

Ciągi - Wstęp

Definicja ciągu

Ciąg - przyporządkowanie wszystkim liczbom naturalnym z przedziału od 1 do n lub wszystkim liczbom naturalnym elementów z pewnego zbioru.

Przykłady ciągów:

- Ciąg liczbowy: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... - ciąg kolejnych liczb naturalnych.
- Ciąg zwierząt: *kot*, *pies*, *krowa*, *koń*, *owca*, *kura*, ...
- Ciąg skończony: 1, 2, 3, 4, 5
- Ciąg nieskończony: 2, 4, 8, 16, ...

Ciąg to funkcja:

$$f : n \rightarrow a_n$$

czyli

$$f(n) = a_n$$

Słownie: funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej n jej odpowiedni wyraz ciągu a_n .

Etykiety (labels)

$$n = \{1, 2, \dots\}$$

Wyrazy ciągu (terms):

$$a_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Przykłady ciągów liczbowych

- $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ - ciąg kolejnych liczb naturalnych.
- $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$ - ciąg kolejnych liczb parzystych dodatnich.
- $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$ - naprzemienny ciąg liczb dodatnich i ujemnych.
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ - malejący ciąg ułamków.
- $3, 9, 27, 81, 243, \dots$ - ciąg kolejnych potęg 3.
- $80, 77, 74, 71, 68, 65, 62, 59, 56, \dots$ - ciąg malejący.

Wzór ogólny ciągu

Wzór ogólny ciągu - to reguła (funkcja), według której powstaje dany ciąg.

- Zamiast pisać: $f(n) = 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$, napiszemy krótko: $a_n = 2n$.
- Zamiast pisać: $f(n) = n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$, napiszemy krótko: $a_n = n^2$.
- Zamiast pisać: $f(n) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, napiszemy krótko: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Uwaga: $(-1)^n = 1$ dla n parzystych i $(-1)^n = -1$ dla n nieparzystych.

Wzór rekurencyjny ciągu

Wzór rekurencyjny ciągu - to reguła, według której powstaje dany ciąg, w której kolejne wyrazy zależą od poprzednich.

- $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2$ - ciąg arytmetyczny o różnicy 2.
- $a_1 = 1, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$ - ciąg geometryczny o ilorazie 2.
- $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ - ciąg naprzemienny.

Ciągi arytmetyczne i geometryczne - porównanie

Ciąg arytmetyczny:

- Wzór na n -ty wyraz: $a_n = a_1 + (n - 1)r$
- Suma wyrazów: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
- Średnia arytmetyczna: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

Ciąg geometryczny:

- Wzór na n -ty wyraz: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- Suma wyrazów: $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$
- Średnia geometryczna: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Tabela porównawcza:

Ciąg	Wzór na n -ty wyraz	Suma wyrazów	Średnia
Arytmetyczny	$a_n = a_1 + (n - 1)r$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
Geometryczny	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$	$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Ciąg geometryczny

Ciąg geometryczny definiujemy jako ciąg, w którym każdy wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez stałą liczbę q (iloraz ciągu):

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1 \cdot q^0$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Iloraz ciągu geometrycznego wyraża się wzorem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Przykład:

Jeżeli $a_1 = 2$ oraz $q = 2$, to kolejne wyrazy ciągu to:

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 2 \cdot 2 = 4 \quad a_3 = 2 \cdot 2^2 = 8 \quad a_4 = 2 \cdot 2^3 = 16 \quad a_7 = 2 \cdot 2^6 = 128$$

Suma ciągu geometrycznego

Suma wyrazów ciągu geometrycznego S_n wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$$

Dla sumy skończonej, wzór na sumę jest:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Jeśli $q > 1$, suma ciągu geometrycznego rośnie w nieskończoność.

Jeśli $|q| < 1$, to suma ciągu geometrycznego dąży do:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Ciąg arytmetyczny

Ciąg arytmetyczny definiujemy jako ciąg, w którym każdy wyraz powstaje przez dodanie do poprzedniego wyrazu stałej liczby r (różnica ciągu):

$$a_1 = a_1 + 0 \cdot r \quad a_2 = a_1 + 1 \cdot r \quad a_3 = a_1 + 2 \cdot r \quad a_4 = a_1 + 3 \cdot r \quad \vdots \quad a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Różnica ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem:

$$a_{n+1} - a_n = r$$

Przykład:

Jeżeli $a_1 = 1$ oraz $r = 2$, to kolejne wyrazy ciągu to:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 + 2 = 3 \quad a_3 = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 2 = 7 \quad a_7 = 1 + 6 \cdot 2 = 13$$

Suma ciągu arytmetycznego

Suma wyrazów ciągu arytmetycznego S_n wyraża się wzorem:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład:

Jeżeli $a_1 = 1$, $a_n = 100$ oraz $n = 100$, to suma wynosi:

$$S_{100} = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = \frac{101}{2} \cdot 100 = 5050$$

Ciągi - ciąg dalszy

Suma ciągu arytmetycznego (Gauss)

Nauczyciel Gaussa kazał uczniom zsumować liczby od 1 do 100. Gauss niemal natychmiast podał wynik 5050. Jak to zrobił?

Rozważmy sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do 100:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

i dodajmy do niej tę samą sumę w odwrotnej kolejności:

$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1$$

Możemy teraz zauważyć, że suma obu tych ciągów wynosi:

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 = 101 \cdot 100$$

$$S_{100} = \frac{101}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100$$

Mając

$$S_{100} = \frac{101}{2} \cdot 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100$$

sumę tę można uogólnić dla dowolnego ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

gdzie a_1 to pierwszy wyraz ciągu, a_n to n -ty wyraz ciągu, a n to liczba wyrazów ciągu.

Skąd się wziął wzór na sumę geometrycznego?

Rozważmy sumę ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Pomnóżmy tę sumę przez iloraz ciągu q :

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdots + a_n \cdot q$$

Odejmijmy od powyższego równania pierwotne równanie sumy:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \cdots + a_n \cdot q - a_1 - a_2 - a_3 - \cdots - a_n$$

Zauważmy, że wiele wyrazów się skróci:

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

Zatem:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Gdy mamy niekończący się ciąg geometryczny gdzie $|q| < 1$, to suma wyrazów tego ciągu wynosi:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Suma nieskończona jest równa:

$$S = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$$

Zauważmy, że w nawiasie mamy:

$$Z = (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = 1 + q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = 1 + q \cdot Z$$

Zatem:

$$Z = \frac{1}{1 - q}$$

A więc suma nieskończona ciągu geometrycznego wynosi:

$$S = a_1 \cdot Z = \frac{a_1}{1 - q}$$

Ciągi - dalsze przykłady

Liczby Fibonacciego

Ciąg Fibonacciego to ciąg liczb naturalnych, w którym każda liczba jest sumą dwóch poprzednich liczb, zaczynając od 0 i 1:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Wzór na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Pierwsze dwadzieścia wyrazów ciągu Fibonacciego to:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Ciąg został omówiony w roku 1202 przez Leonarda z Pizy, zwanego Fibonaccim, w dziele *Liber abaci* jako rozwiązanie zadania o rozmnażaniu się królików.

Mamy wzór rekurencyjny, ale czy jest wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego?

Używając złotej proporcji $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, można obliczyć n -ty wyraz ciągu jako:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Liczby Catalana

Liczby te zostały po raz pierwszy wprowadzone przez Leonarda Eulera w XVIII wieku, który badał liczbę podziałów wielokątów na trójkąty. Zostały nazwane na cześć Eugène Charlesa Catalana, który rozważał je jako liczbę sposobów rozmieszczeń nawiasów w wyrażeniach matematycznych.

Ciąg liczb Catalana to ciąg liczb naturalnych:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots$$

Wzór na n -ty wyraz ciągu Catalana:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

Serial Lost

W serialu Lost pojawia się ciąg liczb: 4, 8, 15, 16, 23, 42. Ich suma wynosi 108. Co 108 minut w serialu resetuje się stacja badawcza.

Link: <https://oeis.org/A104101>

Liczby pierwsze

Ciąg liczb pierwszych to ciąg liczb naturalnych, które są większe od 1 i mają dokładnie 2 dzielniki: 1 i samą siebie.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Wzór na n -tą liczbę pierwszą:

$$p_n = \text{nth prime number} = ???$$

Wolfram Alpha

Czasami warto skorzystać z Wolfram Alpha, aby znaleźć wzory na ciągi liczb: [przykład](#).

OEIS - The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) to internetowa encyklopedia ciągów liczb całkowitych. Zawiera ponad 300 tysięcy ciągów liczb, wraz z informacjami na ich temat.

Przykłady ciągów z OEIS:

- Ciąg Fibonacciego: [A000045](#)
- Ciąg liczb Catalana: [A000108](#)
- Ciąg liczb pierwszych: [A000040](#)
- Podział tortu n-cięciami: \$1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, 93, 130, ... \$[A000125](#)

Zawiera też wartości kombinacji stałych matematycznych i fizycznych!

Szeregi

Szeregi

Sumy częściowe

Dla danego nieskończonego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) definiuje się N -tą sumę częściową tego ciągu (lub sumę częściową szeregu) jako

$$s_N = \sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Ciąg (s_N) nazywamy **ciągiem sum częściowych**.

Definicja szeregu

Szeregiem nazywamy ciąg sum częściowych (s_N) utworzony z wyrazów ciągu (a_n) .

Suma szeregu

Jeżeli istnieje granica ciągu sum częściowych:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N,$$

to liczba S nazywana jest **sumą szeregu**. W takim przypadku mówimy, że **szereg jest zbieżny**.

Jeżeli taka granica nie istnieje lub jest nieskończona, to **szereg jest rozbieżny** i nie ma sumy właściwej.

Suma szeregu

Sumę szeregu zapisuje się symbolicznie jako

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Równania nowego typu:

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n} + \frac{1}{64^n} + \dots = 4^n - 1$$

Ciąg i szereg harmoniczny

Mikołaj Oresme, (ur. około 1320, zm. 11 lipca 1382) – francuski średniowieczny filozof i katolicki biskup. Prowadził badania w zakresie matematyki, ekonomii, fizyki i astronomii. Ponadto był uznanym tłumaczem i komentatorem dzieł Arystotelesa.

Do jego osiągnięć zalicza się: tworzenie francuskiej terminologii naukowej, w matematyce – wprowadzenie potęgi w wykładniku ułamkowym i udowodnienie rozbieżności **szeregu harmonicznego**, w astronomii – koncepcję dobowego ruchu Ziemi, w ekonomii – pionierskie prace na temat teorii pieniądza.

Wiemy, że:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \text{ zbiega do } 2$$

Co zrobić z bardzo podobnym wyrażeniem?

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Dowód Oresme na rozbieżność szeregu harmonicznego:

Oresme zauważył (ok 1380 AD), że możemy podzielić ciąg na grupy:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

a później napisać nierówność

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots > 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

Prawa strona

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \infty$$

Co ciekawe, jeśli będziemy mieć naprzemienny ciąg harmoniczny to ten jest skończony:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Zwróćmy również uwagę na tzw. funkcję zeta Riemanna:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Trwają wysiłki by znaleźć miejsc zerowe tej funkcji, ponieważ są one związane z liczbami pierwszymi. Jest to jedno z najważniejszych nierozwiązanych problemów matematycznych.

Ciekawostka: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Tak, to jest równość!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna to metoda dowodzenia używana do wykazania prawdziwości pewnego twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych. Proces ten składa się z dwóch etapów:

1. **Krok bazowy:** Wykazujemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pierwszej liczby naturalnej (najczęściej $n = 1$).
2. **Krok indukcyjny:** Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej $n = k$ (tzw. założenie indukcyjne), i wykazujemy, że jest ono prawdziwe również dla $n = k + 1$.

Jeżeli oba kroki zostaną spełnione, wówczas zgodnie z zasadą indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.

Przykład: Udowodnij, sumę sześciątów liczb naturalnych da się zapisać jako:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$$

1. Krok bazowy (dla ($n = 1$)):

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{2^2}$$

Lewa strona = Prawa strona, więc dla ($n = 1$) równanie jest prawdziwe.

2. Krok indukcyjny (dla ($n = 2$)):

$$1^3 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{2^2}$$

Zatem lewa strona = prawa strona, czyli $g = g$, co oznacza, że dla $n = 2$ równanie również jest prawdziwe.

1. Założenie indukcyjne:

Zakładamy, że dla pewnej liczby n równanie jest prawdziwe:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$$

4. Dowód dla $n + 1$:

Musimy wykazać, że:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}$$

Dodajemy $(n+1)^3$ do obu stron:

$$L = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2^2} + (n+1)^3$$

Uproszczenie:

$$= \frac{(n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right)}{2^2}$$

Po dalszych przekształceniach:

$$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4n + 4)}{2^2}$$

Ostatecznie:

$$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{2^2}$$

Dowód zakończony, więc twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq 1$.