

Liczby i operacje matematyczne

Liczby

Liczby to podstawowy element matematyki, który służy do wyrażania ilości, wielkości, odległości, czasu, masy, temperatury, prędkości, energii, pieniędzy, informacji, itp. Liczby można podzielić na różne kategorie, takie jak liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, rzeczywiste, zespolone, itp. Każda kategoria liczb ma swoje własne właściwości i zastosowania w matematyce i naukach ścisłych.

- Naturalne: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ Oznaczone jako $\mathbb{N}$
- Całkowite: $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ Oznaczone jako $\mathbb{Z}$
- Rzeczywiste: $-3.5, 0, 2.71828, \pi, \dots$ Oznaczone jako $\mathbb{R}$
- Ułamki: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{22}{7}, \dots$ Oznaczone jako $\mathbb{Q}$
- Niewymierna: $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$ Oznaczone jako $\mathbb{P}$
- Zespólone: $1 + 2i, 3 - 4i, \dots$ Oznaczone jako $\mathbb{C}$
- Transcendentalne: $\pi, e, \dots$
- Dodatnie: $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Ujemne: $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$
- Parzyste: $0, 2, 4, 6, 8, \dots$
- Nieparzyste: $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- Pierwsze: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$
- nieskończone: $\infty, -\infty$

Liczby naturalne ($\mathbb{N}$)

- Zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- Są to liczby, które wykorzystujemy do **liczenia i porządkowania**.
- Czasami zbiór liczb naturalnych zaczyna się od zera, co zależy od przyjętej definicji:

$$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Liczby całkowite ($\mathbb{Z}$)

- Zbiór liczb całkowitych:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

- Zawiera wszystkie liczby naturalne oraz ich **przeciwnie** (liczby ujemne).
- Umożliwia reprezentację wartości **poniżej zera**, co jest istotne w wielu dziedzinach nauki i inżynierii.

Liczby wymierne

Zbiór liczb wymiernych oznaczamy przez:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

Definicja

Liczby wymierne to liczby rzeczywiste, które można przedstawić w postaci ilorazu liczby całkowitej i liczby całkowitej różnej od zera.

Własności

- **Rozwinięcie dziesiętne** liczby wymiernej jest skończone lub okresowe.
- Każdą liczbę wymierną można rozwinąć w skończony **ułamek łańcuchowy**.

Zamiana rozwinięcia okresowego na ułamek zwykły

Rozważmy liczbę:

$$A = 0,7162162162 \dots$$

Okresem (powtarzającą się częścią) jest **162**, a jego długość wynosi 3.

Krok 1: Przesunięcie przecinka

Mnożymy przez 10, aby przecinek znalazł się tuż przed początkiem okresu:

$$10A = 7,162162162 \dots$$

Krok 2: Przesunięcie o długość okresu

Teraz mnożymy przez 10^3 , ponieważ okres ma 3 cyfry:

$$10^4 A = 7162,162162 \dots$$

Krok 3: Odejmowanie równań

Odejmujemy pierwsze równanie od drugiego, aby zlikwidować część okresową:

$$10000A - 10A = 7162,162162 \dots - 7,162162 \dots$$

co daje

$$9990A = 7155.$$

Krok 4: Wyznaczenie A

$$A = \frac{7155}{9990} = \frac{53}{74}. \quad \text{czyli} \quad 0,7162162162 \dots = \frac{53}{74}$$

Liczby niewymierne i ciekawostki

Nie wiadomo, czy liczby takie jak

$$\pi e, \quad \frac{\pi}{e}, \quad \pi^e, \quad \pi^{\sqrt{2}}, \quad \ln \pi,$$

a także stała Catalana są niewymierne.

Pytanie: Czy $0,999 \dots = 1$?

Tak, to prawda!

Z matematycznego punktu widzenia liczba $0,999 \dots$ jest **również równa 1**, ponieważ granica ciągu $(0,9, 0,99, 0,999, \dots)$ wynosi dokładnie 1.

Logarytmy i niewymierność

Założmy, że $\log_2 3$ jest liczbą wymierną. Wtedy dla pewnych dodatnich liczb całkowitych m i n :

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}.$$

Z tego wynika:

$$2^{m/n} = 3,$$

czyli

$$(2^{m/n})^n = 3^n,$$

a więc

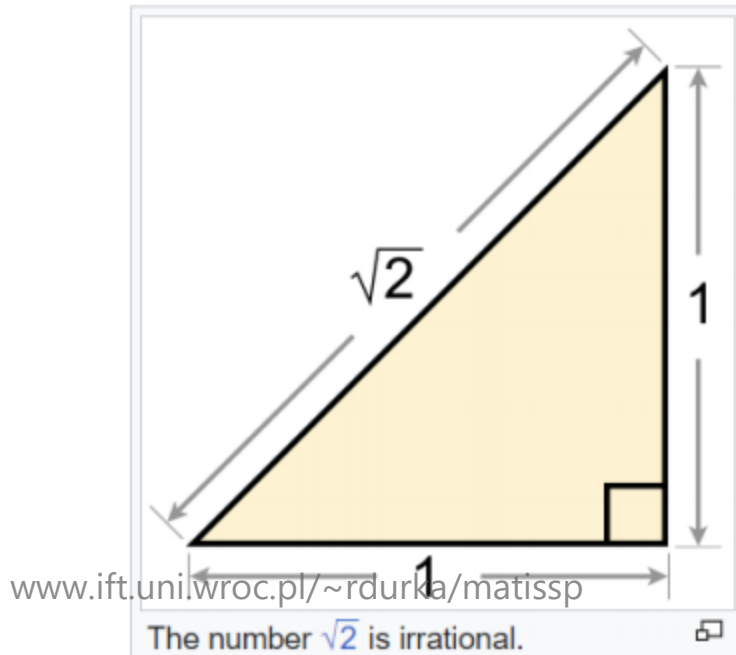
$$2^m = 3^n.$$

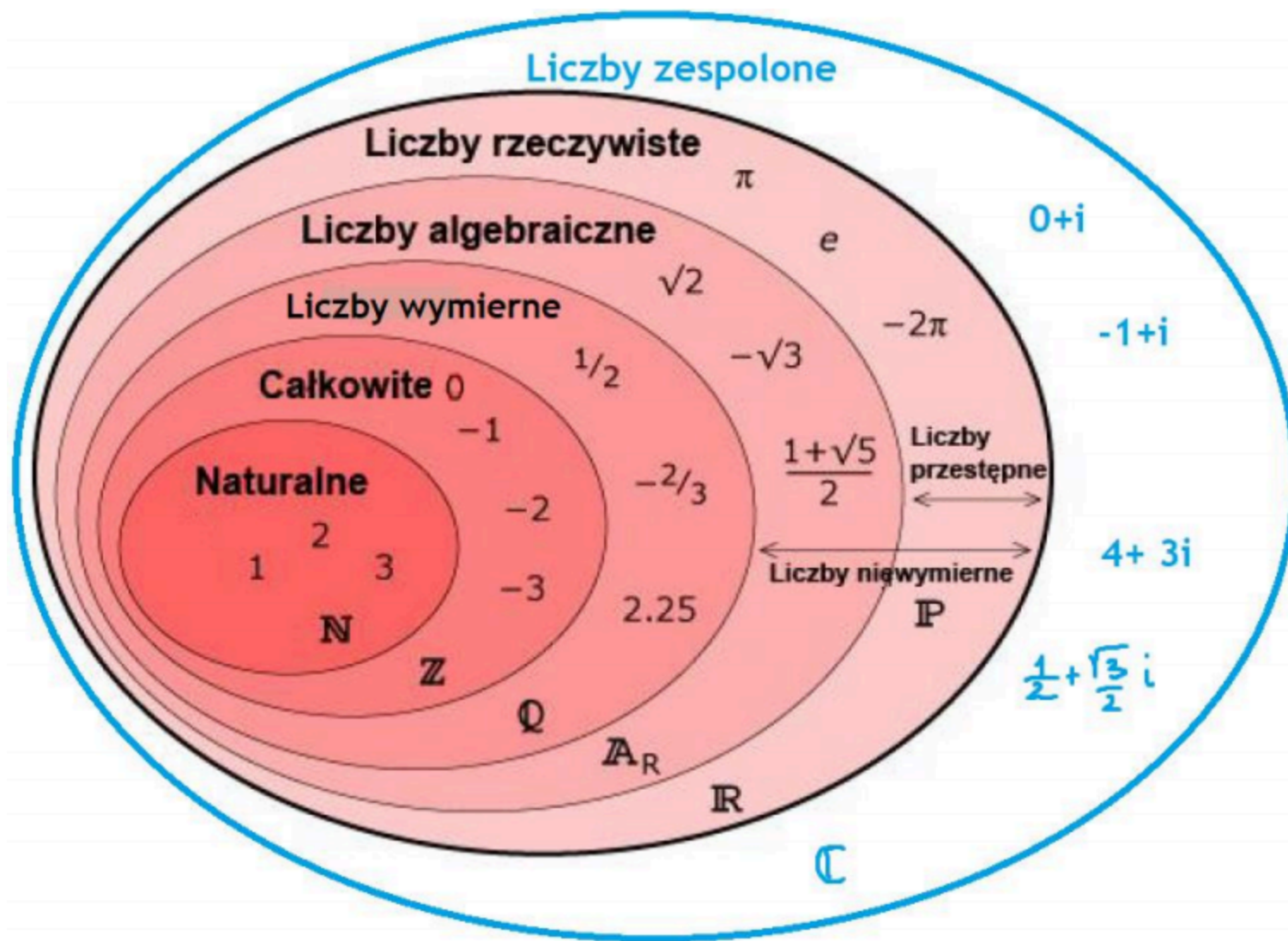
To jednak niemożliwe, ponieważ liczby 2^m i 3^n są różnymi potęgami różnych liczb pierwszych — sprzeczność, więc $\log_2 3$ musi być niewymierny.

Liczby niewymierne

Liczby niewymierne ($\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) to liczby rzeczywiste, które **nie są** liczbami wymiernymi, czyli takie liczby rzeczywiste, których **nie można** przedstawić w postaci ilorazu liczby całkowitej i liczby całkowitej różnej od zera.

- **Rozwinięcie dziesiętne** liczby niewymiernej jest **nieskończone i nieokresowe**.
- Każdą liczbę niewymierną można rozwinąć w **nieskończony ułamek łańcuchowy**.





Zbiory

Definicja zbioru - to kolekcja elementów, które są ze sobą powiązane.

- Pusty: $\emptyset$ definiuje zbiór, który nie zawiera żadnych elementów
- Skończony: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- nieskończony: $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Przemienny: $\{a, b, c, d, e\}$
- Nieprzemienny: $\{a, b, c, d, a\}$
- Podzbiór: $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Operacje na zbiorach

- Suma: $A \cup B$ definiuje zbiór elementów, które należą do A lub B
- Przecięcie: $A \cap B$ definiuje zbiór elementów, które należą zarówno do A i B
- Różnica: $A \setminus B$ definiuje zbiór elementów, które należą do A i nie należą do B
- Moc zbioru: $|A|$ - liczba elementów w zbiorze

Algebra

Zbiór z działaniem dwuargumentowym, czyli $\{A, \otimes\}$, gdzie A to zbiór, a $\otimes$ to działanie dwuargumentowe.

Iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów A i B to zbiór wszystkich uporządkowanych par (a, b) , gdzie $a \in A$ i $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Potęga i wykładnik

Potęgowanie to operacja matematyczna, która polega na wielokrotnym mnożeniu danej liczby przez samą siebie. Liczbę, którą mnożymy, nazywamy **podstawą** potęgi, a liczbę określającą, ile razy mnożenie jest wykonywane, nazywamy **wykładnikiem**.

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \quad (n \text{ czynników})$$

W wyrażeniu a^b , a to podstawa, a b to wykładnik. Na przykład, w wyrażeniu 2^3 , liczba 2 jest podstawą, a 3 to wykładnik, co oznacza $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

- Jeśli x jest podstawą, mamy **funkcję potęgową**. Przykład: x^2 .
- Jeśli x jest wykładnikiem, mamy **funkcję wykładniczą**. Przykład: 2^x .

Ps. niedługo zobaczysz, że jest pewna szczególna podstawa, która jest bardzo ważna w matematyce, mianowicie liczba $e = 2.71828 \dots$. Funkcja e^x jest bardzo ważna w analizie matematycznej.

Pierwiastek

Pierwiastek to operacja odwrotna do potęgowania. Pierwiastek stopnia n z liczby a to liczba b , taka że $b^n = a$. Przykładowo, pierwiastek kwadratowy z 9 to 3, ponieważ $3^2 = 9$.

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad b^n = a$$

Logarytm

Logarytm to operacja odwrotna do potęgowania, która odpowiada na pytanie: "Do jakiej potęgi c należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b ". Matematycznie, logarytm przy podstawie a z liczby b oznacza liczbę c , taką że:

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Na przykład, $\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$. Logarytmy są szczególnie przydatne przy rozwiązywaniu równań wykładniczych.

Przykłady:

- $2^3 = 8$, więc $\log_2 8 = 3$
- $10^3 = 1000$, więc $\log_{10} 1000 = 3$

Najlepszy sposób na zapamiętanie tego

Na lewym wierzchołku jest podstawa, a górze wykładnik, zaś na prawym wierzchołku wynik.

Rozważ trzy scenariusze:

$$\begin{array}{c} x \\ / \quad \backslash \\ 10 - 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ x - 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ / \quad \backslash \\ 10 - x \end{array}$$

Logarytmy:

$$10^x = 1000 \quad \Rightarrow \quad x = \log_{10}(1000) = 3$$

Pierwiastkowanie:

$$x^3 = 1000 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Potęgowanie:

$$10^3 = x \quad \Rightarrow \quad x = 1000$$

Liczba e

Liczba e , znana również jako liczba Eulera lub liczba Nepera, jest podstawą logarytmu naturalnego i jedną z najważniejszych stałych matematycznych.

Zastosowania liczby e

Liczba e występuje w funkcjach wykładniczych i logarytmicznych, a także w szeregu zastosowań praktycznych:

- **Analiza matematyczna:** podstawowa rola w różniczkowaniu i całkowaniu funkcji wykładniczych.
- **Równania różniczkowe:** rozwiązania wielu równań różniczkowych naturalnie przyjmują postać wykładniczą z podstawą e .
- **Zjawiska fizyczne i finansowe:** liczba e modeluje wzrost wykładniczy, np. w populacjach, procesach chemicznych, i finansach (oprocentowanie składane).
- **Statystyka:** rozkład normalny Gaussa, czyli krzywa dzwonowa.

Definicje liczby e

Przybliżona wartość liczby e wynosi:

$$e \approx 2.718281828459045 \dots$$

Granica ciągu:

Liczba e może być zdefiniowana jako granica następującego ciągu:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Suma szeregu:

Liczbę e można również wyrazić jako sumę nieskończonego szeregu potęgowego:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Alternatywne definicje

Liczba e może być również określona jako wartość argumentu funkcji $f(x) = x^{1/x}$, dla którego jej wartość jest największa, czyli:

$$f(x) = x^{1/x}, \quad x > 0$$

Związki z trygonometrią

Liczba e pojawia się także w wyrażeniach trygonometrycznych:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Właściwości liczby e :

- **Niewymierność:** Liczba e jest liczbą niewymierną, co oznacza, że nie można jej zapisać jako iloraz dwóch liczb całkowitych.
- **Transcendencja:** e jest także liczbą transcendentną, co oznacza, że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych, podobnie jak liczba π .

Funkcja wykładnicza

Liczba e pojawia się w funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$, która ma wyjątkową cechę: jej pochodna jest równa samej funkcji:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Ta właściwość sprawia, że funkcja wykładnicza ma szerokie zastosowanie w modelowaniu zjawisk, które charakteryzują się stałą stopą wzrostu, takich jak wzrost populacji, procesy chemiczne, czy też zjawiska fizyczne.

Logarytm naturalny

Logarytm przy podstawie e nazywany jest **logarytmem naturalnym** i oznaczany jest jako $\ln x$. Z definicji:

$$\ln e = 1 \quad \text{oraz} \quad \ln 1 = 0$$

Logarytm naturalny odgrywa kluczową rolę w rozwiązywaniu równań wykładniczych oraz w obliczeniach związanych z funkcją wykładniczą.

Zastosowania liczby e w matematyce i fizyce:

- **Wzrost wykładniczy:** Liczba e pojawia się w modelach wzrostu wykładniczego, takich jak przyrost populacji, akumulacja odsetek w finansach oraz procesy rozpadu radioaktywnego:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

- **Całka Gaussa:** W analizie matematycznej, liczba e pojawia się w obliczaniu pól powierzchni pod krzywymi Gaussa, np.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- **Wzór Stirlinga:** Przybliżenie dla silni $n!$ dla dużych wartości n zawiera liczbę e :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Liczba e jest kluczowym elementem wielu równań i wzorów, dzięki czemu odgrywa fundamentalną rolę w matematyce i naukach przyrodniczych.

Liczba pi

Liczba π (ludolfina, stała Archimedesesa) to stała matematyczna, która jest stosunkiem obwodu okręgu do jego średnicy.

$$\frac{\textit{Obwód}}{\textit{Średnica}} = \pi$$

- Średnica to dwukrotność promienia okręgu $d = 2r$.
- Obwód okręgu: $C = 2\pi r$
- Pole okręgu: $A = \pi r^2$

Symbol π wprowadził walijski matematyk i pisarz William Jones w monografii Synopsis Palmariorum Matheseos w 1706. π jest pierwszą literą greckiego słowa περίμετρον – perimetron, czyli obwód.

Wartość liczby π wynosi około 3.14159265358979323846...

Wierszyk: "Żle w mgle i snach bolejącym do progów wiedzy iść" ma tyle liter ile cyfr po przecinku w π .

Jest to liczba niewymierna, co oznacza, że nie można jej zapisać jako ułamek. Jest to również liczba transcendentna, co oznacza, że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Rozwinięcie dziesiętne liczby π zaczyna się od 3.14159... i jest nieskończone, nieokresowe. Wszystkie możliwe kombinacje cyfr występują w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .



Wzory w których występuje π :

- Obwód okręgu: $C = 2\pi r$
- Pole okręgu: $A = \pi r^2$
- Objętość kuli $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
- Równanie Eulera: $e^{i\pi} + 1 = 0$
- $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (wzór Stirlinga)
- pole powierzchni pod krzywą Gaussa: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- W fizyce $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$, $\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$ (zasada nieoznaczoności Heisenberga)
- $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ równanie pola grawitacyjnego ogólnej teorii względności

Jednostka urojona i liczby zespolone

Równanie kwadratowe:: miejsca zerowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Delta: $\Delta = b^2 - 4ac$

Równanie kwadratowe może mieć dwa rozwiązania rzeczywiste, jedno rozwiązanie rzeczywiste lub dwa rozwiązania zespolone, w zależności od wartości delty (Δ):

- Jeśli $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.
Możemy je rozwiązać za pomocą wzoru kwadratowego:

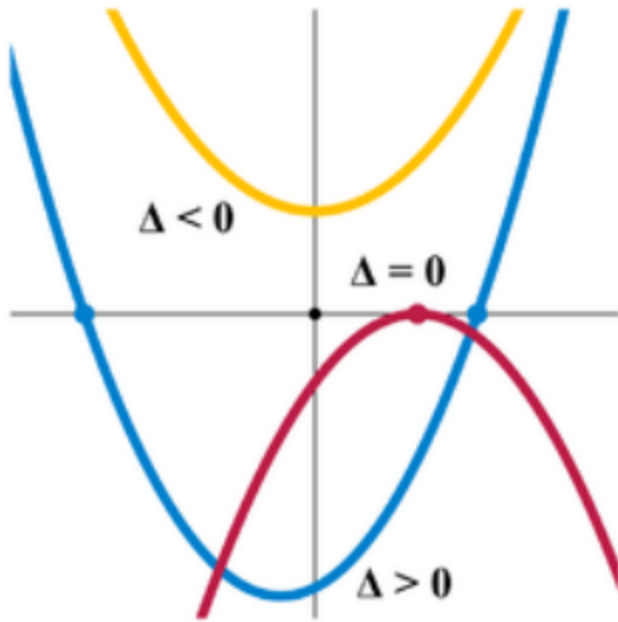
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Jeśli $\Delta = 0$, równanie ma jedno podwójne rozwiązanie rzeczywiste:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Trzy przypadki delty:

1. Jeśli $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.
2. Jeśli $\Delta = 0$, równanie ma jedno podwójne rozwiązanie rzeczywiste.
3. Jeśli $\Delta < 0$, brak rozwiązań rzeczywistych.



Rozważmy równanie kwadratowe:

$$x^2 + 1 = 0$$

Przekształćmy je, aby znaleźć rozwiązanie:

$$x^2 = -1$$

W tym momencie napotykamy problem, ponieważ żadna liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu nie może dać wyniku ujemnego. Aby to obejść, wprowadzamy **jednostkę urojoną** i , zdefiniowaną jako liczbę spełniającą:

$$i^2 = -1$$

Dzięki temu możemy zapisać rozwiązanie w postaci:

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Stąd otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$x_1 = i, \quad x_2 = -i$$

Jednostka urojona, oznaczana literą i , jest zdefiniowana jako liczba, której kwadrat wynosi -1 . Matematycznie wyrażamy to równaniem:

$$i^2 = -1$$

Liczba i nie istnieje w zbiorze liczb rzeczywistych, ponieważ nie ma liczby rzeczywistej, której kwadrat byłby ujemny. Aby poradzić sobie z równaniami, które wymagają pierwiastkowania liczb ujemnych, matematycy wprowadzili pojęcie jednostki urojonej i stworzyli **liczby zespolone**.

Liczby zespolone

Liczba zespolona to wyrażenie postaci:

$$z = a + bi$$

Diagram illustrating the components of a complex number $z = a + bi$:

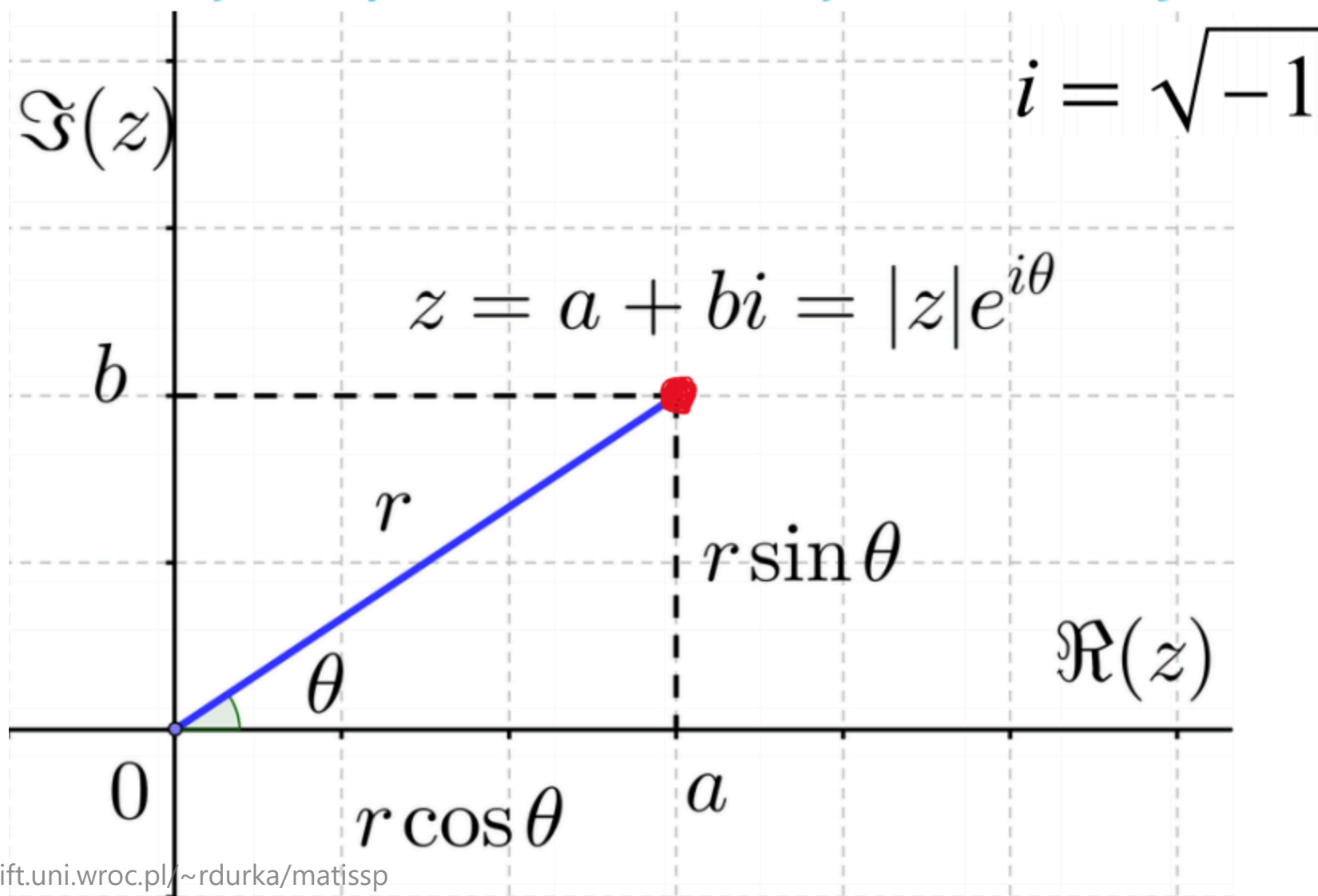
- a is labeled "część rzeczywista $\text{Re}(z)$ " (real part).
- bi is labeled "część urojona $\text{Im}(z)$ " (imaginary part).
- i is labeled "jednostka urojona" (imaginary unit) and is defined as $i = \sqrt{-1}$.

gdzie:

- a to część rzeczywista liczby zespolonej,
- b to część urojona liczby zespolonej,

Przykład liczby zespolonej to $z = 3 + 4i$, gdzie 3 to część rzeczywista, a 4 to część urojona.

Liczby zespolone = rzeczywiste+urojone



Moduł liczby zespolonej

Moduł liczby zespolonej $z = a + bi$ to odległość tej liczby od zera na płaszczyźnie zespolonej i wyraża się wzorem:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Moduł można interpretować geometrycznie jako długość wektora reprezentującego liczbę zespoloną w układzie współrzędnych.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną $z = a + bi$ można także zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

gdzie:

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ to moduł liczby zespolonej,
- θ to argument liczby zespolonej, czyli kąt, który wektor reprezentujący liczbę tworzy z osią rzeczywistą.

Wzór Eulera

Liczby zespolone i funkcje wykładnicze są ściśle powiązane poprzez **wzór Eulera**:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ten elegancki wzór jest jedną z najbardziej fundamentalnych zależności w matematyce, łączącą liczby rzeczywiste, liczby zespolone oraz funkcje trygonometryczne. W szczególnym przypadku, gdy $\theta = \pi$, wzór Eulera przybiera postać:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Znany jako **równanie Eulera**, jest to jedno z najpiękniejszych i najbardziej znanych równań w matematyce, łączące pięć fundamentalnych stałych: e , π , i , 1 i 0 .

Zastosowania liczb zespolonych

Liczby zespolone mają zastosowania w wielu dziedzinach, takich jak:

- **Elektrotechnika:** W analizie obwodów prądu zmiennego liczby zespolone są wykorzystywane do reprezentacji napięcia i prądu w postaci wektorów fazorów.
- **Fizyka kwantowa:** Liczby zespolone są kluczowe w opisie stanów kwantowych i fal materii.
- **Inżynieria:** Wykorzystywane w analizie sygnałów, przetwarzaniu obrazów i projektowaniu systemów kontrolnych.

Liczby zespolone rozszerzają świat liczb rzeczywistych i umożliwiają rozwiązanie wielu problemów, które nie mają rozwiązań w świecie rzeczywistym, co czyni je niezwykle użytecznym narzędziem w matematyce i naukach ścisłych.

Funkcja

Teoriomnogościowa definicja funkcji mówi, że funkcja f jest specjalnym przypadkiem relacji. Relacja to po prostu dowolny zbiór par uporządkowanych. Funkcja natomiast jest taką relacją $f \subseteq X \times Y$, która spełnia dodatkowe założenie: każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element $y \in Y$.

Formalnie, funkcja f to relacja, która spełnia następujący warunek:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall y_1, y_2 \in Y ((x_1, y_1) \in f \wedge (x_2, y_2) \in f : (x_1 = x_2) \Rightarrow (y_1 = y_2))$$

Oznacza to, że jeśli dla tego samego x_1 mamy dwie pary (x_1, y_1) i (x_1, y_2) , to y_1 musi być równe y_2 . Innymi słowy, żaden element z X nie może być powiązany z więcej niż jednym elementem z Y .

Ważne punkty:

1. **Relacja** w teorii mnogości to po prostu zbiór par uporządkowanych (x, y) , gdzie x pochodzi ze zbioru X , a y ze zbioru Y .
2. **Funkcja** to relacja, która dodatkowo spełnia warunek, że dla każdego x istnieje dokładnie jedna para (x, y) w tej relacji.

Zatem funkcja $f \subseteq X \times Y$ jest relacją, która spełnia dodatkowy warunek, że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno $y \in Y$ takie, że $(x, y) \in f$.

Przykłady

Przykład 1

$$f = \{(\text{pies}, \text{dog}), (\text{kot}, \text{cat}), (\text{koń}, \text{horse})\}$$

Przykład 2

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

Co oznacza, że $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ i $f(3) = 4$.

Przykład 3

$$f = \{(1, 1), (2, 1/2), (3, 1/3), \dots\} = \{(n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Funkcja ta przyporządkowuje każdemu n liczbę $1/n$.

Często skracamy zapis ciągów takich jak ten do postaci $f(n) = 1/n$.

Przykład 4

Funkcja kwadratowa często zapisywana jako $f(x) = x^2$ to funkcja, która każdemu x przyporządkowuje x^2 . W naszej notacji zapisujemy to jako

$$f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

Przykład 5

Wyznacznik macierzy to funkcja, która każdej macierzy przyporządkowuje liczbę. W naszej notacji zapisujemy to jako

$$f = \{(M, \det(M)) : M \text{ jest macierzą kwadratową}\}$$

Przykład 6

Sama macierz jest też funkcją, która każdej parze indeksów (i, j) gdzie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowuje element macierzy na pozycji (i, j) . W naszej notacji zapisujemy to jako

$$M = \{((i, j), M_{ij}) : i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

dla wygody zapisujemy to jako tablicę dwuwymiarową:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład 7

Dodawanie macierzy to funkcja, która każdej parze macierzy przyporządkowuje macierz. W naszej notacji zapisujemy to jako

$$f = \{((A, B), A + B) : A, B \text{ są macierzami o takich samych wymiarach}\}$$

gdzie $A + B$ to macierz, której elementy są sumą elementów macierzy A i B , czyli dla każdego i, j mamy

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Przykład 8

Cena akcji na giełdzie to funkcja, która każdemu dniu przyporządkowuje cenę akcji. W naszej notacji zapisujemy to jako

$$f = \{(d, c) : d \text{ jest dniem, } c \text{ jest ceną akcji w dniu } d\}$$

Przykład 9

Funkcja $f(x) = x^2$ to funkcja kwadratowa, która każdemu x przyporządkowuje x^2 . W naszej notacji zapisujemy to jako

$$f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$