Pochodne

Remigiusz Durka

Insitute of Theoretical Physics
Uniwersity of Wrocław

Pochodna intuicyjnie

Definicja

Pochodna funkcji

Def. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy właściwą granicę (o ile istnieje)

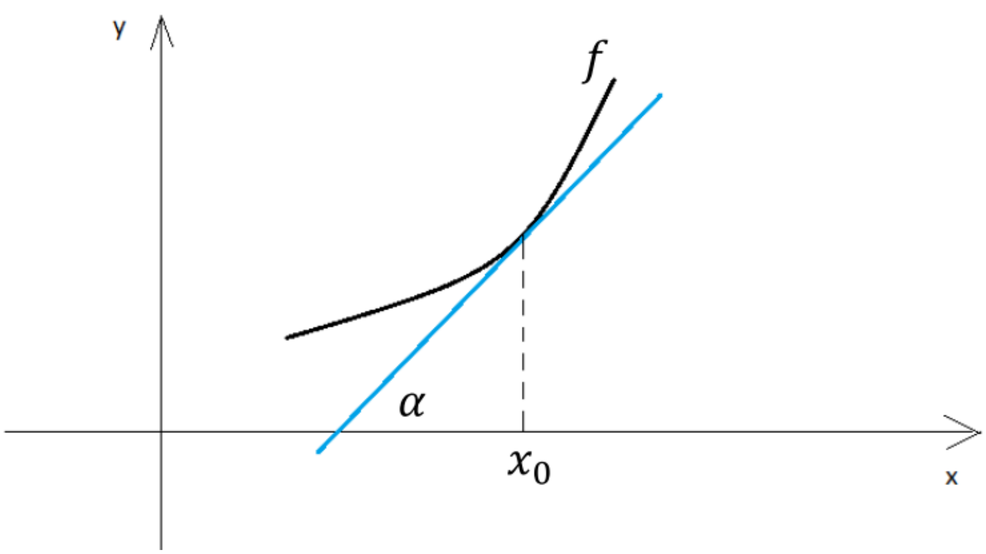
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Styczna

Równanie stycznej do f:

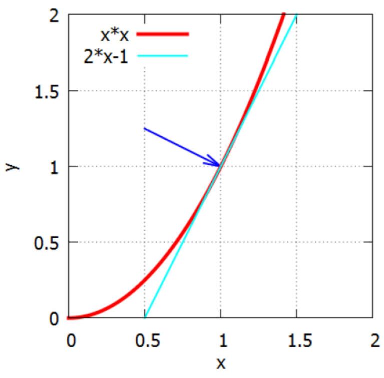
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Interpretacja geometryczna



Rozpatrzmy więc $y(x) = x^2$

- Oraz jej **liniowe przybliżenie** $f(x) = 2x - 1$ w okolicach punktu $(x_0, f(x_0))$:



Pochodna = prędkość zmian

ELEKTRYCZNOŚĆ

natężenie prądu $$I = \frac{dQ}{dt}$$ ładunek / czas

moc $$P = \frac{dW}{dt}$$ praca / czas

TERMODYNAMIKA

ciepło właściwe $$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$$ ciepło / temperatura

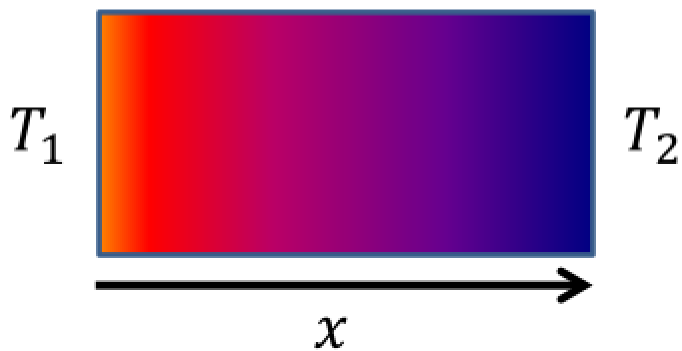
współczynnik rozszerzalności cieplnej $$\alpha_L = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT}$$ długość / temperatura

Układ RLC $$2\dot{Q}\frac{Q}{2C} + 2I\frac{L\dot{I}}{2} + I^2R = 0.$$

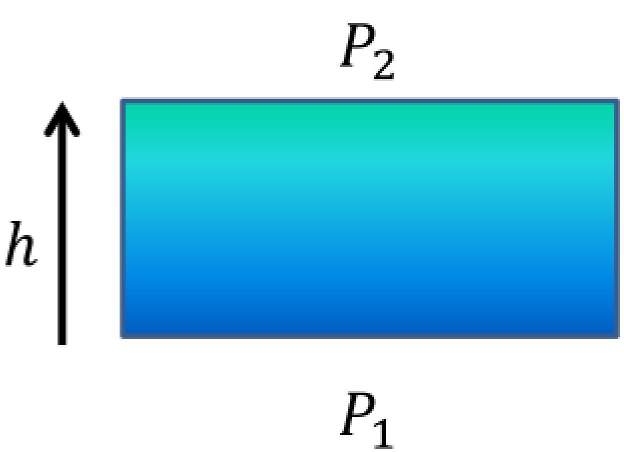
Gradient (∇)

- Gradient to prędkość zmiany jakiejś wielkości względem *odległości*

- gradient temperatury:
  $\nabla T = \frac{dT}{dx}$



- gradient ciśnienia:
  $\nabla P = \frac{dP}{dh}$



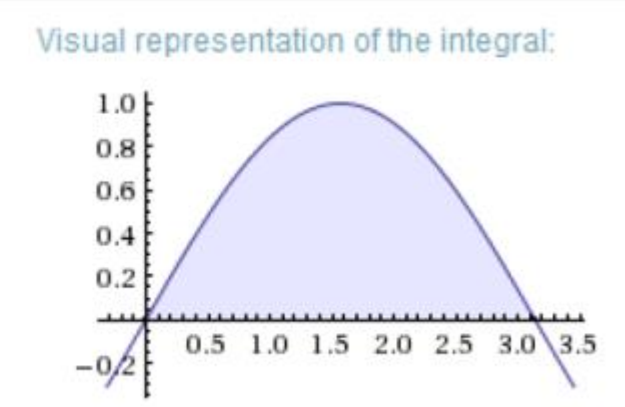
Fizyka

$x(t)$ położenie

$V(t)$ prędkość = pochodna $x(t)$ po t

$a(t)$ przyspieszenie = pochodna $V(t)$ po t

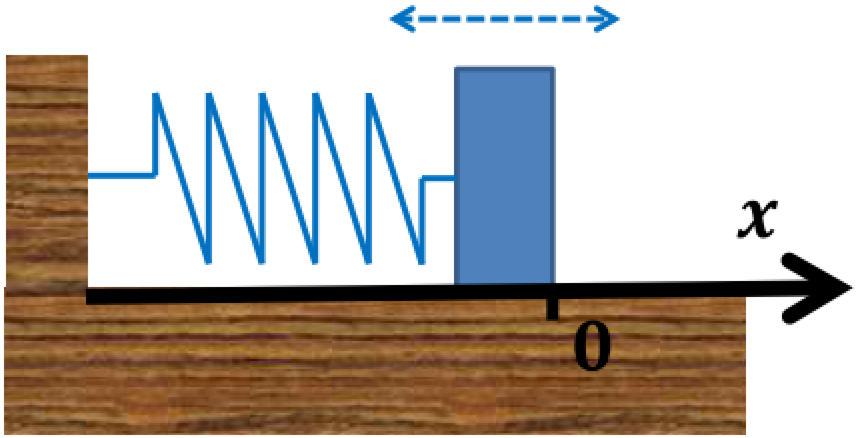
Droga = całka $V(t)$ po dt od t_1 do t_2
=(pole powierzchni pod funkcją $V(t)$)



Trajektoria = krzywa, którą zakreśla w przestrzeni poruszający się obiekt

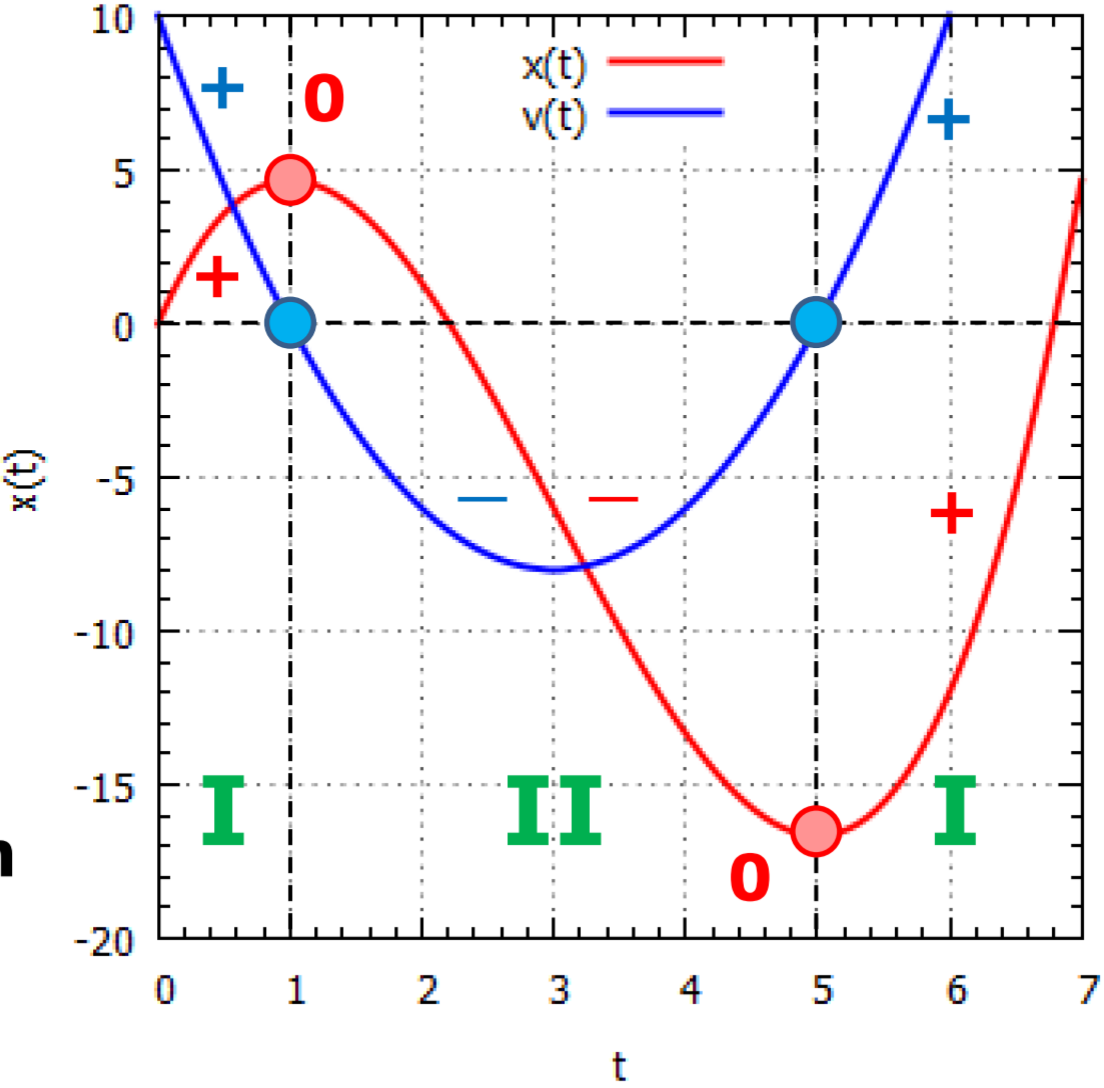
Przykład - zadanie

- Położenie pewnego obiektu, który porusza się po linii prostej wzdłuż osi x, dane jest równaniem
$$x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 10t, \qquad 0 \leq t \leq 7s$$
Jaką drogę przebył ten obiekt w ciągu pierwszych 7 sekund ruchu?



Kiedy funkcja jest rosnąca/malejąca?

- Obszar **I**: $x(t)$ jest **funkcją rosnącą** i $v(t) \equiv \boldsymbol{x'(t) > 0}$
- Obszar **II**: $x(t)$ jest **funkcją malejącą** i $v(t) \equiv \boldsymbol{x'(t) < 0}$
- Granice obszarów: $x(t)$ osiąga **minimum lub maksimum** i $\mathbf{x'(t) = 0}$



Przyspieszenie

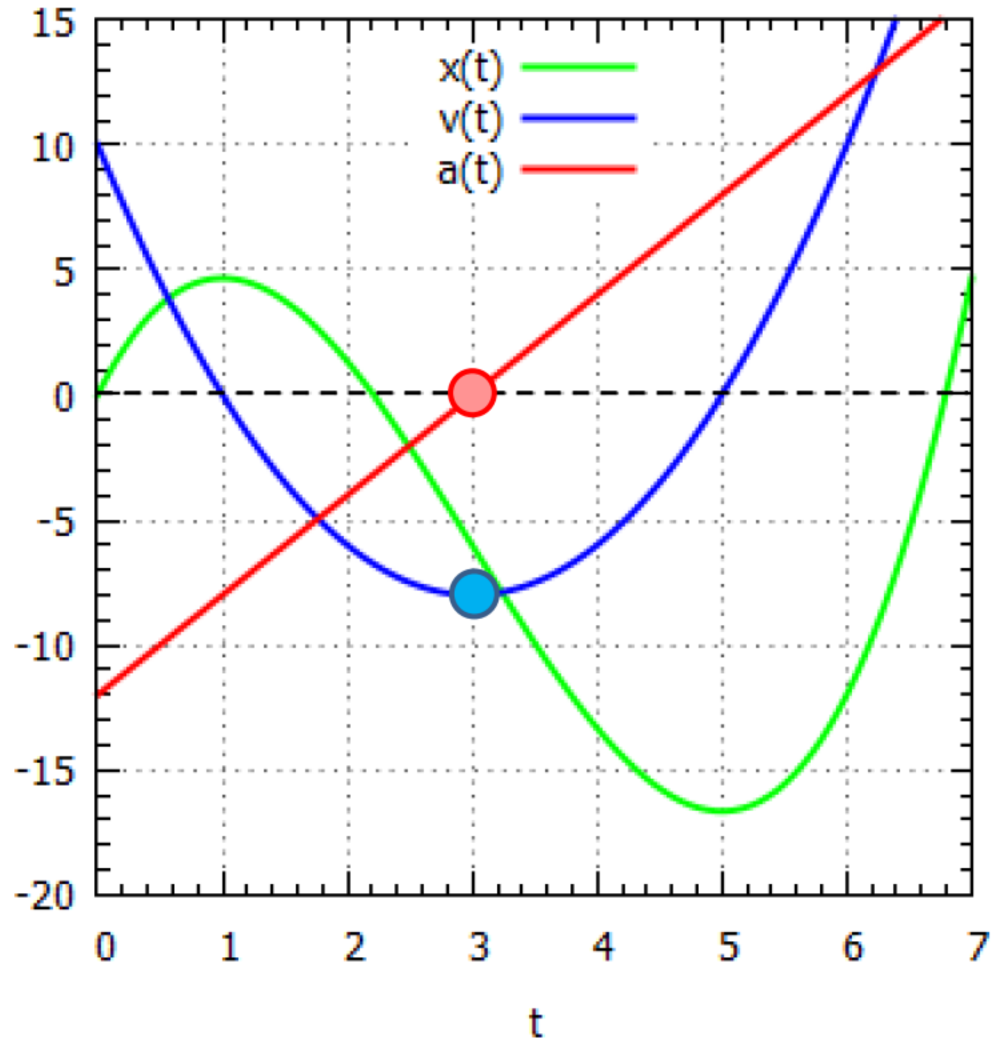
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a = \frac{d(2t^2\ - 12t + 10)}{\mathrm{dt}}$$

$$a(t) = 4t - 12$$

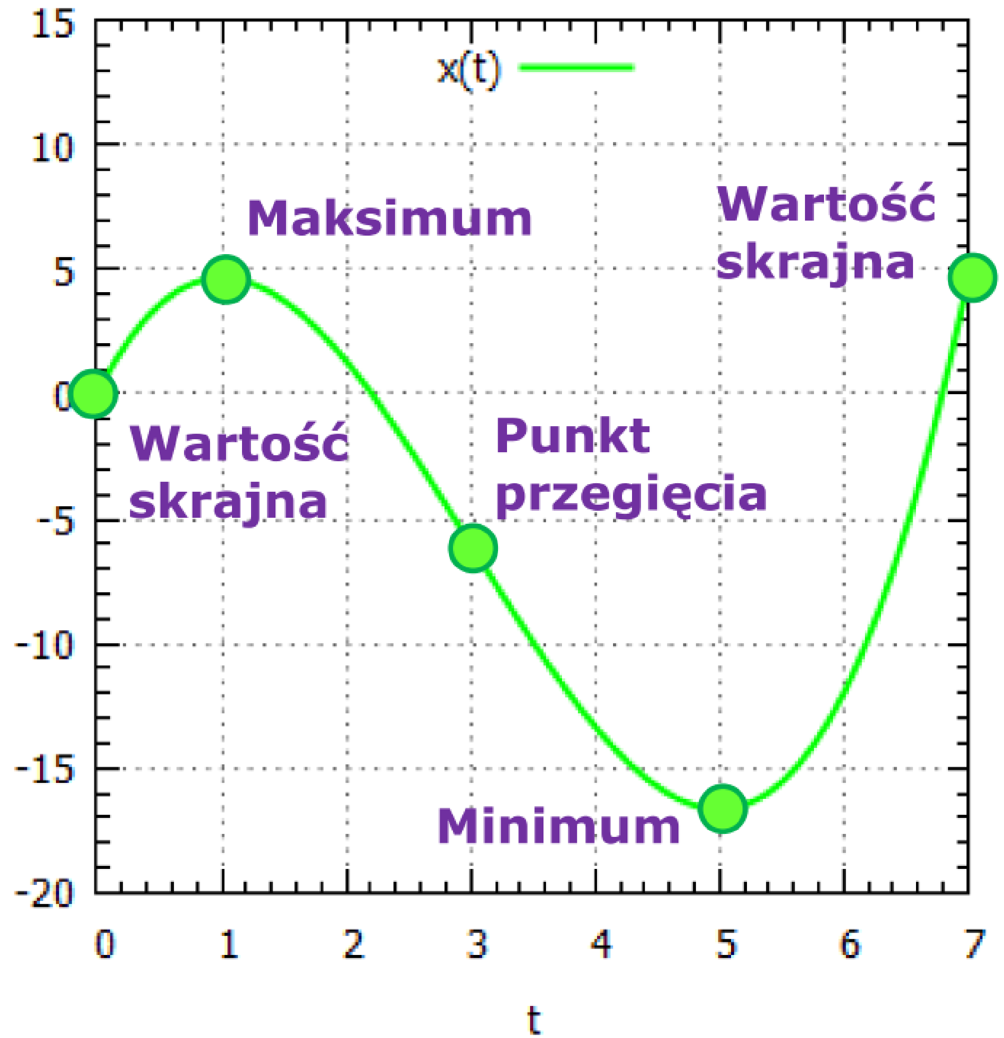
$$a(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

- $v(t)$ ma minimum dla $t = 3$



Pochodne są użyteczne

- Położenie **minimum**, **maksimum** i **punktów przegięcia** funkcji **najwygodniej** ustala się za pomocą szukania **miejsc zerowych** pierwszej i drugiej **pochodnej**

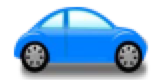


Badanie funkcji

Funkcja x(t)

- Dziedzina
- Przeciwdziedzina
- Punkty nieciągłości
- Ekstrema funkcji
- Przedziały monotoniczności
- Punkty, w których pochodna nie istnieje
- Punkty przegięcia

Położenie samochodu

- Kiedy  może jeździć?
- Gdzie  może jeździć?
- Czy  może się teleportować?
- Kiedy  zmienia kierunek jazdy?
- Kiedy  utrzymuje kierunek jazdy?
- Czy  odbija się od ściany jak  ?
- Kiedy  hamowanie ↔ gaz?

Jest łatwe i intuicyjne

Pochodna funkcji jest funkcją

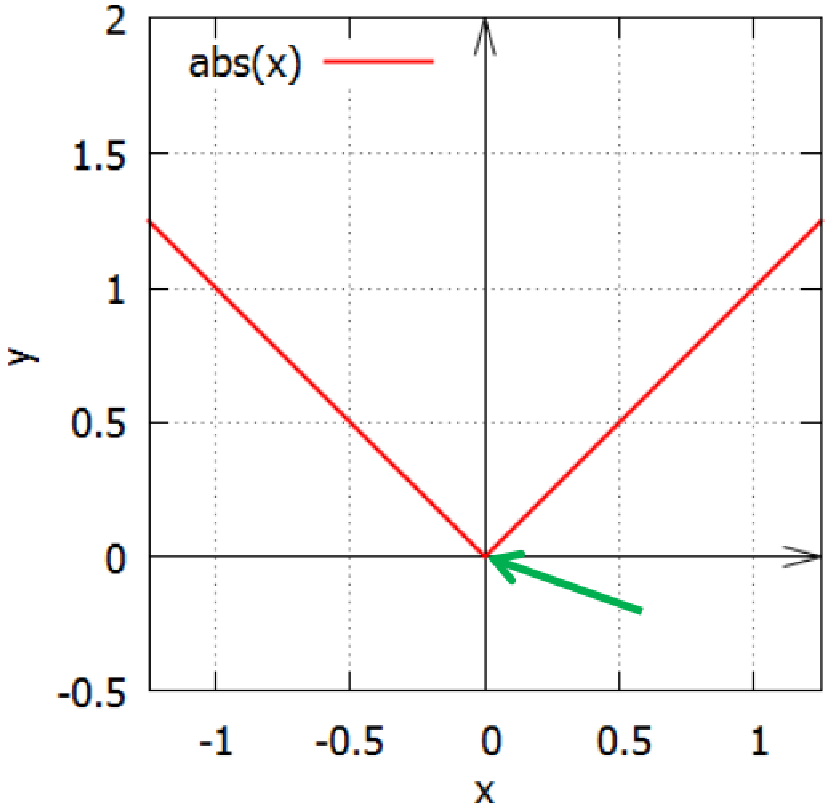
- Niech $f: A \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalną funkcją rzeczywistą. Wtedy każdemu punktowi $x \in A$ można przyporządkować pochodną funkcji f w tym punkcie. Funkcje tę nazywamy *funkcją pochodną* f

Operator $\frac{d}{dx}$

- Skoro $\frac{d}{dx} f$ jest funkcją pochodną funkcji f, to $\frac{d}{dx}$ można potraktować jako odwzorowanie zbioru funkcji w zbiór funkcji.
  Takie odwzorowanie zwie się **operatorem**.

Różniczkowalność a ciągłość

- Każda funkcja różniczkowalna jest ciągła
- Ale nie każda funkcja ciągła jest różniczkowalna



Dygresja: klasa funkcji C^n

- Symbolem C^n oznacza się zbiór wszystkich funkcji, które są n-krotnie różniczkowalne, przy czym n-ta pochodna jest ciągła
- Symbolem C^0 oznacza się zbiór wszystkich funkcji ciągłych
- Symbolem C^∞ oznacza się zbiór wszystkich funkcji różniczkowalnych dowolną liczbę razy (tzw. *funkcji gładkich*)

Podsumowanie

Wzory ogólne
$(af)' = a \cdot f'$
$(f + g)' = f' + g'$
$(fg)' = f'g + fg'$
$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \qquad \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$
$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$
$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'}$

Granice niewłaściwe $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Reguła de l'Hospitala

- Jeżeli dla pewnego $c \in R$ lub $c = \pm\infty$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \mathbf{0} \text{ lub } \pm\infty$$

oraz istnieje (właściwa) granica

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

to

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykłady

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

  bo $\lim_{x \to 0} \frac{[\sin(x)]'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

- $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

  bo $\lim_{x \to \infty} \frac{[\ln(x)]'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$

Pochodna funkcji odwrotnej - dygresja

1.3.2 Pochodna funkcji odwrotnej.

Jeśli $x = g(y)$ jest funkcją odwrotną funkcji $y = f(x)$ to

$$g' = \frac{1}{f'}$$

Przykładowo, $x = \ln y$ jest funkcją odwrotną funkcji $y = e^x$.

$$(\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

$$(ln\,x)' = \frac{1}{x}$$
$$(sin\,x)' = cos\,x$$
$$(cos\,x)' = -\,sin\,x$$
$$(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arccos\,\,x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctg\,x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

1.3.5 Pochodna funkcji wektorowej.

Funkcją wektorową będziemy nazywali wektor, którego składowymi są funkcje skalarne (często jednej zmiennej). Przykładowo, taką funkcją zależną od czasu jest wektor prędkości poruszającego się ciała $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$.
Zasady różniczkowania funkcji wektorowej jednej zmiennej $\vec{F}(t)$ (t – jest tu zmienną niezależną, względem której będziemy różniczkować) nie wymagają innych reguł, niż podane wyżej. Obliczamy po prostu pochodne składowych:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \left(\frac{dF_x}{dt}, \frac{dF_y}{dt}, \frac{dF_z}{dt}\right).$$

1.3.6 Druga pochodna i pochodne wyższych rzędów.

Druga pochodna jest to pochodna pierwszej

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}. \quad -$$

Oznaczamy ją także tak: $\boxed{\dfrac{d^2 f}{dx^2}}$.

Analogicznie określamy pochodną n-tego rzędu:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d\,f^{(n-1)}(x)}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dx^n} f(x)}$$

Pochodne wyższych rzędów

- Skoro pochodna funkcji sama może być funkcją, to sama może mieć swoją pochodną

- $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x),\ldots$
- $\frac{d}{dx}f(x), \frac{d^2}{dx^2}f(x), \frac{d^3}{dx^3}f(x),\ldots$
- $Df(x), D^2f(x), D^3f(x),\ldots$
- $\dot{f}(x), \ddot{f}(x), \dddot{f}(x)$

Pochodna cząstkowa

\partial "de kręcone"

1.3.7 Funkcja wielu zmiennych – pochodne cząstkowe.

Jeśli mamy funkcję wielu zmiennych, np. trzech, $f(x, y, z)$, to pochodną cząstkową względem określonej zmiennej, np. x, jest pochodna funkcji f względem tej zmiennej przy traktowaniu pozostałych zmiennych jak stałe. Taką pochodną oznaczamy

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}.$$

Pozostałe dwie pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y, z)$ to $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$.

Różniczka

2.1 Różniczka funkcji jednej zmiennej

Najprościej mówiąc, różniczka jest nieskończenie małym przyrostem danej wielkości (zmiennej, funkcji); przykładowo: drogi, czasu, ciśnienia, etc.

$$\frac{df}{dx} = f'(x),$$

mnożąc ją przez dx

$$\frac{df}{dx}dx = f'(x)dx,$$

i uprośćmy dx po lewej stronie. Otrzymamy

$$\boxed{df = f'(x)dx.}$$

Uzyskaliśmy przepis jak obliczyć różniczkę funkcji.

Przykład. Obliczenie różniczki funkcji $\sin^2 x$:
$d(\sin^2 x) = (\sin^2 x)' dx = 2 \sin x \cos x \, dx = \sin(2x) \, dx.$

Różniczka

$$\boxed{df = f'(x)dx.}$$

2.2 Różniczka funkcji wielu zmiennych

Jeśli mamy funkcję n zmiennych $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ to różniczka tej funkcji df wyraża sie wzorem

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n,$$

gdzie $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ są przyrostami poszczególnych zmiennych, zaś df jest całkowitym przyrostem funkcji f.

Przykładowo, dla funkcji która zależy tylko od położenia (czyli od współrzędnych x, y, z)

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.}$$

Przykład: objętość kuli

- Kulka z łożyska tocznego ma średnicę 2,3 mm, co oznacza, że objętość kulki wynosi

$$V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}3706263027\ \mathrm{mm}^3$$

Dokładność suwmiarki, której użyto do pomiaru średnicy kulki, wynosi 0,1 mm. Jaka jest dokładność pomiaru jej objętości?

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$
$$V(d) \approx V'(d_0) \cdot (d - d_0) + V(d_0)$$
$$V(d) - V(d_0) \approx V'(d_0) \cdot (d - d_0)$$
$$\Delta V \approx V' \Delta d$$
$$|\Delta \boldsymbol{V}| \approx |\boldsymbol{V}'| \cdot |\Delta \boldsymbol{d}|$$

Oszacowanie niepewności zmiennej zależnej

Współczynnik proporcjonalności, czyli pochodna V’(d)

Niepewność wartości zmiennej niezależnej

Ogólny wzór
na niepewność pomiarową

$$|\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \approx |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \cdot |\Delta \boldsymbol{x}|$$

$$|\Delta \boldsymbol{V}| \approx |\boldsymbol{V}'| \cdot |\Delta \boldsymbol{d}|$$

Oszacowanie niepewności zmiennej zależnej

Współczynnik proporcjonalności, czyli pochodna V'(d)

Niepewność wartości zmiennej niezależnej

$$V(d) = \frac{\pi \mathrm{d}^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V'(d) = 3 \cdot \frac{\pi d^{3-1}}{6} = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$|\Delta V| \approx \frac{\pi d^2}{2} \cdot |\Delta d| = 3{,}14 \cdot \frac{2.3^2}{2} \cdot 0.1 \; = 0{,}83 \; [\mathrm{mm}^3]$$

$$\boldsymbol{V = 6,37 \; \pm 0,83 \; \mathrm{mm}^3}$$

Notacja

$$d = 2{,}30 \pm 0{,}1\ \mathrm{mm}$$

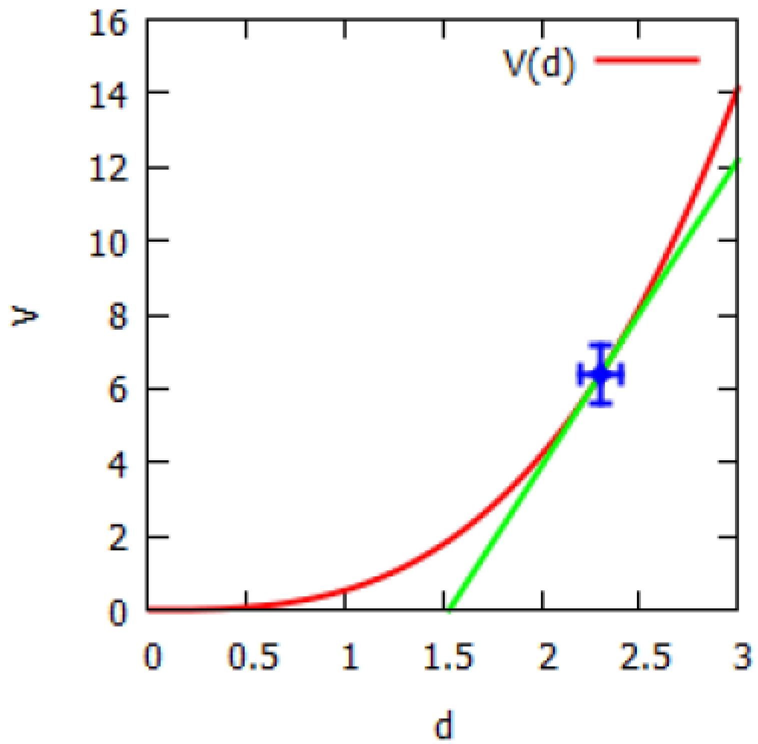
$$V = 6{,}37\ \pm 0{,}83\ \mathrm{mm}^3$$

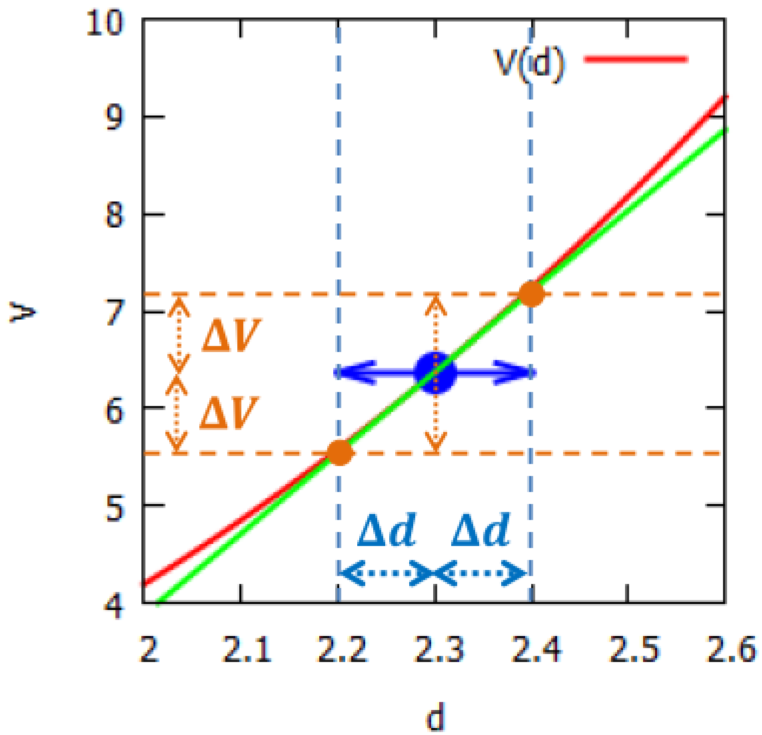
2 cyfry znaczące

alternatywny (zalecany) zapis:

$$V = 6{,}37(83)\ \mathrm{mm}^3$$

Dlaczego to działa?





Błąd pomiarowy

Voltomierz

Amperomierz

$$\frac{U}{I}$$

1.4 ± 0.1

2.5 ± 0.3

$$\text{Opór} = R \pm \Delta R \quad ?$$

$$= \frac{U}{I} = \frac{1.4}{2.5}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$$

$$R = R_0 \pm \Delta R \qquad R = \frac{U}{I} \quad \text{so} \quad R_0 = \frac{U_0}{I_0}$$

$$\begin{cases} U = U_0 \pm \Delta U \\ I = I_0 \pm \Delta I \end{cases}$$

$$|\Delta R| = \left|\frac{\partial R(U,I)}{\partial U}\right|\Bigg|_{\substack{U=U_0\\ I=I_0}} \cdot |\Delta U| + \left|\frac{\partial R(U,I)}{\partial I}\right|\Bigg|_{\substack{U=U_0\\ I=I_0}} \cdot |\Delta I|$$

Szereg Taylora

- Szereg Taylora funkcji $f(x)$ w punkcie a, w którym ta funkcja jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy, definiuje się wzorem

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ \dots$$

czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Zbieżność

- Nie ma gwarancji, że szereg Taylora funcji f względem a jest zbieżny do f dla każdego x
- Bywa, że jest zbieżny tylko w pewnym otoczeniu punktu a
- O funkcji f, dla której jej szereg Taylora w punkcie a jest zbieżny do $f(x)$ w pewnym otoczeniu tego punktu, mówi się, że jest ***funkcją analityczną*** w a.

Aproksymacja

- Szereg Taylora często się ucina na kilku pierwszych wyrazach, tworząc tzw. wielomian Taylora
- Jest to zwykle doskonały sposób aproksymacji funkcji w pobliżu wybranego punktu
- Wielomian Taylora stopnia 1 daje znany nam wzór

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Pochodna numeryczna

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\approx \frac{f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-f(x)}{h} \approx \boldsymbol{f'(x)+O(h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$\approx \frac{\cancel{f(x)}+f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}-\left[\cancel{f(x)}-f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}\right]}{2h}$$

Pochodna numeryczna

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\approx \frac{f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-f(x)}{h} \approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

dokładniejszy wzór

$$\approx \frac{\cancel{f(x)}+f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}-\left[\cancel{f(x)}-f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}\right]}{2h}$$

$$\approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h^2)}$$