

Rachunek różniczkowy (pochodne)

Wprowadzenie

Rachunek różniczkowy to dział matematyki zajmujący się badaniem zmian wartości funkcji w zależności od zmian jej argumentu.

Podstawowym narzędziem rachunku różniczkowego jest **pochodna funkcji**.

Historia rachunku różniczkowego sięga XVII wieku, kiedy to Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz niezależnie od siebie opracowali podstawy tej dziedziny matematyki.

Kluczowymi pojęciami w rachunku różniczkowym są:

- **Pochodna funkcji:** miara szybkości zmiany wartości funkcji względem zmiany jej argumentu.
- **Różniczka funkcji:** przyrost wartości funkcji odpowiadający nieskończenie małemu przyrostowi jej argumentu.
- **Styczna do wykresu funkcji:** prosta, która dotyka wykresu funkcji w jednym punkcie i ma współczynnik kierunkowy równy wartości pochodnej w tym punkcie.
- **Reguły różniczkowania:** zestaw wzorów i zasad umożliwiających obliczanie pochodnych funkcji złożonych, iloczynów i ilorazów funkcji oraz funkcji elementarnych.

Zastosowania rachunku różniczkowego

Rachunek różniczkowy znajduje szerokie zastosowanie w fizyce, inżynierii, ekonomii, biologii i innych dziedzinach nauki, gdzie analizuje się zmiany i dynamikę zjawisk.

- **Optymalizacja:** pochodne są używane do znajdowania ekstremów funkcji, czyli punktów maksymalnych i minimalnych.
- **Szereg Taylora i Maclaurina:** narzędzia do aproksymacji funkcji za pomocą wielomianów w pobliżu określonych punktów.
- **Szybkość:** pochodna funkcji w danym punkcie informuje nas, jak szybko zmienia się wartość funkcji w tym punkcie.
- **Kierunek zmiany:** znak pochodnej (dodatni lub ujemny) wskazuje, czy funkcja rośnie czy maleje w danym punkcie.

Pochodne funkcji jednej zmiennej

Iloraz różnicowy

Iloraz różnicowy funkcji to przyrost wartości funkcji do przyrostu argumentu, czyli:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definicja

Pochodna funkcji w punkcie x_0 to granica ilorazu różnicowego, jeśli ta granica istnieje:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}$$
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny, to mówimy, że funkcja jest różniczkowalna.

Interpretacja geometryczna

Pochodna funkcji w punkcie to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie.

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

gdzie α to kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_0 .

Link: <https://www.geogebra.org/m/fdSYJtym>

Interpretacja fizyczna

Pochodna mówi nam jak szybko zmienia się wartość funkcji w danym punkcie. Pochodna funkcji opisującej położenie ciała w czasie to prędkość tego ciała w danym momencie czasu:

$$v(t) = x'(t)$$

gdzie $v(t)$ to prędkość, a $x(t)$ to położenie ciała w czasie t .

Fizyka vs Matematyka

W **fizyce** często używa się notacji Leibniza dla pochodnej, czyli $\frac{dy}{dx}$, co podkreśla związek między zmianą wartości funkcji (dy) a zmianą jej argumentu (dx).

W **matematyce** natomiast częściej używa się notacji, czyli $f'(x)$.

Definicja	Fizyka	Matematyka
Argument funkcji	t (czas)	x (zmienna niezależna)
Wartość funkcji	x(t) (położenie)	f(x) (wartość funkcji)
Pochodna	$\frac{dx(t)}{dt}$ (prędkość)	$\frac{df(x)}{dx}$ (pochodna funkcji)
Skrócony zapis	$\dot{x}(t)$	$f'(x)$
Drugie pochodne	$\ddot{x}(t)$ (przyspieszenie)	$f''(x)$ (druga pochodna funkcji)
Składniki różniczkowe	dt, dx	dx, df

Reguły różniczkowania

Podstawowe wzory gdy mamy funkcję $f(x)$ i $g(x)$ oraz stałą c :

- Pochodna sumy funkcji jest równa sumie pochodnych funkcji

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Pochodna różnicy funkcji jest równa różnicy pochodnych funkcji

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

- Pochodna iloczynu funkcji i stałej jest równa iloczynowi pochodnej funkcji i stałej

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

- Pochodna iloczynu funkcji jest równa pochodnej pierwszej funkcji pomnożonej przez drugą funkcję plus pierwsza funkcja pomnożona przez pochodną drugiej funkcji

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Pochodna ilorazu funkcji jest równa różnicy iloczynu pochodnej pierwszej funkcji i drugiej funkcji od pierwszej funkcji i iloczynu pochodnej drugiej funkcji i pierwszej funkcji podzielonej przez kwadrat drugiej funkcji

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Wzory na pochodne funkcji elementarnych

$$(c)' = 0$$

$$(0)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Ostatni przypadek też da się rozwiązać korzystając z wzoru na pochodną ilorazu funkcji, gdzie górna funkcja to 1, a dolna to x :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x} \cdot 1\right)' = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot x}{x^2} = \frac{1-x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Pochodna funkcji wykładniczej

$(e^x)' = e^x$ (e do potęgi x jest jedyną funkcją, której pochodna jest równa jej samej). Dlaczego?

Przyjrzyjmy się definicji funkcji wykładniczej $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Korzystając z definicji pochodnej mamy:

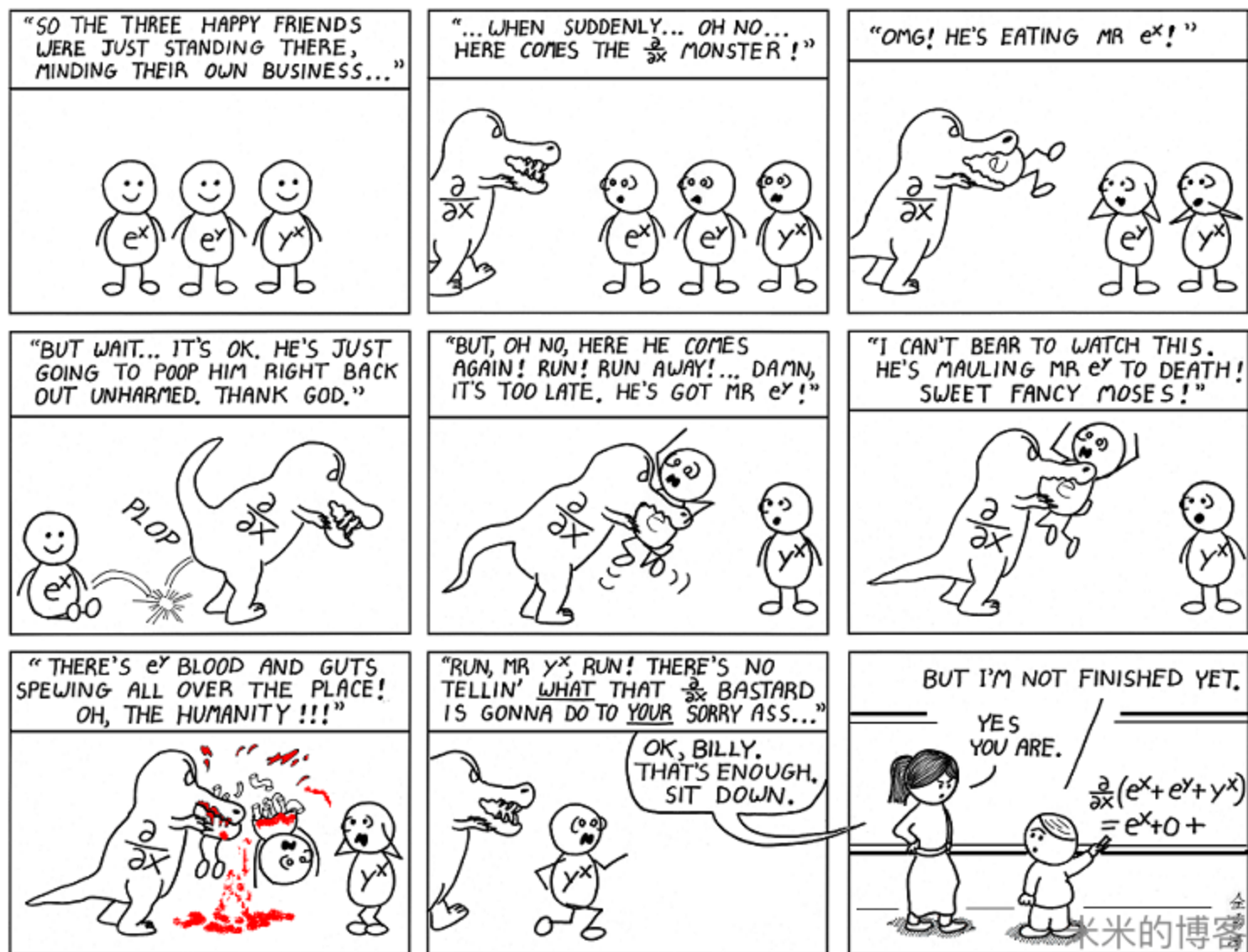
$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

Możemy też skorzystać z rozwinięcia w szereg Taylora:

$$(e^x)' = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)' = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = e^x$$

Przy okazji zauważmy, że:

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ (z inną podstawą niż e to już tak nie działa!) Skąd wiemy, że taki wynik jest poprawny? Przypomnijmy sobie, że $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$. Korzystając z reguły różniczkowania funkcji złożonej otrzymujemy: $(a^x)' = (e^{x \cdot \ln(a)})' = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot (\ln(a))' = a^x \cdot \ln(a)$.



Pochodne funkcji trygonometrycznych:

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Dlaczego? Przypomnijmy sobie, wzory na funkcje trygonometryczne:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Jeśli weźmiemy pochodną funkcji $\sin(x)$ to otrzymamy:

$$(\sin(x))' = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \cos(x)$$

Analogicznie dla funkcji $\cos(x)$:

$$(\cos(x))' = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots)' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} + \dots = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = -\sin(x)$$

Pochodna z funkcji złożonej

Jeśli mamy funkcję złożoną $f(g(x))$ to jej pochodna to:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Jeśli mamy funkcję $f(x) = \sin(x^2)$ to jej pochodna to:

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Często studenci mają problem z zapisem. Wiele razy widać np. $(\sin(x^2))' = (\sin(x^2))' \cdot x^2$ co jest błędne, bo nagle robi się $A = A \cdot B$.

Pamiętajmy, że pochodna funkcji złożonej to iloczyn pochodnej funkcji zewnętrznej i pochodnej funkcji wewnętrznej. Schematycznie możemy zapisać:

$$(\sin(x^3 + 3))' = \sin'(x^3 + 3) \cdot (x^3 + 3)' = \cos(x^2) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos(x^2)$$

$$\ln(x^2 + 1) = \ln'(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Najczęściej jednak by uniknąć problemów z zapisem od razu w locie zapisujemy wynik działania na funkcję zewnętrzną, a potem od razu mnożymy przez pochodną funkcji wewnętrznej, np.

$$(\sqrt{2+3x})' = \frac{1}{2\sqrt{2+3x}} \cdot (2+3x)' = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}}$$

Przypomnijmy:

Jeśli mamy funkcję złożoną $f(g(x))$ to jej pochodna to:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pochodna funkcji odwrotnej

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'}$$

Zwróć uwagę po prawej stronie uwagę na

- użycie funkcji odwrotnej f^{-1}
- różniczkowanie po y (a nie po x) - w przyszłości będziemy unikać takich zapisów, gdzie prim nie jest zdefiniowany wprost po x .

Przykłady funkcji odwrotnych:

- $e^x \leftrightarrow \ln x$
- $\sqrt{x} \leftrightarrow x^2$
- $\sin x \leftrightarrow \arcsin x$

Przykład 1: $f(x) = \sqrt{x}$

Zanim zaczniemy napiszmy $y = \sqrt{x}$, a więc $x = y^2$.

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Zatem:

$$y = \sqrt{x}, \quad x = y^2$$

Wynik ma być w zakresie od $x > 0$.

Przykład 2: $f(x) = \arcsin x$

Zanim zaczniemy napiszmy $y = \arcsin x$, a więc $x = \sin y$.

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ponieważ:

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

Przykład 3: $f(x) = \ln x$

Zanim zaczniemy napiszmy $y = \ln x$, a więc $x = e^y$.

$$y = \ln x \implies x = e^y$$

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Przykład 4: $f(x) = \arctan x$

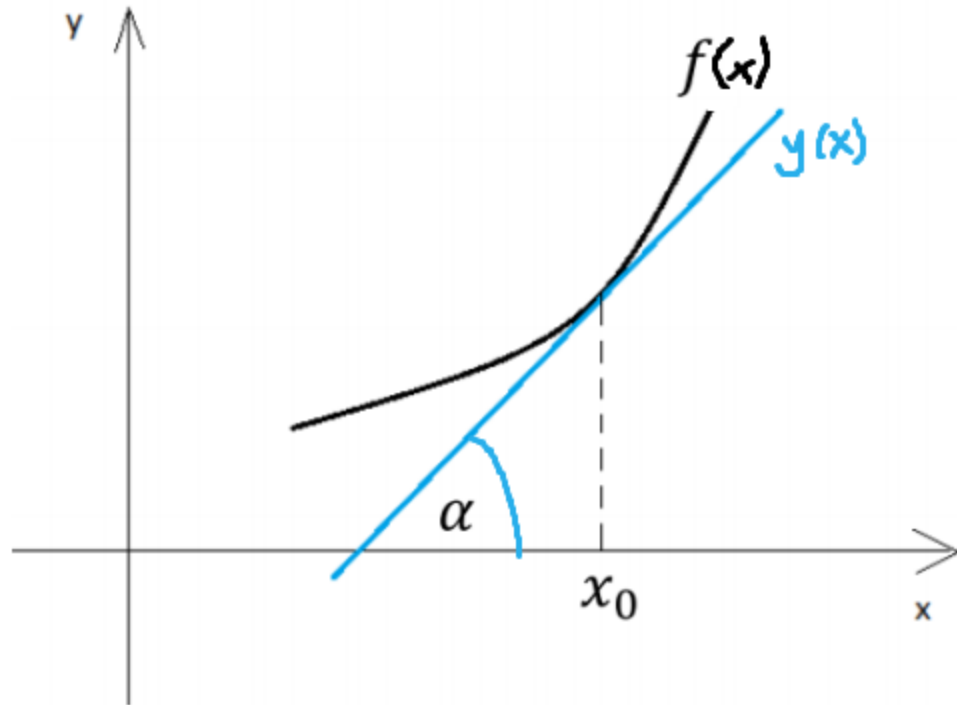
Zanim zaczniemy napiszmy $y = \arctan x$, a więc $x = \tan y$.

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ponieważ:

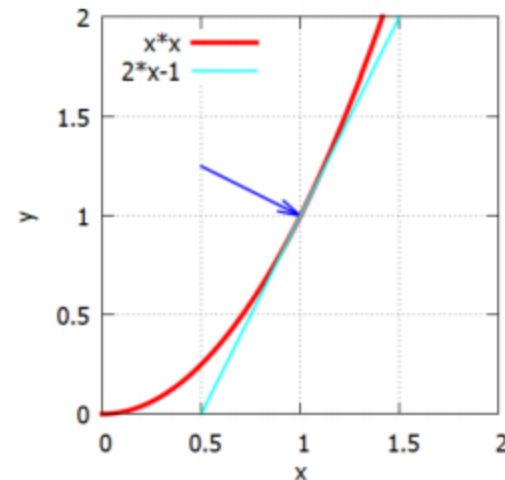
$$\sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$$

Styczna do wykresu funkcji



Rozpatrzmy więc $y(x) = x^2$

Oraz jej **liniowe przybliżenie** $f(x) = 2x - 1$ w okolicach punktu $(x_0, f(x_0))$:



Równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 to:

$$y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Styczna do wykresu funkcji

Równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 to:

$$y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

ponieważ wychodząc z ilorazu różnicowego i lokalnej liniowości: $\frac{y(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Styczna przechodzi przez punkt $(x_0, f(x_0))$ i ma współczynnik kierunkowy równy $m = f'(x_0)$.

$y(x) = mx + b$, więc b w zestawieniu z $(x_0, f(x_0))$ daje: $y(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b = f(x_0)$,
skąd $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Link: <https://www.geogebra.org/m/fw89nuwp>

Link: <https://www.geogebra.org/m/UXXcL1CX>

Ekstremum lokalne funkcji

Funkcja $f(x)$ ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 jeśli:

- pochodna funkcji w tym punkcie jest równa zero: $f'(x_0) = 0$
- oraz pochodna zmienia znak w otoczeniu tego punktu.

Maksimum lokalne

Jeśli $f'(x)$ zmienia znak z dodatniego na ujemny w otoczeniu x_0 , to $f(x)$ ma maksimum lokalne w punkcie x_0 .

Minimum lokalne

Jeśli $f'(x)$ zmienia znak z ujemnego na dodatni w otoczeniu x_0 , to $f(x)$ ma minimum lokalne w punkcie x_0 .

Przykład: Znajdowanie ekstremów lokalnych funkcji

Znajdź ekstremy lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Obliczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Znajdujemy punkty krytyczne, rozwiązując równanie $f'(x_0) = 0$:

$$3x_0^2 - 6x_0 = 0$$

$$3x_0(x_0 - 2) = 0$$

$$x_0 = 0 \quad \text{lub} \quad x_0 = 2.$$

Punkty krytyczne

$$x_0 = 0 \quad \text{lub} \quad x_0 = 2$$

są podejrzewane o ekstremum lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

Pochodna funkcji to:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Sprawdzamy znak pochodnej w otoczeniu punktów krytycznych:

- Dla $x_0 = 0$:
 - Dla $x < 0$, np. $x = -1$: $f'(-1) = 9 > 0$ (pochodna dodatnia)
 - Dla $0 < x < 2$, np. $x = 1$: $f'(1) = -3 < 0$ (pochodna ujemna)
 - Zmiana znaku z dodatniego na ujemny, więc mamy maksimum lokalne w $x_0 = 0$.

- Dla $x_0 = 2$:
- Dla $0 < x < 2$, np. $x = 1$: $f'(1) = -3 < 0$ (pochodna ujemna)
 - Dla $x > 2$, np. $x = 3$: $f'(3) = 9 > 0$ (pochodna dodatnia)
 - Zmiana znaku z ujemnego na dodatni, więc mamy minimum lokalne w $x_0 = 2$.

Problem optymalizacyjny

Znajdź wymiary prostokąta o największej powierzchni, jeśli jego obwód wynosi 20 jednostek.

- Oznaczmy długość prostokąta jako x i szerokość jako y . Obwód prostokąta wynosi:

$$2x + 2y = 20 \implies x + y = 10 \implies y = 10 - x$$

Powierzchnia prostokąta to:

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$$

Aby znaleźć maksymalną powierzchnię, obliczamy pochodną funkcji powierzchni:

$$A'(x) = 10 - 2x$$

Znajdujemy punkty krytyczne, rozwiązując równanie $A'(x) = 0$:

$$10 - 2x = 0 \implies 2x = 10 \implies x = 5$$

Reguła d'Hospitala (czytaj: di lospitala)

Jeśli mamy granicę postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ to możemy skorzystać z reguły d'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod warunkiem, że prawa strona istnieje.

Przykład 1:

Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Zauważamy, że bezpośrednie podstawienie daje postać $\frac{0}{0}$. Stosujemy regułę d'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1$$

Przykład 2:

Oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Zauważamy, że bezpośrednie podstawienie daje postać $\frac{\infty}{\infty}$. Stosujemy regułę d'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Stosujemy regułę d'Hospitala ponownie:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

Fizyka (położenie, prędkość, przyspieszenie)

W fizyce, jeśli mamy funkcję opisującą położenie ciała w czasie $x(t)$, to:

- Pochodna pierwsza położenia względem czasu to prędkość ciała:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- Pochodna druga położenia względem czasu to przyspieszenie ciała:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

- Pochodna trzecia położenia względem czasu to dżerk (jerk):

$$j(t) = \dot{a}(t) = \ddot{\dot{x}}(t) = \frac{d^3x(t)}{dt^3}$$

- Wyższe pochodne to kolejno: jolt (snap) $x^{(4)}(t)$, crackle $x^{(5)}(t)$ i pop $x^{(6)}(t)$.

Uwagi historyczne

Nazwa "**rachunek różniczkowy**" pochodzi od pojęcia "różnicy", które odnosi się do zmiany wartości funkcji w odpowiedzi na zmianę jej argumentu.

Nazwa **pochodna** pochodzi od faktu, że pochodna "pochodzi" od funkcji pierwotnej, czyli funkcji, której pochodną jest dana funkcja.

Różniczka dx oznacza nieskończenie małą zmianę argumentu x , a dy oznacza nieskończenie małą zmianę wartości funkcji $y = f(x)$ w odpowiedzi na tę zmianę argumentu. W tym kontekście dx jest to nieskończenie mały przyrost zmiennej niezależnej x , a dy jest to nieskończenie mały przyrost zmiennej zależnej y .

Literatura

- **Strona kursu:** [Materiały i informacje dostępne na stronie kursu.](#)
- **Dokumentacja oprogramowania Octave:** [Podręcznik GNU Octave na Wikibooks.](#)
- **"Fast Introduction for Programmers"** [Szybkie wprowadzenie do języka Wolfram dla programistów.](#)
- **Włodzimierz Krywicki, Lech Włodarski, "Analiza matematyczna w zadaniach. Część 1"**
Popularny podręcznik zawierający zadania z analizy matematycznej, przeznaczony dla studentów matematyki i nauk przyrodniczych.
- **Kazimierz Kuratowski, "Rachunek różniczkowy i całkowy"**
Klasyczny wykład rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, zawierający ciągi i szeregi liczbowe, funkcje, granice, ciągłość funkcji oraz całki nieoznaczone i oznaczone.