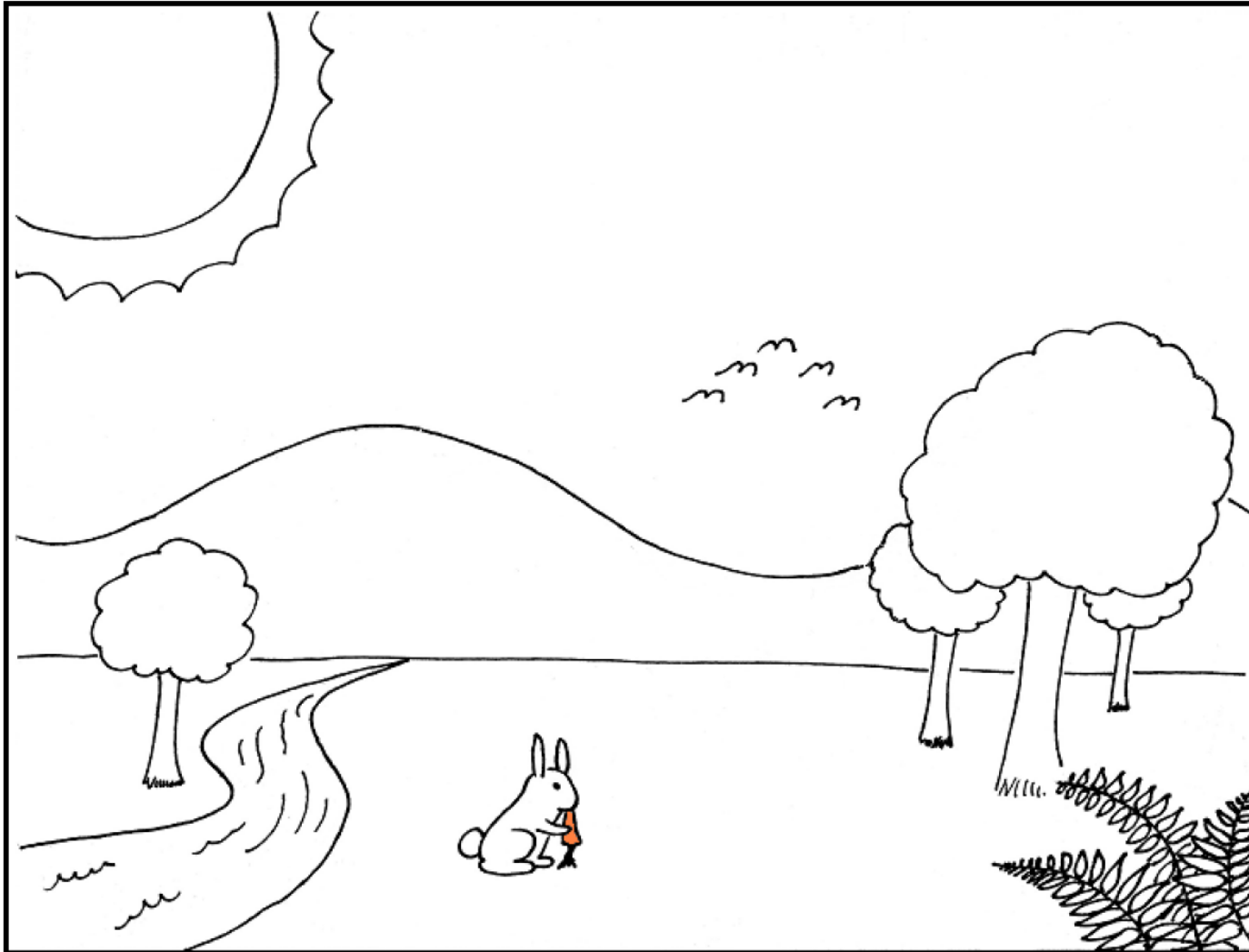
**EVERYTHING
I SAY
WILL BE ON
THE EXAM**



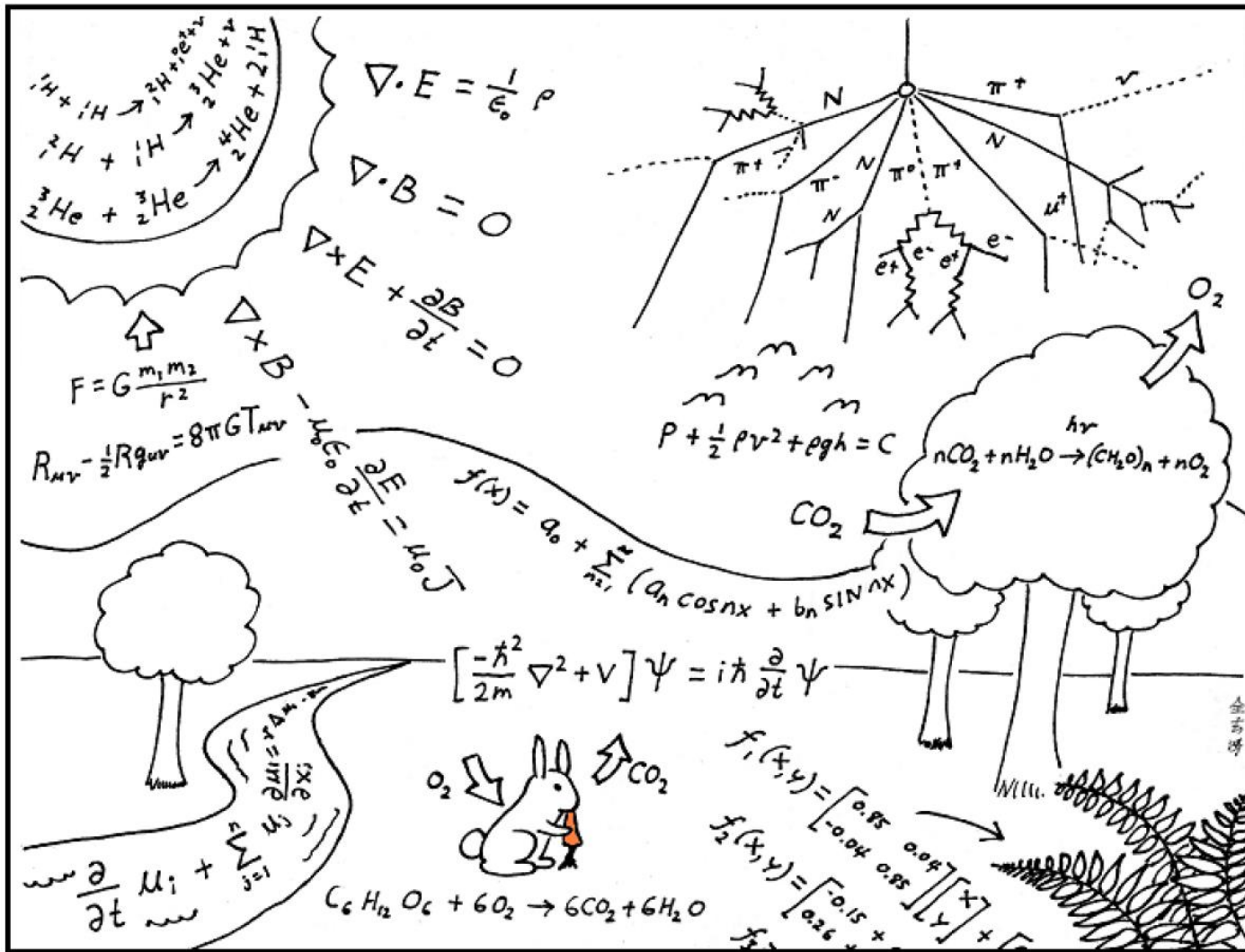


- *Matematyka nie sprowadza się do “dowodzenia twierdzeń” lub “realizacji obliczeń na kalkulatorze”*



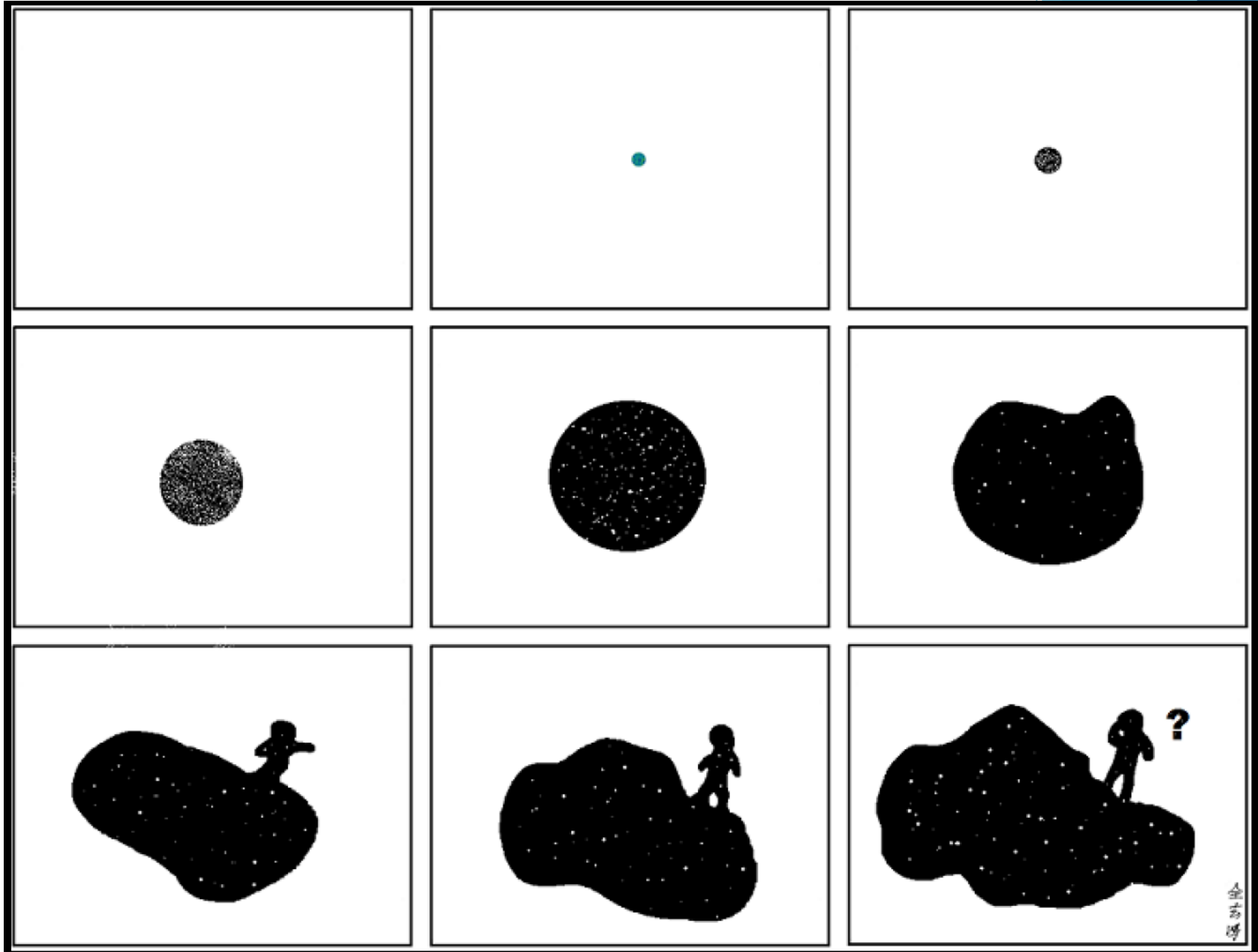


Abstroose Goose



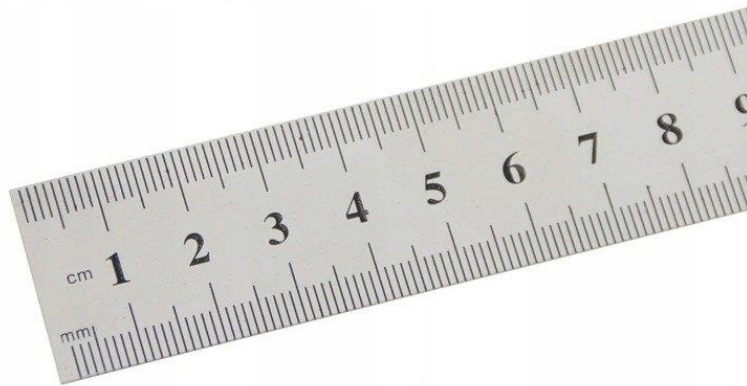
This is how scientists see the world.

Wszechświat starający się sam siebie zrozumieć



Od skalarów do tensorów

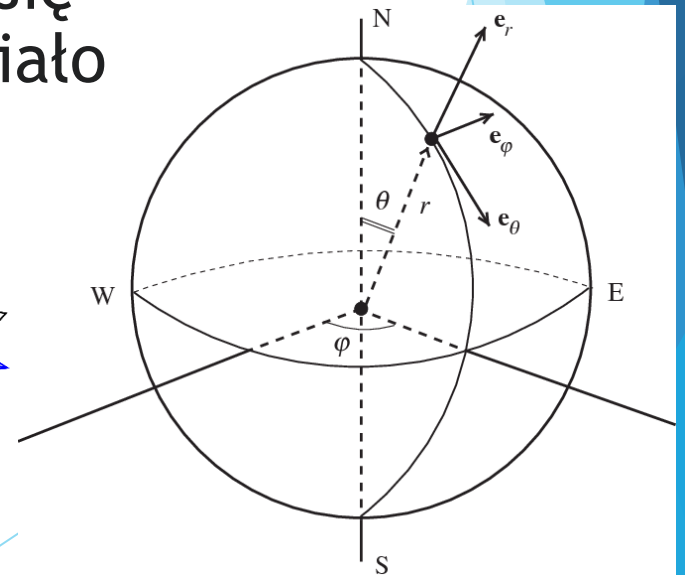
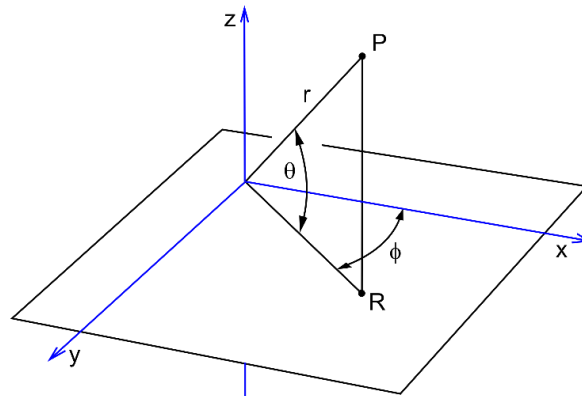
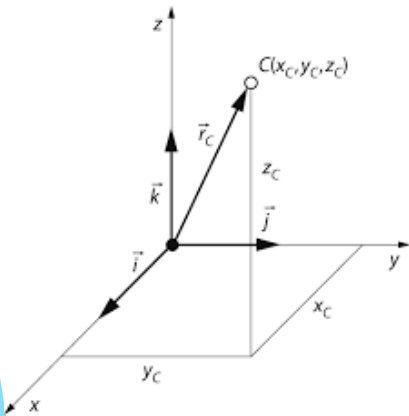
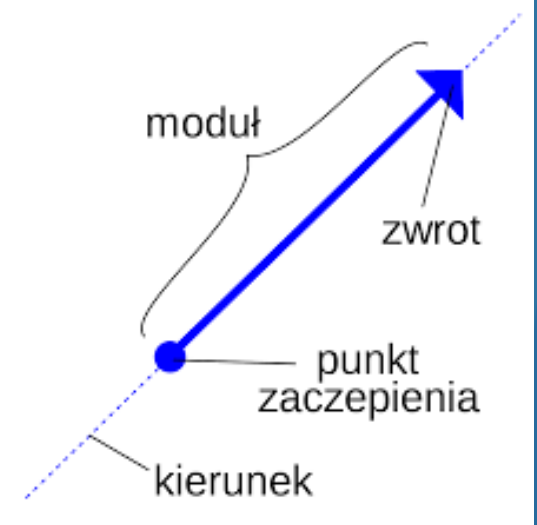
- ▶ **Skalar** - wielkość, do której określenia wystarczy jedna liczba rzeczywista (wraz z wymiarem wielkości fizycznej lub bezwymiarowa)
- ▶ masa M ,
- ▶ długość L ,
- ▶ pole powierzchni A ,
- ▶ objętość V ,
- ▶ temperatura T ,
- ▶ gęstość,
- ▶ praca W ,
- ▶ potencjał pola elektrostatycznego lub grawitacyjnego.



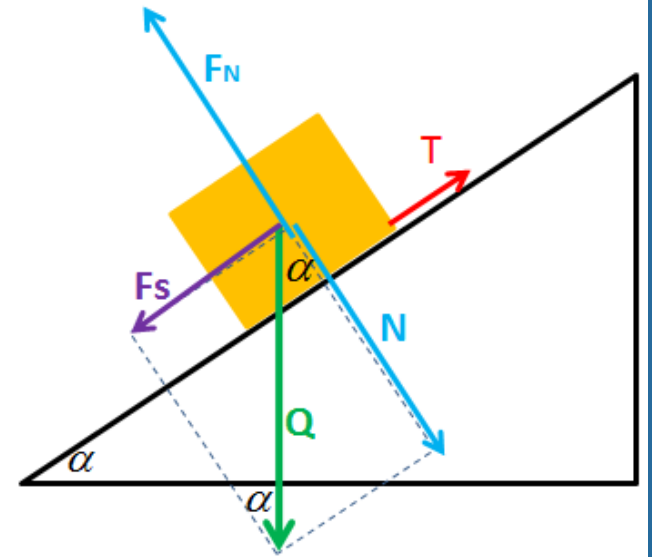
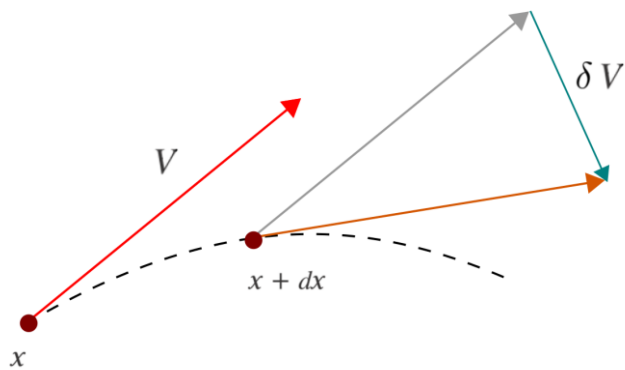
$$\phi = -G \frac{M}{r}$$

Od skalarów do tensorów

- ▶ **Wektor** jest to obiekt matematyczny opisywany za pomocą modułu (długością) oraz kierunku wraz ze zwrotem.
- ▶ Wektory odgrywają ważną rolę w **fizyce** opisując m.in. położenie, **prędkość** i **przyspieszenie** poruszającego się obiektu oraz **siły** działająca na ciało



Od skalarów do tensorów



Pole wektorowe

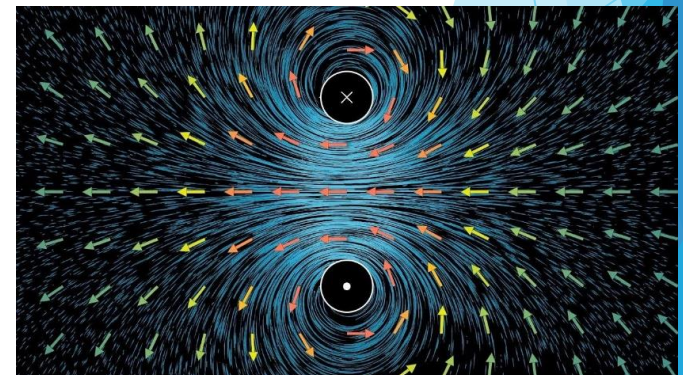
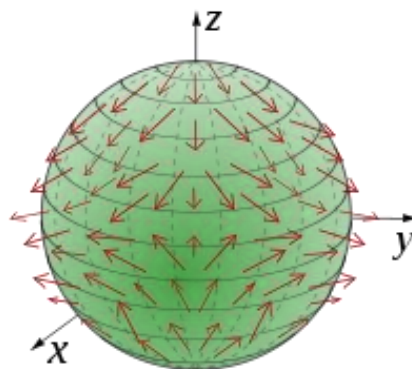
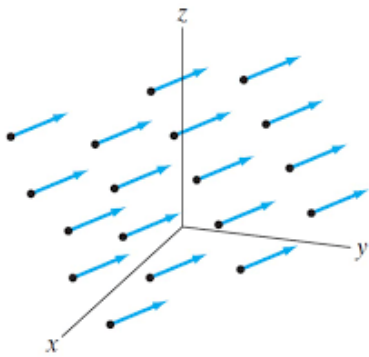


Figure 3.40 The constant vector field $F = a$.

Równania Maxwella

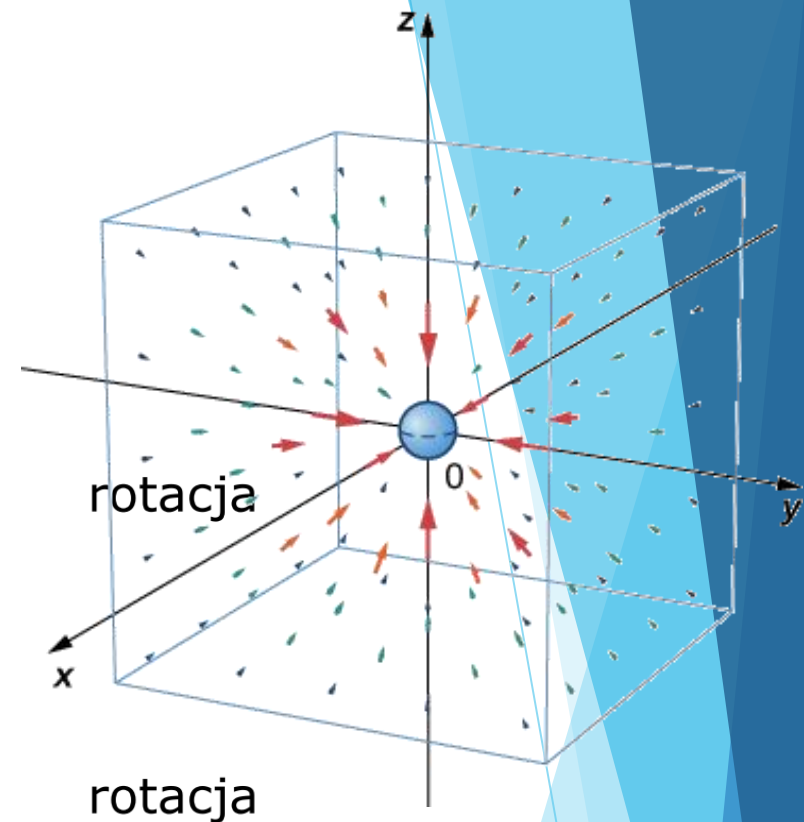
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \epsilon \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

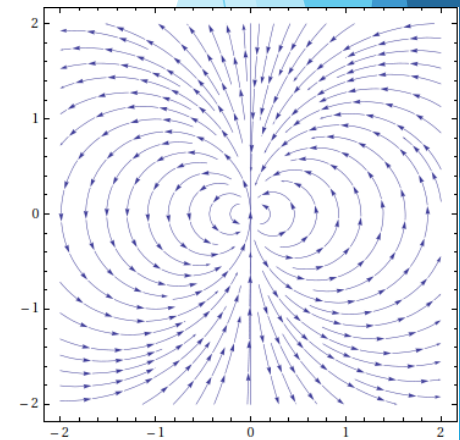
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Elektryczność + Magnetyzm



dywergencja

dywergencja



Od skalarów do tensorów

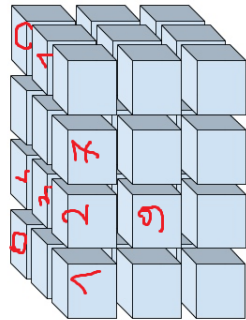
- Tensors are n dimensional arrays
 - Scalar is 0 D tensor
 - Vector is 1 D tensor
 - Matrix is 2 D tensor



rank	object
0	scalar
1	vector
2	$N \times N$ matrix
≥ 3	tensor

Rank 1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(vector)



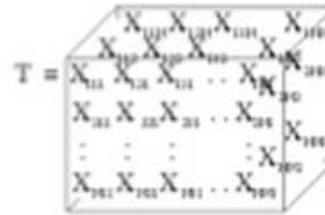
Rank 3:

Rank 0: $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

(scalar)

Rank 2: (matrix)

-1	0	0	1
0	1	0	-1
0	0	1	0



Tensor

Kolumna/Wiersz Macierz/Tablica

Bloki i hiperbloki

Scalar Vector Matrix Tensor

1

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

Od równania na jedną zmienną do równań różniczkowych

▶ $x-1=2 \Rightarrow x=3$ (szukamy LICZBY)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \quad (\text{szukamy LICZB})$$

Jest to układ równań postaci $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Do rozwiązania układu zastosujemy wzory Cramera:

$$x_1 = \frac{\det A_{x_1}}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}, x_3 = \frac{\det A_{x_3}}{\det A}$$

gdzie $A_{x_1}, A_{x_2}, A_{x_3}$ to macierze powstałe przez zastąpienie odpowiednich kolumn macierzy A kolumną wyrazów wolnych B:



$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A_{x_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}, A_{x_3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$


 +  = 16

 +  +  = 22

 +  = 

 = 

 = 

 = 

Równania różniczkowe

- ▶ Izaak Newton - “dajcie mi konfiguracje sił a powiem Wam co się stanie dalej”

$$ma = F$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F$$

szukamy funkcji $x(t)$



Np. nie ma sił $F=0$ \Rightarrow $x(t) = C_1 \cdot t + C_2$

$$x(t) = V_0 \cdot t + x_0$$

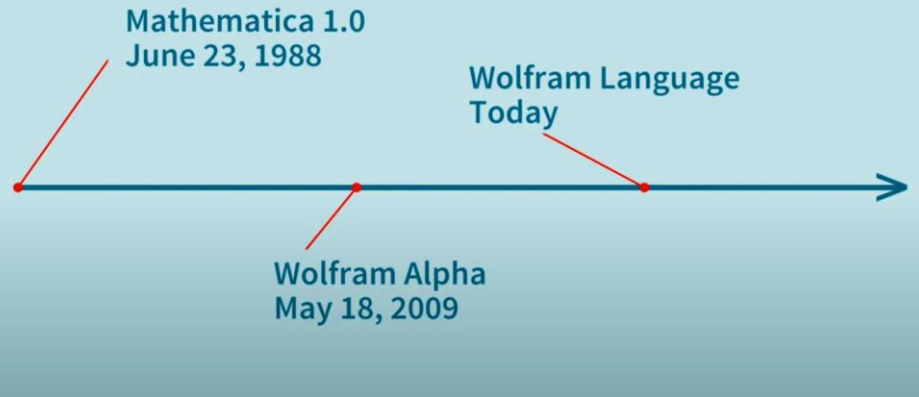
Siła constans $F=mg$ \Rightarrow $x(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2$

Mathematica

[Stephen Wolfram]



What is Mathematica?



- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=QMAjAQg2Grc>
- ▶ <https://www.youtube.com/watch?v=ysVdWiBVKHc>

Symbolic Language

$f[x]$

Mathematical Computation

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k}{(b_1)_k}$$

Numerics



Visualization



Algebraic Manipulation

$A=B$

Number Theory

Data Analysis



Graph Computation

Interactive Computation

Image Computation

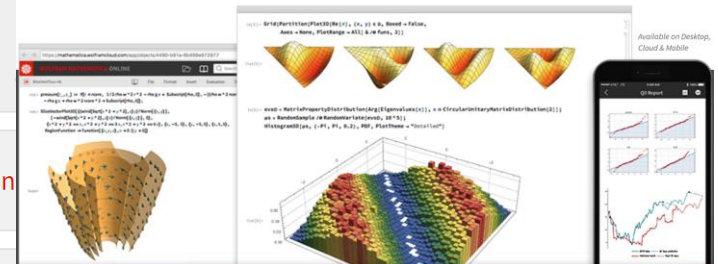


Geometric Computation

Importing & Exporting

WOLFRAM MATHEMATICA

The world's definitive system for modern technical computing



http://www.wolframalpha.com/



Enter what you want to calculate or know about



[Browse Examples](#) [Surprise Me](#)

Compute expert-level answers using Wolfram's breakthrough algorithms, knowledgebase and AI technology

Mathematics ›

Step-by-Step Solutions

Elementary Math

x^2-1 Algebra

Plotting & Graphics

$\int f(x)dx$ Calculus & Analysis

$\frac{x}{12}$ Geometry

$y''(x)$ Differential Equations

Statistics

... More »

Science & Technology ›

Units & Measures

Physics

Chemistry

Engineering

Computational Sciences

Earth Sciences

Materials

Transportation

... More »

Society & Culture ›

People

Arts & Media

Dates & Times

Words & Linguistics

Money & Finance

Food & Nutrition

Political Geography

History

... More »

Everyday Life ›

Personal Health

Personal Finance

Surprises

Entertainment

Household Science

Household Math

Hobbies

Today's World

... More »

Octave Command Line and GUI

- ▶ Octave jest to program komputerowy oraz skryptowy język programowania przeznaczony do wykonywania obliczeń numerycznych, wolny odpowiednik komercyjnego programu Matlab.

- ▶ Program jest aktywnie rozwijany od 1992 roku.

The screenshot displays the GNU Octave 4.4.1 environment. The main window is titled 'Command Window' and shows the following text:

```
GNU Octave, version 4.4.1
Copyright (C) 2018 John W. Eaton and others.
This is free software; see the source code for copying conditions.
There is ABSOLUTELY NO WARRANTY; not even for MERCHANTABILITY or
FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. For details, type 'warranty'.

Octave was configured for "x86_64-w64-mingw32".

Additional information about Octave is available at https://www.octave.org.

Please contribute if you find this software useful.
For more information, visit https://www.octave.org/get-involved.html

Read https://www.octave.org/bugs.html to learn how to submit bug reports.
For information about changes from previous versions, type 'news'.
```

The Command Window also shows the following commands and their outputs:

```
>> 1+2+3+4
ans = 10
>> 1/ans
ans = 0.10000
>> 1/7
ans = 0.14286
>> 1/ans
ans = 7
>> format long
>> 1/7
ans = 1.428571428571428e-01
>> |
```

The Variable Editor window shows two variables: 'Octave-4.4.1 (GUI)' and 'Octave-4.4.1 (CLI)'. The File Browser window shows the current directory 'C:/Users/USER' with various files and folders.

The Command History window shows the following commands:

```
a/ans
Clear
clear
exit
# Octave 4.4.1, Mon Oct 08 09:25:00 2018 GMT <unknown@DESK
1+2+3+4
1/ans
1/7
1/ans
format long
1/7
```

Octave służy do rozwiązywania problemów numerycznych, m.in.:

- ▶ obliczanie wartości wyrażeń (w tym wyrażeń zawierających zaawansowane funkcje matematyczne, np. funkcje zespolone)
- ▶ znajdowania wartości sum i iloczynów ciągów liczb o bardzo dużej liczbie elementów
- ▶ znajdowania rozwiązań układów równań liniowych (mogących mieć nawet tysiące niewiadomych)
- ▶ rozwiązywania równań i układów równań nieliniowych
- ▶ znajdowania wartości całek (oznaczonych)
- ▶ rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych
- ▶ rozwiązywania układów równań różniczkowych cząstkowych
- ▶ rozwiązywanie standardowych problemów algebry liniowej, m.in. wyznaczania wartości i wektorów własnych
- ▶ prezentacji rozwiązań w postaci wykresów
- ▶ Octave to także [skryptowy język programowania](#) posiadający mechanizmy włączania do obliczeń wysokowydajnych funkcji napisanych w kompilowanych językach programowania, np. C/C++.

Operatory arytmetyczne

Octave umożliwia wykonywanie wszystkich podstawowych operacji matematycznych. Wykaz najważniejszych operatorów rozpoznawanych przez Octave znajduje się w Tabeli 1.

Tabela 1. Podstawowe operatory arytmetyczne Octave

Operacja	Operator	Przykłady
potęgowanie	** lub ^	2**3, 2^3
mnożenie	*	2 * 3
dzielenie	/ lub \	1/7 lub 7\1
dodawanie	+	2 + 2
odejmowanie	-	3 - 2

Tabela 2. Najważniejsze stałe w Octave

Stała	Zapis w Octave	Znaczenie
π	pi	iloraz obwodu koła do jego średnicy
e	e	podstawa logarytmów naturalnych
i	i lub j	jednostka urojona

Dokładne znaczenie dwóch ostatnich stałych zostanie omówione w dalszej części kursu. Teraz wystarczy zapamiętać, że e jest pewną liczbą,

```
>> e
ans = 2.7183
```

natomiast i jest „magicznym obiektem”, który podniesiony do kwadratu daje -1:

```
>> i*i
ans = -1
```

Liczenie w Octave

```
>> pi^2
ans = 9.8696
>> log10(1000)
ans = 3
>> log10(1e3)
ans = 3
>> sin(cos(sin(cos(1))))
ans = 0.76471
>> factorial(6)
ans = 720
>> factorial(50)
ans = 3.0414e+064
>> log10(factorial(50))
ans = 64.483
```

```
> cos([0, 0.1, 0.2])
ans =
    1.00000    0.99500    0.98007
```

```
>> sin(30 * pi / 180) # sinus 30 stopni
ans = 0.50000
```

help and doc

```
>> help factorial
'factorial' is a function from the file C:\OCTAVE~1.1\share\octave\4.4.1\m\specfun\factorial.m

-- factorial (N)
  Return the factorial of N where N is a real non-negative integer.

  If N is a scalar, this is equivalent to 'prod (1:N)'. For vector
  or matrix arguments, return the factorial of each element in the
  array.

  For non-integers see the generalized factorial function 'gamma'.
  Note that the factorial function grows large quite quickly, and
  even with double precision values overflow will occur if N > 171.
  For such cases consider 'gammaln'.

  See also: prod, gamma, gammaln.

Additional help for built-in functions and operators is
available in the online version of the manual. Use the command
'doc <topic>' to search the manual index.
```

```
>> doc factorial
```

```
>> |
```

factorial (*n*)

Return the factorial of *n* where *n* is a real non-negative integer.

If *n* is a scalar, this is equivalent to `prod (1:n)`. For vector or matrix arguments, return the factorial of each element in the array.

For non-integers see the generalized factorial function `gamma`. Note that the factorial function grows large quite quickly, and even with double precision values overflow will occur if $n > 171$. For such cases consider `gammaln`.

See also: [prod](#), [gamma](#), [gammaln](#).

Skrypty i funkcje

Założmy, że skrypt nazywa się `programik.m`, a jego zawartość wygląda następująco:

```
# W pliku programik.m znajduje się trywialny program testowy Octave
1/7
2/7
3/7
```

Jeżeli wydamy polecenie `programik`:

```
> programik
```

Program odpowie następująco:

```
ans = 0.14286
ans = 0.28571
ans = 0.42857
```

co świadczy o wykonaniu wszystkich instrukcji z pliku `programik.m`.

Założmy, że naszym celem jest zdefiniowanie funkcji o nazwie `sin5`, która dla argumentu x obliczać będzie wartość wyrażenia $x - x^3/6 + x^5/120$. Aby zdefiniować taką funkcję:

1. Tworzymy (w katalogu bieżącym) plik o nazwie `sin5.m`
2. W pliku tym wpisujemy:

```
function y = sin5(x)
    y = x - x**3/6 + x**5/120;
endfunction
```

Uwaga! Powyższa definicja nie jest optymalna i wkrótce ją poprawimy.

Funkcje tę wywołujemy w Octave w naturalny sposób:

```
>> sin5 (0.1)
ans = 0.099833
```

```
# Funkcja sin5 przybliża wartość funkcji sin(x) za pomocą wielomianu stopnia 5.
#
# Przybliżenie to jest całkiem dobre dla małych wartości x,
# np. dla |x| < 1.
#
```

```
function y = sin5(x)
    y = x - x.**3/6 + x.**5/120;
endfunction
```

Wielomiany [\[edytuj\]](#)

definicja wielomianu

```
octave:3> c=[1 1 1]
c = 1 1 1
```

wyświetlenie wielomianu

```
octave:4> polyout(c, 'z')
1*z^2 + 1*z^1 + 1
```

Miejsca zerowe wielomianu czyli rozwiązania równania $1 * z^2 + 1 * z^1 + 1 = 0$

```
octave:5> roots(c)
ans =
-0.50000 + 0.86603i
-0.50000 - 0.86603i
```

Obliczyć wartość wielomianu $7x^3 - x^2 + 5$ w punkcie 11 .

```
P=[7 -1 0 5];
polyval(P, 11)
```

Wynikiem jest

```
9201
```

Rozwiązanie układu równań liniowych [

Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$

```
A = [2 -1; 1 3];  
f = [1 11];  
u = A\f'
```

lub alternatywnie:

```
u=inv(A)*f'
```

Wynikiem jest:

```
u = [2 3]
```

Wykresy w Oktawie

Octave

File Edit Debug Window Help News

Current Directory: C:\Users\USER

File Browser

C:/Users/USER

Name

- .config
- .gimp-2.8
- .oracle_jre_usage
- .thumbnails
- .VirtualBox
- 3D Objects
- Contacts
- Desktop
- Documents
- Downloads

Workspace

Filter

Var	Class	Dimensi	Value	Attribute
ans	double	1x1	0	

Command History

Filter

- 1+2+3+4
- 1/ans
- 1/7
- 1/ans
- format long
- 1/7
- help factorial
- doc factorial
- help sin
- sombbrero
- help sombrero

Command Window

```
'sin' is a built-in function from the file libinterp/corefcn/mappers.cc

-- sin (X)
    Compute the sine for each element of X in radians.

    See also: asin, sind, sinh.

Additional help for built-in functions and operators is
available in the online version of the manual. Use the command
'doc <topic>' to search the manual index.

Help and information about Octave is also available on the WWW
at https://www.octave.org and via the help@octave.org
mailing list.
>> sombrero
>> help sombrero
'sombbrero' is a function from the file C:\OCTAVE-1.1\share\octave

-- sombrero ()
-- sombrero (N)
-- Z = sombrero (...)
-- [X, Y, Z] = sombrero (...)
    Plot the familiar 3-D sombrero function.

The function plotted is

    z = sin (sqrt (x^2 + y^2)) / (sqrt (x^2 + y^2))

Called without a return argument, 'sombbrero' plots the surf
the above function over the meshgrid [-8,8] using 'surf'.

If N is a scalar the plot is made with N grid lines. The
value for N is 41.

When called with output arguments, return the data for the
evaluated over the meshgrid. This can subsequently be pl
'surf (X, Y, Z)'.

See also: peaks, meshgrid, mesh, surf.

Additional help for built-in functions and operators is
available in the online version of the manual. Use the command
'doc <topic>' to search the manual index.

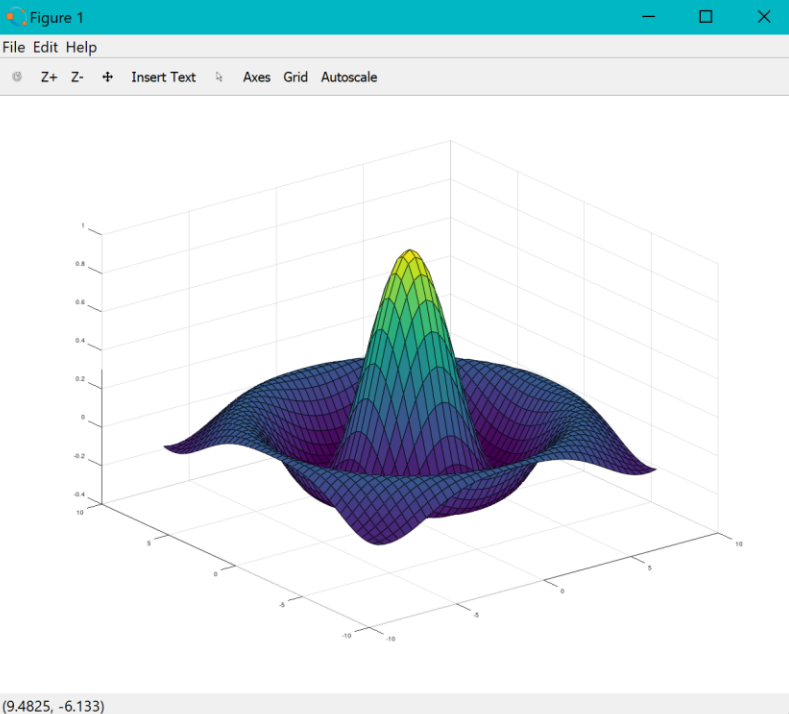
Help and information about Octave is also available on the WWW
at https://www.octave.org and via the help@octave.org
mailing list.
>>
```

Variable Editor

Figure 1

File Edit Help

Z+ Z- + Insert Text Axes Grid Autoscale

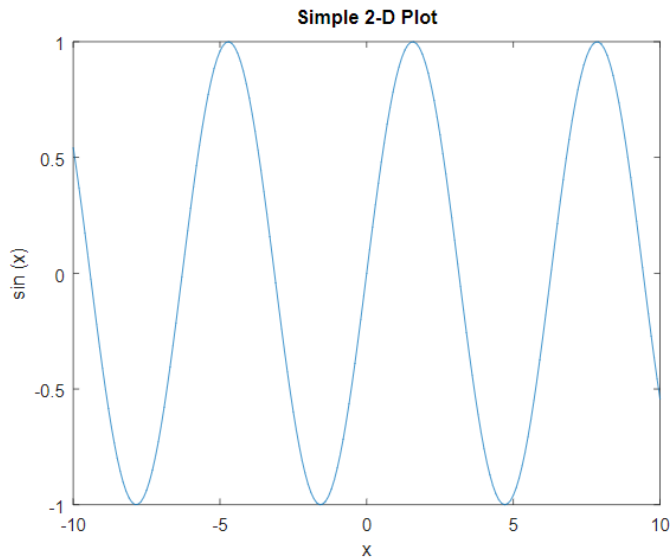


(9.4825, -6.133)

Command Window Editor Documentation

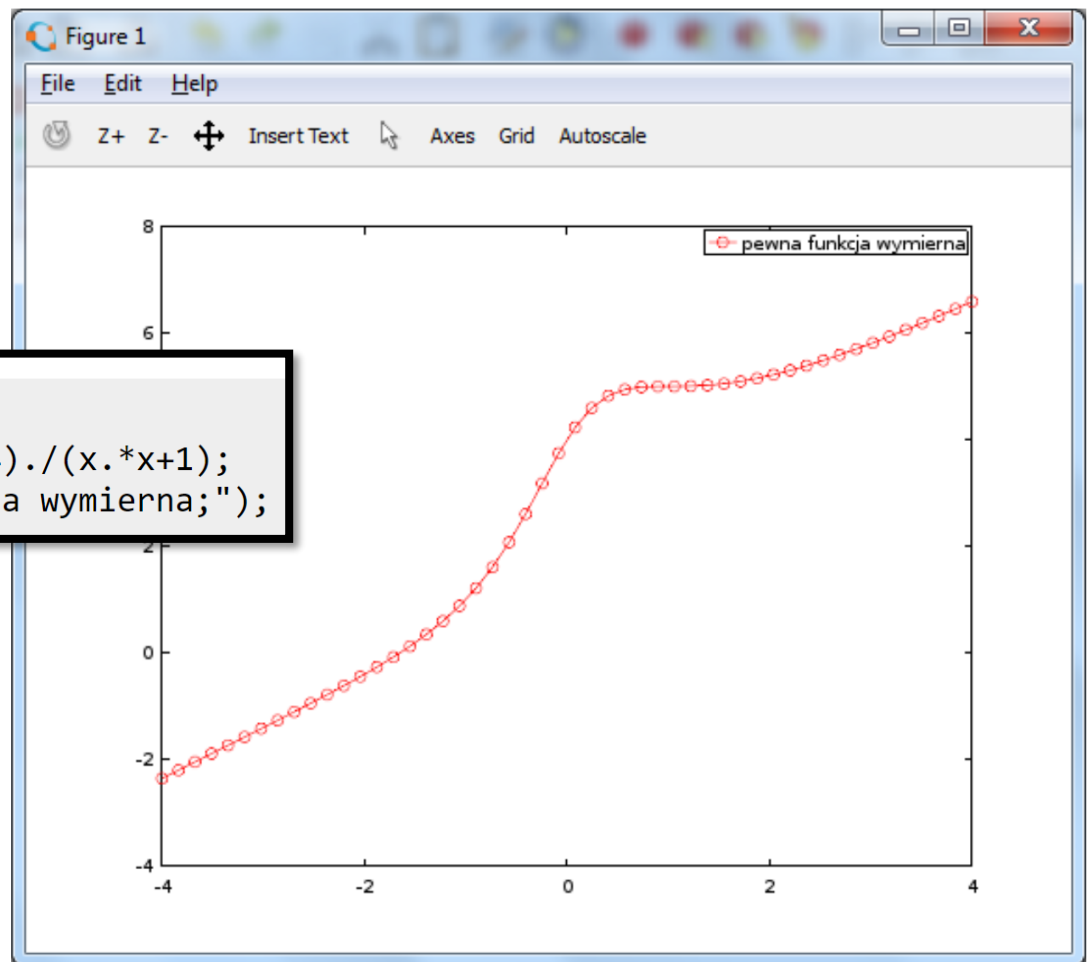
Wykresy 2D

```
x = -10:0.1:10; # Create an evenly-spaced vector from -10..10
y = sin (x);    # y is also a vector
plot (x, y);
title ("Simple 2-D Plot");
xlabel ("x");
ylabel ("sin (x)");
```



Wykresy 2D

```
x = linspace(-4,4,50);  
y = (x.^3 + 2*x.^2 + 3*x + 4)./(x.*x+1);  
plot(x, y, "ro-;pewna funkcja wymierna;");
```



Zmianie uległa definicja wektora x . Funkcja **linspace** (a, b, N) generuje ciąg N równoodległych punktów, z których pierwszy równy jest a , a ostatni – b . Zaletą tego podejścia jest to, że od razu widać, z ilu elementów składa się x .

Druga zmiana zaszła w wywołaniu funkcji `plot`: doszedł trzeci argument, napis **"ro-;pewna funkcja wymierna;"**.

Ten trzeci argument definiuje format wykresu i składa się z liter i symboli umieszczonych w napisie w dowolnej kolejności

Opcje stylu

■ Styl linii:

- - Linia ciągła (opcja domyślna)
- -- Linia przerywana
- : Linia kropkowana
- - . Linia przerywana z kropkami

■ Styl symbolu reprezentującego punkt danych:

- + plusik
- o kółko
- * gwiazdka
- . punkt
- x krzyżyk
- s kwadrat
- d romb (ang. *diamond*)
- ^ trójkąt z ostrzem w górę
- v trójkąt w dół
- > trójkąt z ostrzem w prawo
- < trójkąt z ostrzem w lewo
- p pięciokąt
- h sześciokąt (ang. *hexagram*)

■ Kolor linii i/lub symbolu:

- k czarny (ang. *black*)
- r czerwony
- g zielony
- b niebieski
- m *magenta*
- c *cyan*
- w biały

■ Opis wykresu (legenda)

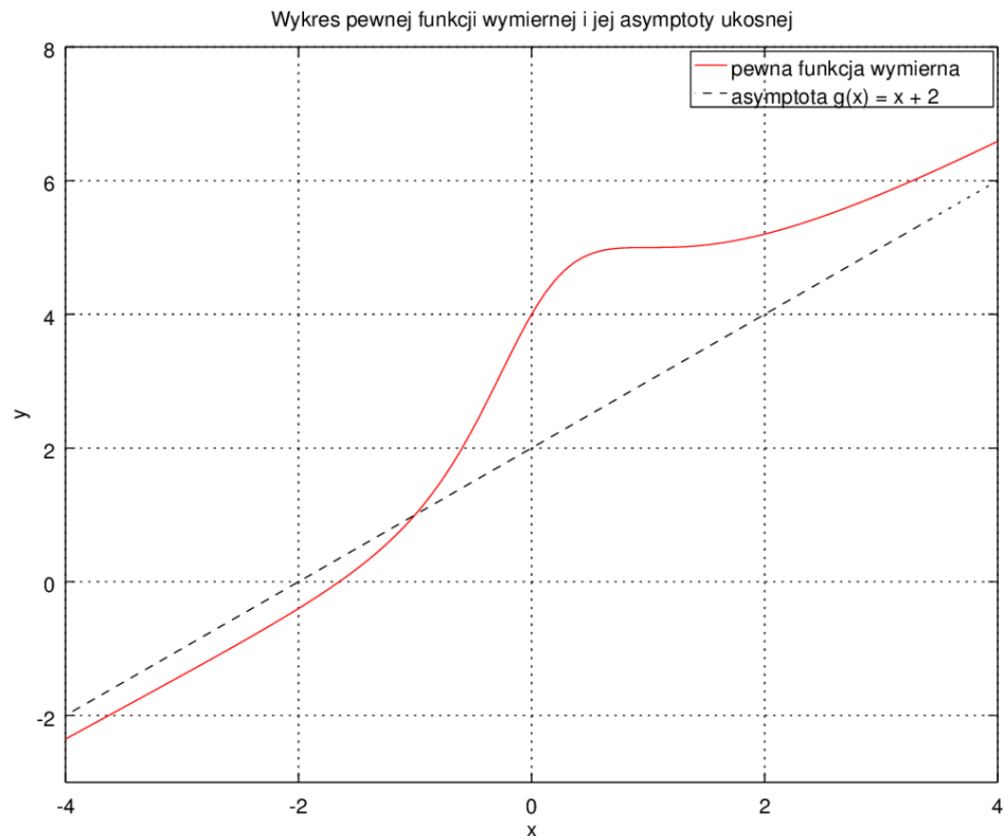
- ;legenda;

Dodajmy jeszcze kilka wodotrysków, jak podpisy osi, tytuł całego rysunku (niestety, bez polskich liter), siatkę, ograniczenie zakresu osi „y” do [-3:8] i zapiszmy wykres na dysku w formacie eps i png:

```
x = linspace(-4,4,100);  
y = (x.^3 + 2*x.^2 + 3*x + 4)./(x.*x+1);  
y2 = x + 2;  
plot(x, y, "r-;pewna funkcja wymierna;", x, y2, "k--;asymptota g(x) = x + 2;");  
xlabel("x");  
ylabel("y");  
title("Wykres pewnej funkcji wymiernej i jej asymptoty ukosnej");  
ylim([-3,8]);  
grid on;  
print "rys.eps"  
print "rys.png"
```

Po paru
wodotryskach...

Oto wynik działania powyższego skryptu:



200 lat pod niemieckim,
400 lat pod polskim,
500 lat pod czeskim panowaniem



Wrocław jest jednym z najstarszych miast Polski pod względem **lokacji** na **prawach miejskich**. W czasach **antycznych** w miejscu lub okolicach Wrocławia istniała miejscowość o nazwie Budorgis^[22]. Została ona odwzorowana na antycznej mapie Klaudiusza Ptolemeusza z lat 142–147 n.e.^[23] O tym, że miejscowość ta znajdowała się w miejscu lub okolicach Wrocławia, informuje

ostatnich badań nie ma śladu, który by wskazywał na istnienie przed 940 rokiem grodu na wrocławskim Ostrowie Tumskim^{[25][26]}. W roku 985 na Ostrowie Tumskim powstał pierwszy gród wybudowany przez Mieszka I. Od końca X wieku Wrocław znajdował się pod panowaniem Piastów i był jedną z głównych siedzib królestwa (łac. *sedes regni principalis*)^[27]. W średniowiecznej Kronice Polskiej Galla Anonima spisanej w latach 1112–1116 Wrocław obok Krakowa oraz Sandomierza zaliczony został do jednej z trzech głównych stolic Królestwa Polskiego^[28].

Wrocławscy nobliści

- Stąd pochodzi (czyli urodziło się, pobierało nauki albo pracowało) aż jedenastu laureatów Nagrody Nobla!
- Dwie nagrody literackie, cztery z fizyki, 3 z chemii oraz po jednej z medycyny i ekonomii

FIZYKA:

- **Phillip Lénárd** (1862-1947)
- **Otto Stern** (1888-1969)
- **Erwin Schrödinger** (1887-1961)
- **Max Born** (1882-1970)



Wrocławscy nobliści

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\text{cat}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{dead}\rangle$$

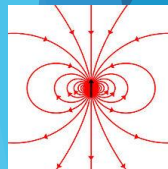
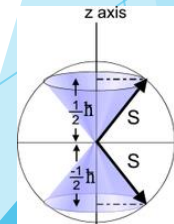
- **Erwin Schrödinger** (tak, ten od jednocześnie żywego i martwego kota i jeszcze bardziej **sławnego równania** będącego fundamentem fizyki kwantowej) był wykładowcą w 1921 roku.

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

- Tutaj studentem fizyki a później asystentem był **Maks Born**, któremu zawdzięczamy interpretację *modułu funkcji falowej* jako gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki (z czym wiążą się te wszystkie orbitale, o których uczyliście się na chemii w szkole średniej), a *także komutator operatorów położenia i pędu*

oraz stworzenie nazwy "**mechanika kwantowa**"!

- Tu też wychowywał się, studiował i zrobił doktorat **Otto Stern**, który później wykazał w eksperymencie skwantowanie wewnętrznego momentu pędu, czyli **spinu**.



Wrocław

- ▶ Swoje centra mają tu Google, Nokia, IBM, Siemens, Opera, Atos, Dolby, Capgemini, Luxoft czy Tieto.
- ▶ Działają też światowi liderzy z branż takich jak **motoryzacja, elektronika i AGD, inżynieria mechaniczna, chemia i farmaceutyka**. To firmy, które mają mocno rozbudowane działy IT. Mocny jest też sektor finansowy.
- ▶ Ale w mieście intensywnie rozwijają się też rodzime firmy IT, podbijające europejskie i światowe rynki, jak m.in. **Techland**, i ok. 200 start-upów.
- ▶ Wiele spółek realizuje model „born global”, co oznacza, że od pierwszego dnia istnienia są w stanie działać globalnie i pracować dla międzynarodowych klientów.

Odruch Pawłowa

- ▶ Kupić lampkę, którą używać tylko do nauki.

Trenować intuicję

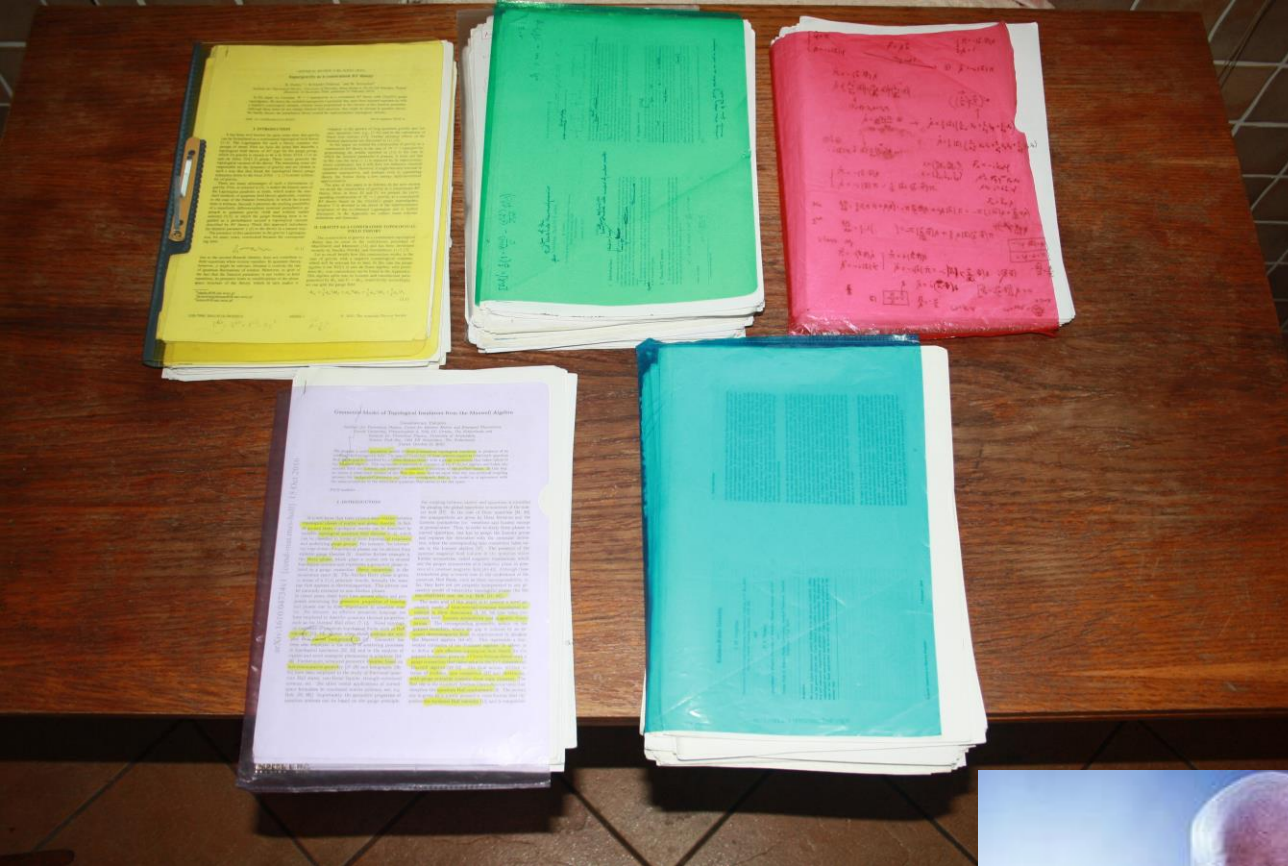
- ▶ Pada pytanie? Starać się dać w głowie odpowiedź
- ▶ Dobra odpowiedź: +10 do samopoczucia!
- ▶ Zła odpowiedź: zastanowić się czemu polegliśmy

Egzaminy i sprawdziany

- ▶ Jeśli zarywać noce, to robić to poza ostatnią nocą!
- ▶ 15% lepsze wyniki dzięki picie wody

*Tak jak od sportowców oczekujemy naturalnej sportowej rywalizacji,
tak od studentów na kierunkach ścisłych oczekujemy odruchowego:*

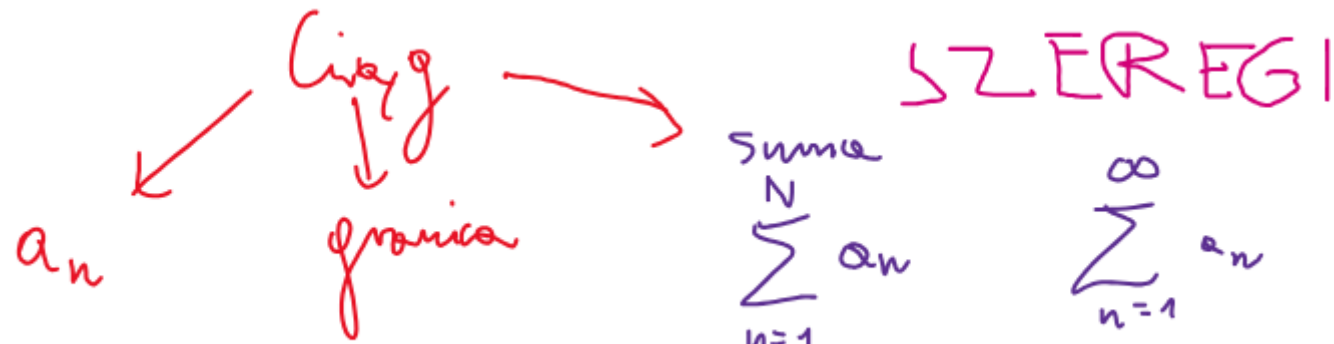
ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW!



Notatki!!!

- ▶ Trzymać porządek w papierach!
- ▶ Zakupić całą ryżę papieru! (zwolnienie z ekologii na 3 lata)
- ▶ Folder OneDrive (1 TB) z folderami odpowiadającymi przedmiotom (z podfolderami: Wykład, Ćwiczenia, Trash)





Ciąg to przyporządkowanie wszystkim liczbom naturalnym z przedziału $\langle 1, n \rangle$ (lub wszystkim liczbom naturalnym), elementów z pewnego zbioru.

(ciąg skończony vs ciąg nieskończony)

Etykiety (label) $n = \{1, 2, \dots\}$

ciąg to funkcja
 $f: n \rightarrow a_n$

$$f(n) = a_n$$

Ciągi arytmetyczny i geometryczny

Arytmetyczny

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Geometryczny

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Ciągi

Ciąg Fibonacciego – ciąg liczb naturalnych określony rekurencyjnie w sposób następujący:

Pierwszy wyraz jest równy 0, drugi jest równy 1, każdy następny jest sumą dwóch poprzednich.

Formalnie:

$$F_n := \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0, \\ 1 & \text{dla } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Kolejne wyrazy tego ciągu nazywane są **liczbami Fibonacciego**. Zaliczanie zera do elementów ciągu Fibonacciego zależy od umowy – część autorów definiuje ciąg od $F_1 = F_2 = 1$ ^[1].

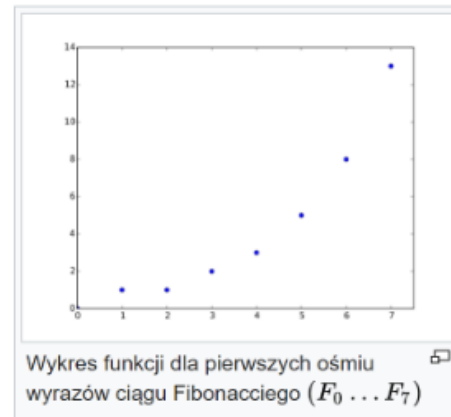
Pierwsze dwadzieścia wyrazów ciągu Fibonacciego to:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Ciąg został omówiony w roku 1202 przez **Leonarda z Pizy**, zwanego Fibonaccim, w dziele *Liber abaci* jako rozwiązanie zadania o rozmnażaniu się **królików**. Nazwę



Zobacz w Wikizródach tablicę ciągu Fibonacciego



Liczby Catalana – szczególny **ciąg liczbowy**, mający zastosowanie w różnych aspektach **kombinatoryki**. Nazwane zostały na cześć belgijskiego matematyka **Eugène Charlesa Catalana** (1814–1894)^[1]. Bywają również nazywane **liczbami Segnera**, na cześć **Jána Andreja Segnera** (1704–1777), matematyka pochodzącego z **Karpat Niemieckich**.

Każdy n-ty wyraz ciągu określony jest **wzorem jawnym**: $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$ dla $n \geq 0$.

Początkowe wartości ciągu, poczynając od wyrazu zerowego, to

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, ...

Szeregi

Dla danego nieskończonego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) definiuje się N -tą **sumę częściową** ciągu (a_n) bądź *sumę częściową szeregu* wzorem

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Szeregiem nazywa się ciąg (s_N) sum częściowych.

Sumą szeregu nazywa się liczbę $S = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N$, o ile **granica** ta istnieje i jest właściwa. W przeciwnym przypadku szereg nie ma sumy.

Szereg, który ma sumę nazywa się zbieżnym, który jej nie ma – rozbieżnym .

Zarówno szereg, jak i jego sumę oznacza się

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Przykład 1.

- 1) 1, 2, 3, 4, 5, 6... - ciąg kolejnych liczb naturalnych.
- 2) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... - ciąg kolejnych liczb parzystych dodatnich.
- 3) 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ... - naprzemienny ciąg liczb dodatnich i ujemnych.
- 4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ - malejący ciąg ułamków.
- 5) 3, 9, 27, 81, 243, ... - ciąg kolejnych potęg 3.
- 6) 80, 77, 74, 71, 68, 65, 62, 59, 56, ... - ciąg malejący

$$a_n = (-1)^n \cdot 3$$

↓

$$-3, 3, -3, 3, -3, \dots$$

Alternating harmonic series

The series

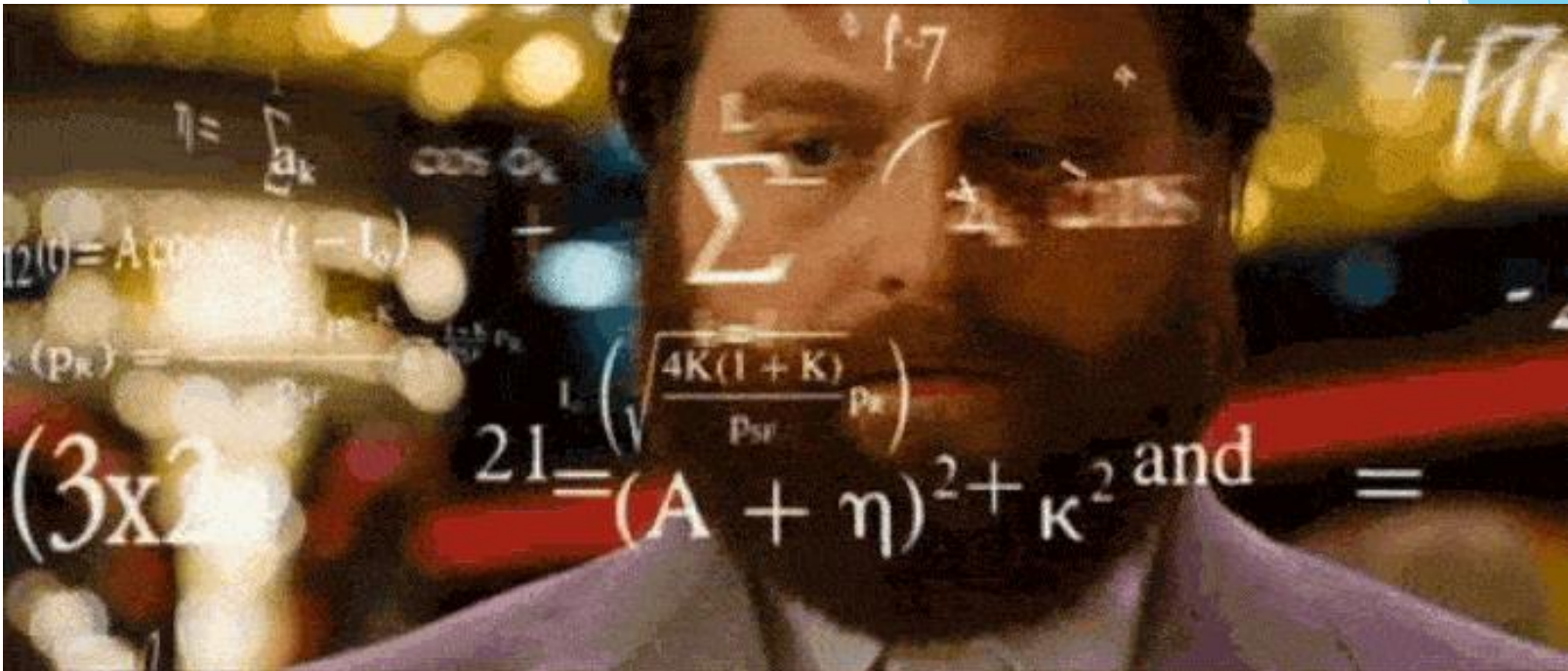
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$$

is known as the **alternating harmonic series**. It is [conditionally convergent](#) by the [alternating series test](#), but not [absolutely convergent](#). Its sum is the [natural logarithm of 2](#).

Using alternating signs with only odd unit fractions produces a related series, the [Leibniz formula for \$\pi\$](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Prawidłowe rozwiązywanie zadań
powinno wyglądać tak...



ZADANIE: Dany jest ciąg (a_n) geometryczny $a_1=2, a_2=6, a_3, a_4, \dots$
Liczby $a_3, c, c/2$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.
Oblicz c .

Ciąg geometryczny: $a_2 = a_1 q$
czyli $q = 6/2 = 3$

Zaś to daje automatycznie
 $a_3 = a_2 q = 6 * 3 = 18$

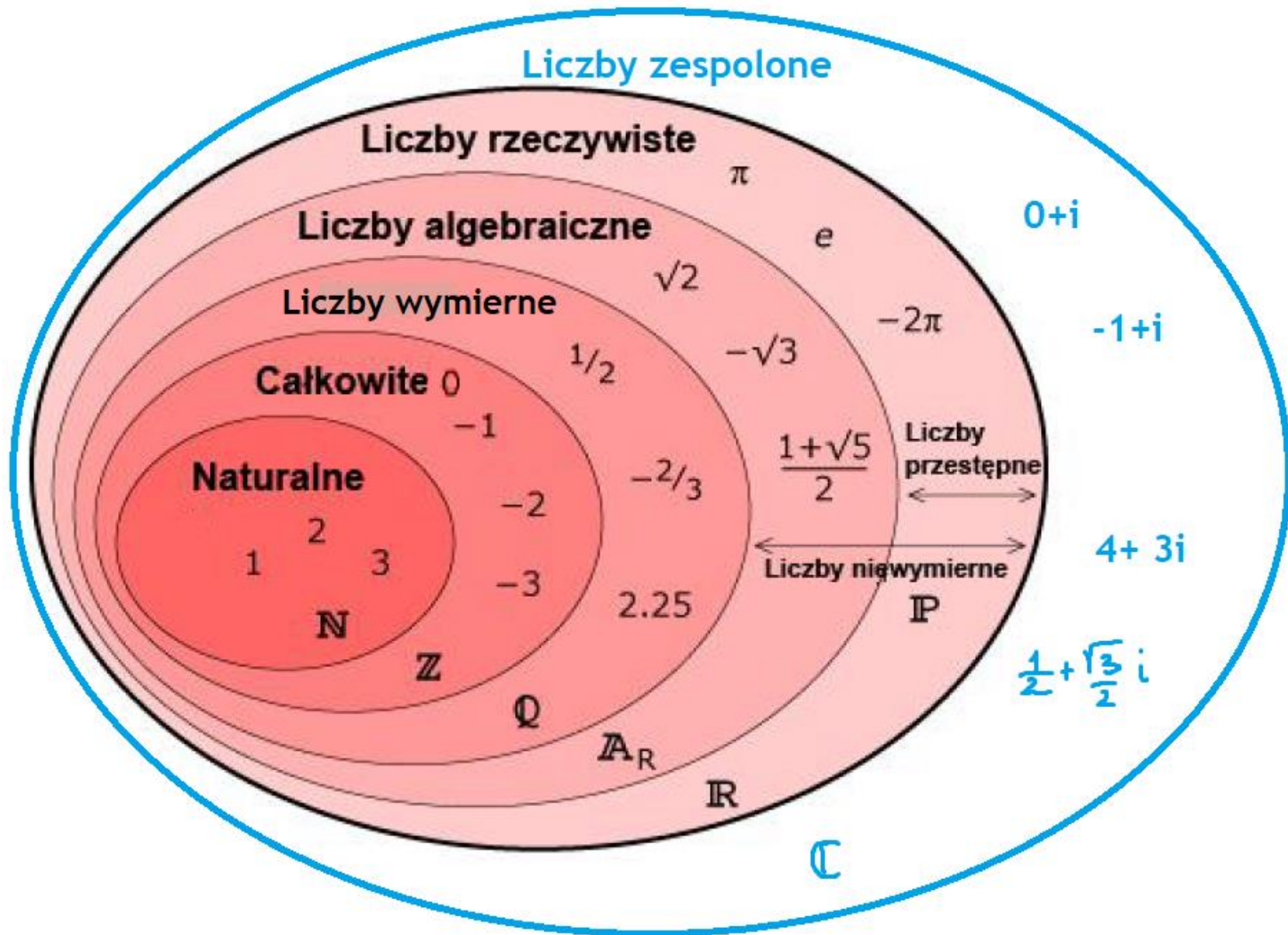
Ciąg arytmetyczny? $b_2 - b_1 = r$ oraz $b_3 - b_2 = r$

$c - 18 = r = c/2 - c$ (czyli możemy odpuścić r)
 $c - 18 = c/2 - c$

$c + c/2 = 18$
 $3/2c = 18$
 $c = 12$

Sprawdzenie!!! Czy: $\{2, 6, 18\}$ jest geometryczny? Czy $\{18, 12, 6\}$ jest arytmetyczny?

Liczby



Liczby wymierne

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

- ▶ **liczby rzeczywiste**, które można przedstawić w postaci ilorazu liczby całkowitej i liczby całkowitej różnej od zera.
- ▶ **Rozwinięcie dziesiętne** liczby wymiernej jest skończone i okresowe.
- ▶ Każdą liczbę wymierną można rozwinąć w skończony **ułamek łańcuchowy**.

$$A = 0.7162162162 \dots$$

Here the repetend is 162 and the length of the repetend is 3. First, we multiply by an appropriate power of 10 to move the decimal point to the right so that it is just in front of a repetend. In this example we would multiply by 10 to obtain:

$$10A = 7.162162162 \dots$$

Now we multiply this equation by 10^r where r is the length of the repetend. This has the effect of moving the decimal point to be in front of the "next" repetend. In our example, multiply by 10^3 :

$$10,000A = 7162.162162 \dots$$

The result of the two multiplications gives two different expressions with exactly the same "decimal portion", that is, the tail end of $10,000A$ matches the tail end of $10A$ exactly. Here, both $10,000A$ and $10A$ have .162162162... after the decimal point.

Therefore, when we subtract the $10A$ equation from the $10,000A$ equation, the tail end of $10A$ cancels out the tail end of $10,000A$ leaving us with:

$$9990A = 7155.$$

Then

$$A = \frac{7155}{9990} = \frac{53}{74}$$

It is not known if πe , π/e , π^e , $\pi^{\sqrt{2}}$, $\ln \pi$, Catalan's constant, or the Euler–Mascheroni constant γ are irrational

Perhaps the numbers most easy to prove irrational are certain [logarithms](#).

Assume $\log_2 3$ is rational. For some positive integers m and n , we have

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}.$$

It follows that

$$2^{m/n} = 3$$

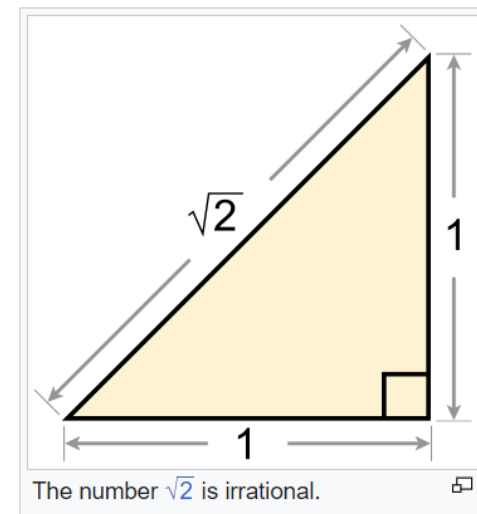
$$(2^{m/n})^n = 3^n$$

$$2^m = 3^n.$$

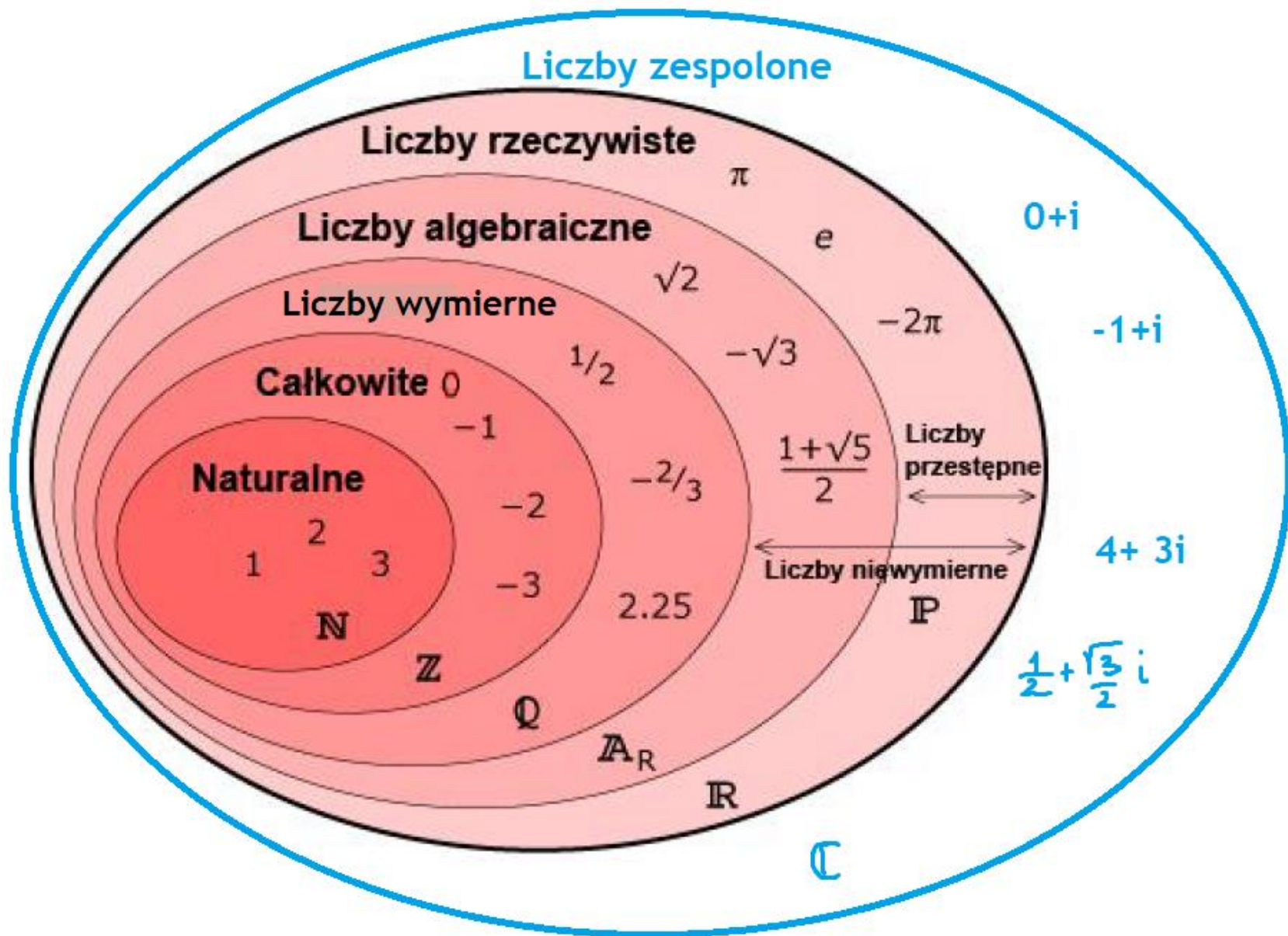
Why $0.999\dots = 1$?

Liczby niewymierne

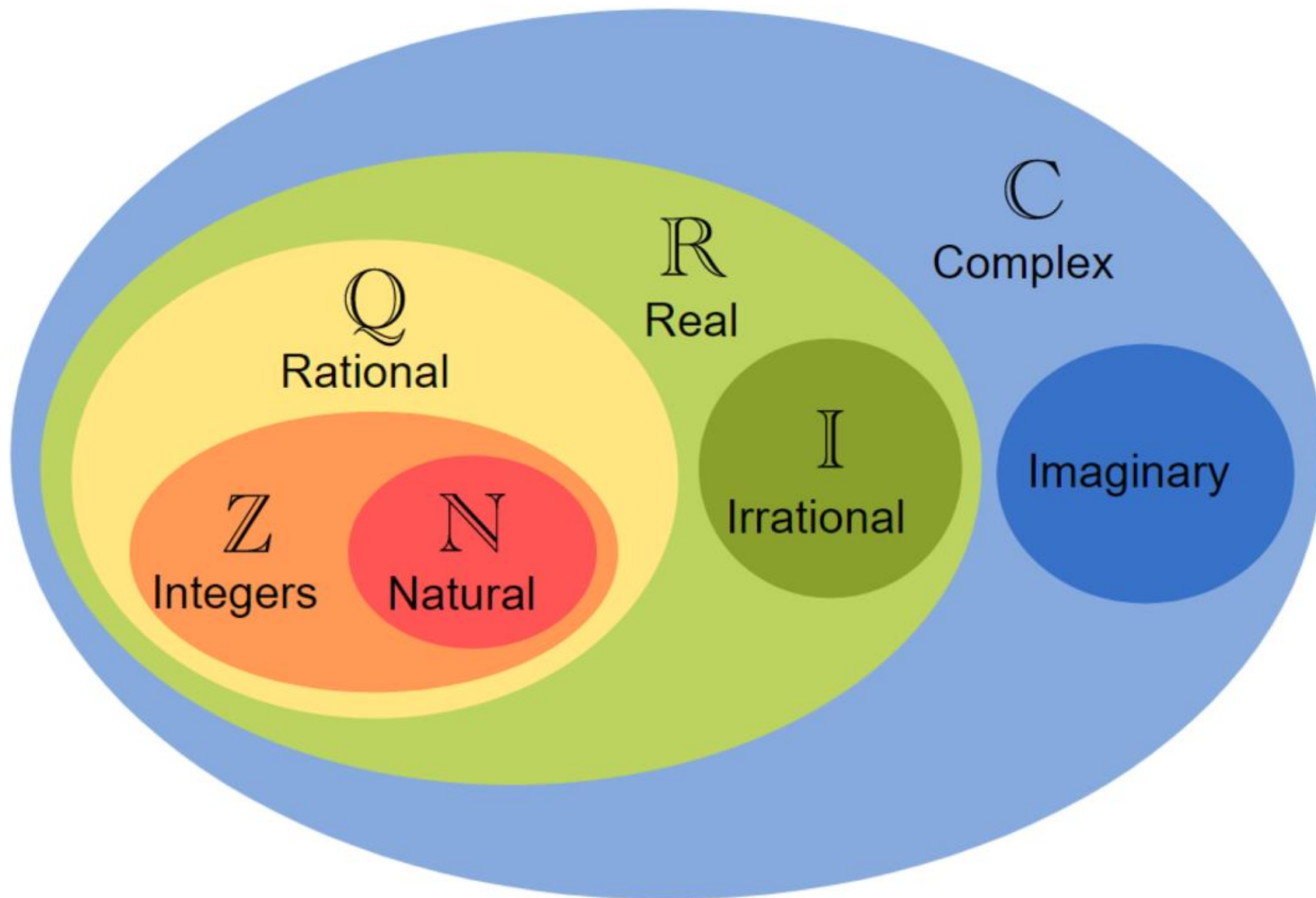
- ▶ **liczby rzeczywiste** niebędące **liczbami wymiernymi**, czyli takie liczby rzeczywiste, których nie można przedstawić w postaci ilorazu liczby całkowitej i liczby całkowitej różnej od zera.
- ▶ **Rozwinięcie dziesiętne** liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.
- ▶ Każdą liczbę niewymierną można rozwinąć w nieskończony **ułamek łańcuchowy**.



Liczby

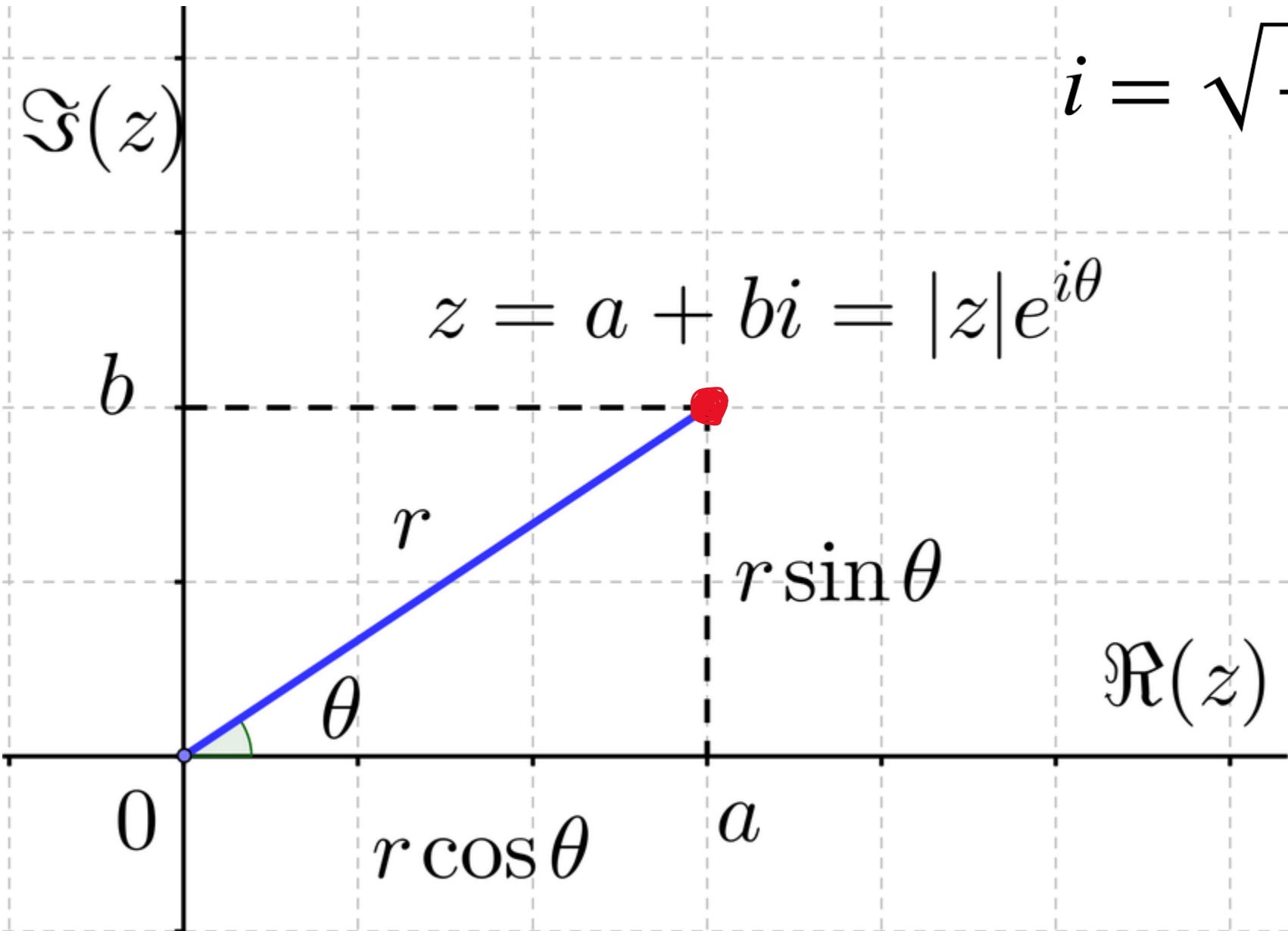


Liczby



Liczby zespolone = rzeczywiste+urojone

$$i = \sqrt{-1}$$



Działania i przydatne definicje

Dwumianem Newtona nazywamy wzór:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

gdzie symbol $\binom{n}{k}$ oznacza współczynnik dwumianowy i jest obliczany ze wzoru:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Działania i przydatne definicje

Uwaga? $0! = 1$

$$\boxed{0!} = 1 \uparrow \div 1$$

$$1! = 1 \uparrow \div 2$$

$$2! = 2 \uparrow \div 3$$

$$3! = 6 \uparrow \div 4$$

$$4! = 24 \uparrow \div 5$$

$$5! = 120$$

Działania i przydatne definicje

$$\boxed{a^0 = 1}$$
$$a^1 = a \quad \div a$$
$$a^2 = a^1 \cdot a \quad \div a$$
$$a^3 = a^2 \cdot a \quad \div a$$
$$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$$

Do zapamiętania!

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Działania i przydatne definicje

Potęgi i wykładniki

1

$$\underbrace{3+3+3+3}_4 = 4 \text{ razy } 3^1 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_4 = 3^4 = \text{"trzy do potęgi 4tej"} = 3^4 = 81$$

~~a~~ ← potęga
← funkcja potęgowa

~~a^x~~ ← funkcja wykładnicza
wykładnik

x^2 versus 2^x

Działania i przydatne definicje

Zad. x^2 vs 2^x Ktore szybsze

$x=10$

$10^2 = 100$

$2^{10} = 2^5 \cdot 2^5 = 32 \cdot 32 = 1024$

$x=100$

$100^2 = 10000$

$2^{100} = ?$

Ile cyfr ma 2^{100} ?

$$\begin{array}{r} 32 \\ - 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

Ile cyfr ma liczba 2^{100} . Wiedząc, że $\log_{10} 2 = 0,3$

$$2^{100} = \left(\underbrace{10^{\log_{10} 2}}_2 \right)^{100} = \underbrace{10}_{2}^{100 \cdot \log_{10} 2} \approx 10^{30}$$

Logarytmy

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (a^b) = b$$

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a (b^c) = c \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a (\sqrt[n]{b}) = \frac{\log_a b}{n}$$

$$\log_a (\log_a b) = \log_a (\log_a c)$$

$$\log_a (\log_a b) = \log_b (\log_a c)$$

Logarithm Properties

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

The following can be derived from the above

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

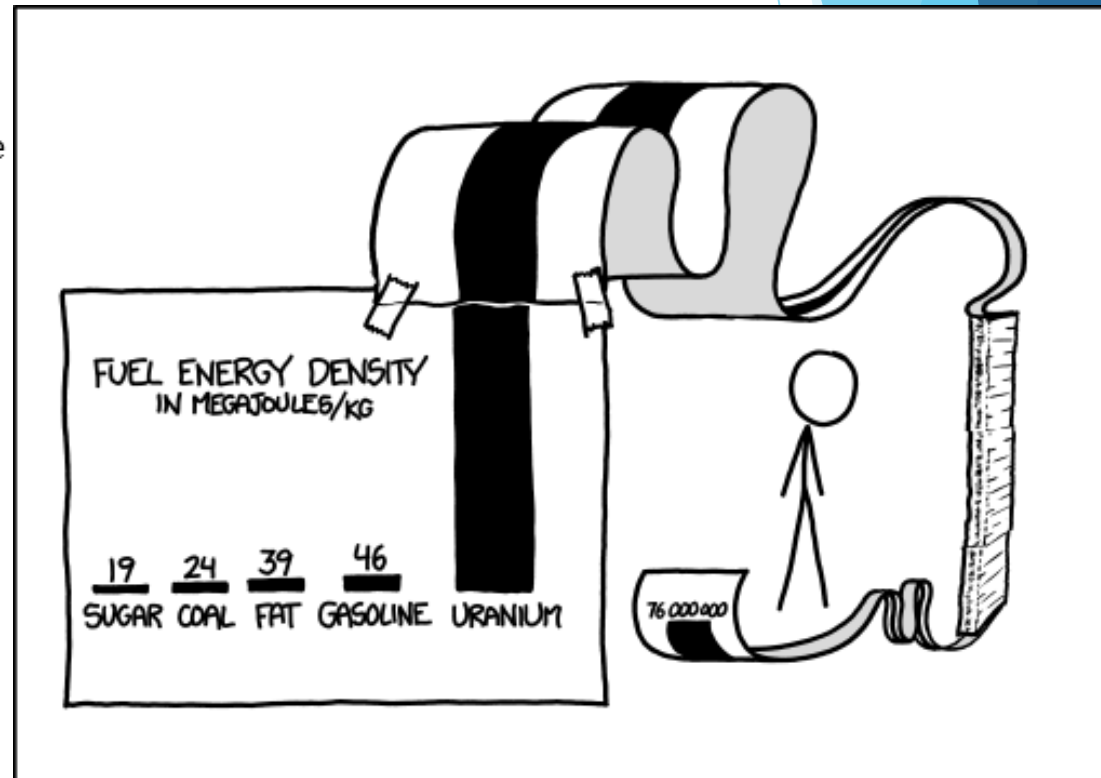
$$\log_a a^r = r$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

$$\log_a b \log_b c = \log_a c$$

$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m}, m \neq 0$$



SCIENCE TIP: LOG SCALES ARE FOR QUITTERS WHO CAN'T FIND ENOUGH PAPER TO MAKE THEIR POINT PROPERLY.