Uniwersytet Wrocławski

Równania różniczkowe zwyczajne

ODE: ordinary differential equations

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2016

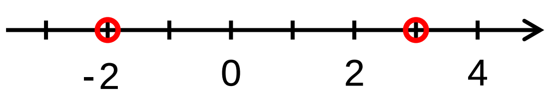
RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE JEDNEJ ZMIENNEJ

Motywacja

- Rozwiązania równań z 1, 2 lub 3 niewiadomymi zwykle reprezentują punkty (1D), krzywe (2D) i powierzchnie (3D)

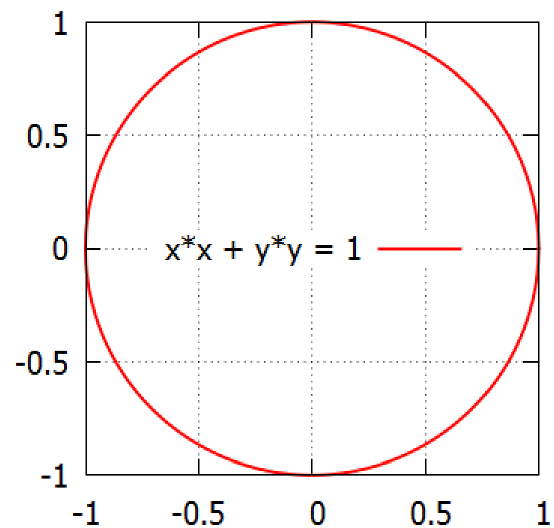
1D

$$x^2 - x - 6 = 0$$



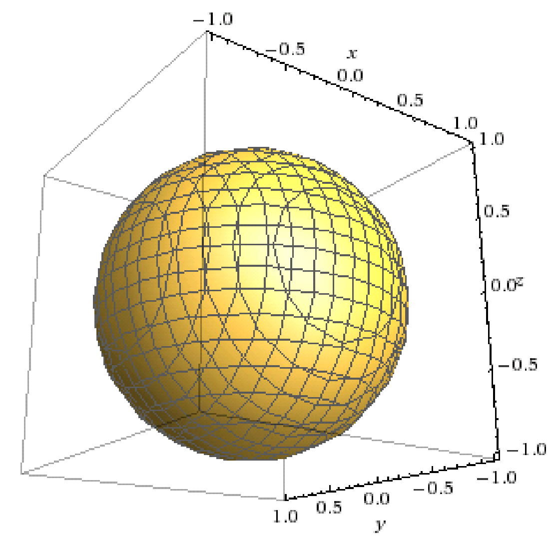
2D

$$x^2 + y^2 = 1$$



3D

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Motywacja

W zagadnieniach technicznych często występują równania, w których oprócz zmiennych występują ich *pochodne* (gradienty) lub *całki*

- Krzywa łańcuchowa:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

- Rzut pionowy:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Problem

- Równania zawierające pochodne lub całki wymagają stosowania *zupełnie innych metod rozwiązywania* niż równania algebraiczne
- Jednym z głównych problemów jest ***nielokalność***: w przypadku równań różniczkowych rozwiązania w różnych punktach są ze sobą powiązane, tymczasem aby rozwiązać równanie algebraiczne, np. $x^2 + y^2 = 1$ w punkcie $x = 0.5$ nie trzeba znać innych rozwiązań, np. w $x = 0$,

Definicja

- **Równanie różniczkowe zwyczajne** (jednej zmiennej) **rzędu $\boldsymbol{n}$** to równanie wiążące ze sobą **zmienną niezależną** ($\boldsymbol{t}$) ze zmienną zależną (x) i jej pochodnymi $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}$,

$$\boldsymbol{F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0}$$

Równania autonomiczne

- Równania, które nie zależą jawnie od zmiennej niezależnej

$$F\left(\cancel{t}, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

- Są nieco łatwiejsze do rozwiązywania
- Są powszechne w fizyce, bo „fundamentalne prawa natury nie zależą od czasu”
- Przykład: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$ (druga zasada dynamiki Newtona)

Przykłady

Przykłady:

- Krzywa łańcuchowa – równanie rzędu **2**:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a\frac{d^{\mathbf{2}}y}{dx^{\mathbf{2}}}$$

- Rzut pionowy – równanie rzędu **2**:

$$\frac{d^{\mathbf{2}}z}{dt^{\mathbf{2}}} = -g$$

RÓWNANIA RZĘDU PIERWSZEGO

Równania rzędu pierwszego

- Postać ogólna

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

- Przykłady:

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin(xt)$$

Równania łatwo całkowalne

- Równanie postaci
$$\frac{dx}{dt} = f(\mathrm{t})$$
już znamy. Jego rozwiązaniem jest całka:
$$x(t) = \int f(t)dt$$
- Ogólnie, rozwiązywanie równań różniczkowych nazywamy ***całkowaniem***, a ich rozwiązania – ***całkami równania***

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

- Są to równania, które można zapisać w postaci

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{g(x)}$$

gdzie f i g są pewnymi funkcjami.

- Powyższe wyrażenie można zapisać tak:

$$\underbrace{g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}}_{\text{z tej strony tylko } \mathbf{x}} = \underbrace{f(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}}_{\text{z tej strony tylko } \mathbf{t}}$$

jest to ***równanie o zmiennych rozdzielonych***

Równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie o zmiennych rozdzielonych

$$g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$$

Rozwiązujemy przez obustronne scałkowanie:

$$\int g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int f(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$$

czyli

$$G(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})) = F(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{C}$$

co jest (uwikłanym) równaniem algebraicznym (tj. nieróżniczkowym) na $x(t)$

Przykład

zmienna zależna

równanie

warunek początkowy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad y(0) = 1$$

zmienna niezależna

$$y\,dy = -x\,dx$$ separacja zmiennych

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$ obustronne całkowanie

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$ obliczenie całek

$$\text{ale } \frac{1^2}{2} = -\frac{0^2}{2} + \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{C} = \frac{1}{2}$$ wyznaczenie stałej

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

rozwiązanie

Warunki początkowe

- Rozwiązanie r-a różniczkowego zwyczajnego, tak jak całka nieoznaczona, zwykle nie jest jednoznaczne – rozwiązaniem jest rodzina funkcji
- Ostateczne rozwiązanie otrzymuje się, uzgadniając ogólną postać rozwiązania z tzw. warunkiem początkowym/brzegowym (ang. *initial/boundary condition*), zwykle w postaci $x(t_0) = x_0$

Warunki początkowe – przykład

równanie różniczkowe

warunek początkowy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad \boldsymbol{y}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{1}$$

$$\frac{\boldsymbol{y}^2}{2} = -\frac{\boldsymbol{x}^2}{2} + C$$

rozwiązanie ogólne

$$\frac{\boldsymbol{1}^2}{2} = -\frac{\boldsymbol{0}^2}{2} + C$$

podstawienie warunku brzeg.
do rozwiązania ogólnego

$$C = \frac{1}{2}$$

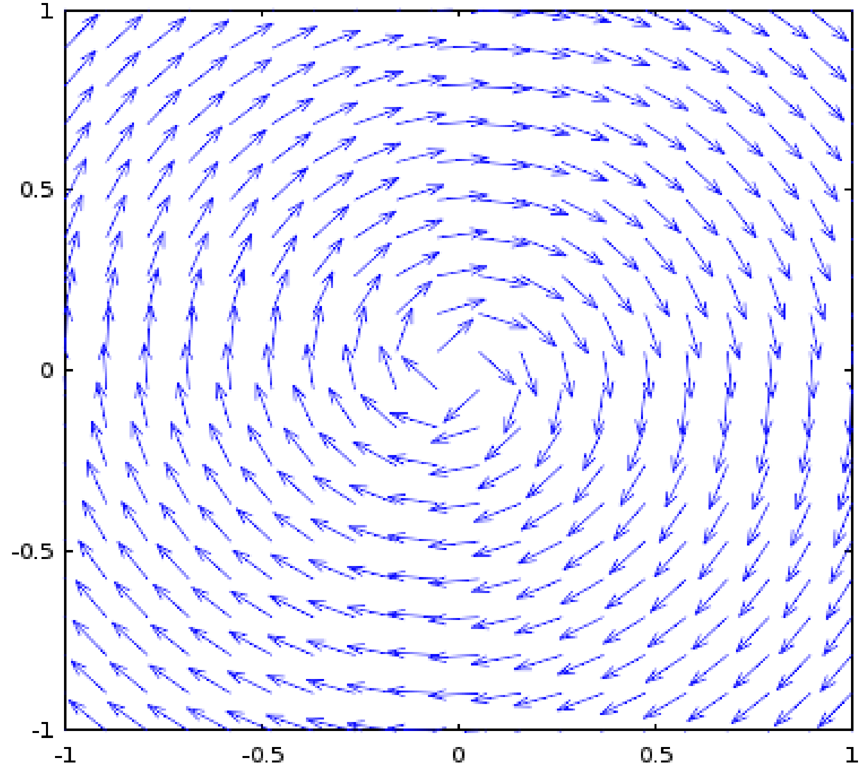
wyznaczenie stałej

POLE KIERUNKÓW

Pole kierunków

- Równanie różniczkowe definiuje pole wektorowe: ***pole kierunków*** (ang. *slope field*)

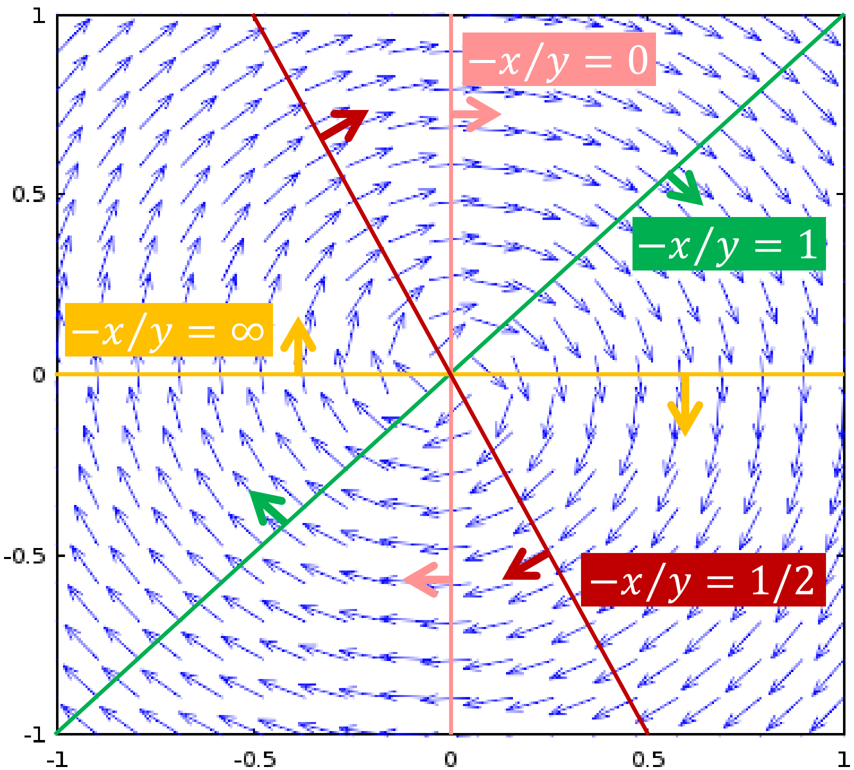
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



Pole kierunków

- Równanie różniczkowe definiuje pole wektorowe: ***pole kierunków*** (ang. *slope field*)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

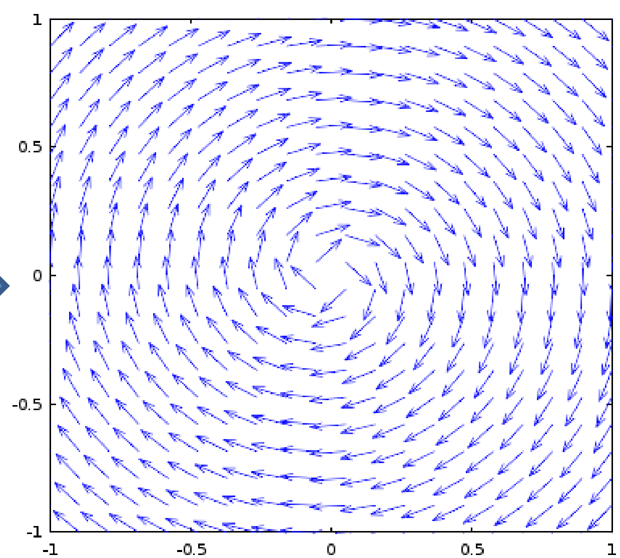


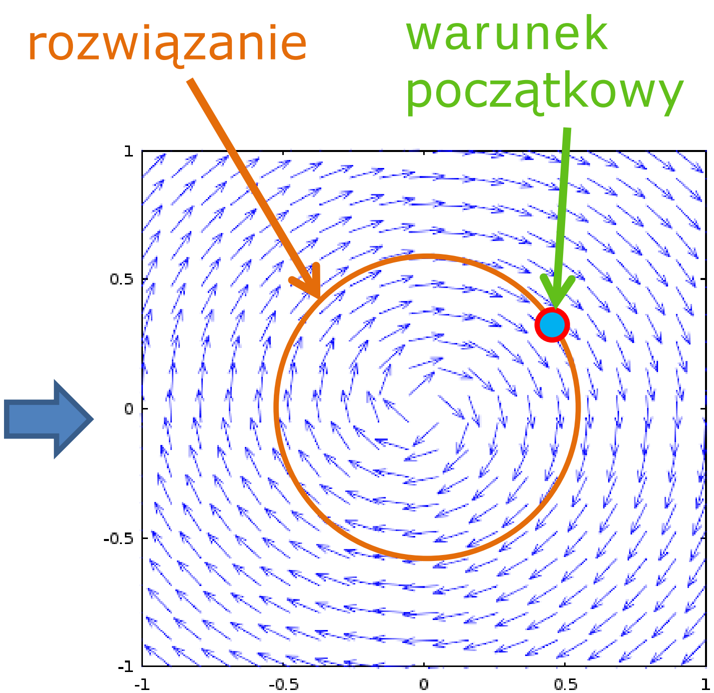
na linii o danym kolorze $\frac{dy}{dx}$ ma stałą wartość;
zwrot strzałek – dowolny

Pole kierunków

- Równanie różniczkowe definiuje ***pole kierunków***. Rozwiązaniem jest trajektoria punktu w tym polu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$





Pole kierunków w Octave: `quiver`

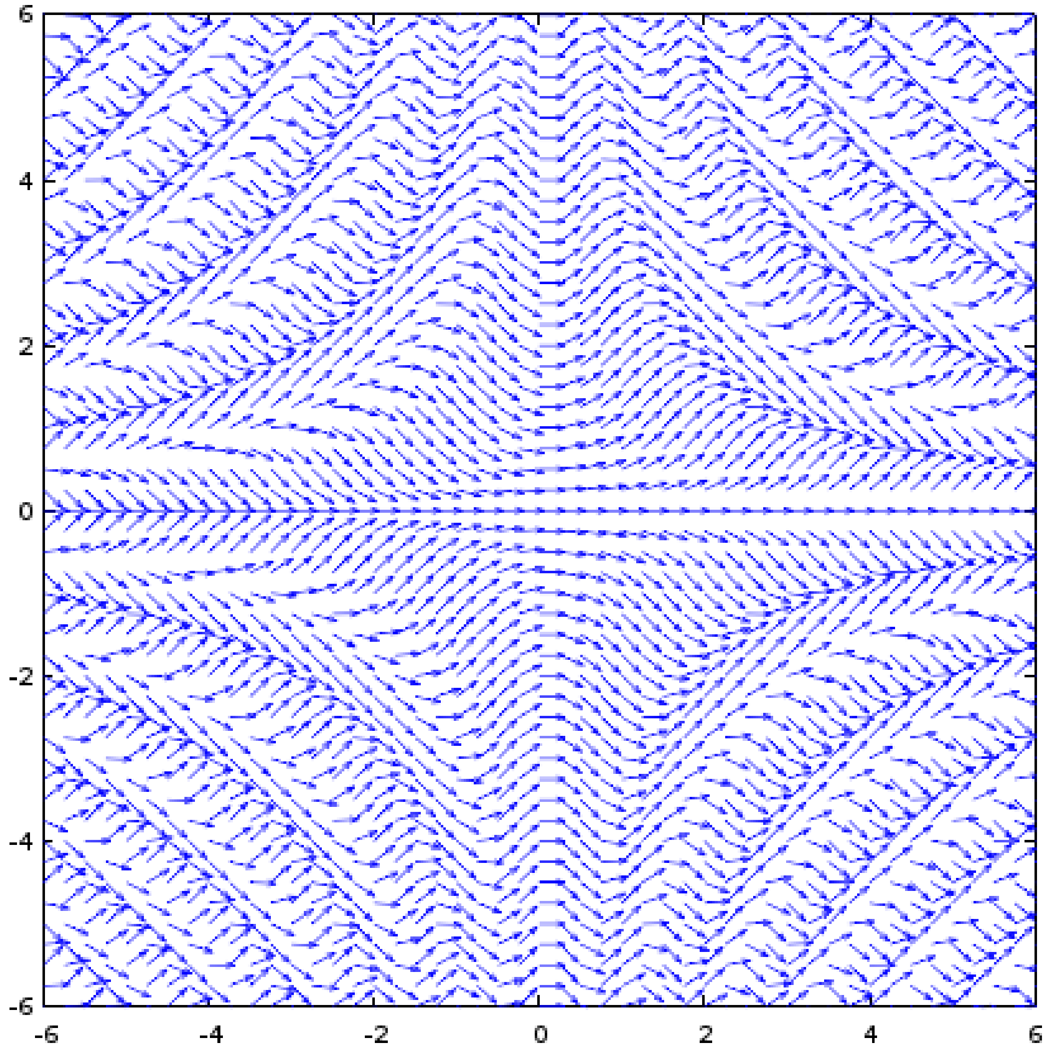
$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt)$$

```
f = @(y, t) sin(y .* t);                        # prawa strona r-a
[t, y] = meshgrid(-6:0.25:6);                   # siatka 2D od -6 do 6
slopes = f(y, t);                               # macierz nachyleń
dy = slopes./sqrt(1 + slopes.^2);               # normowanie...
dt = sqrt(1 - dy.^2);                           # do jedynki
quiver(t, y, dt, dy);                           # wyświetlenie pola kierunków
```

Pole kierunków w Octave

- Przykład:

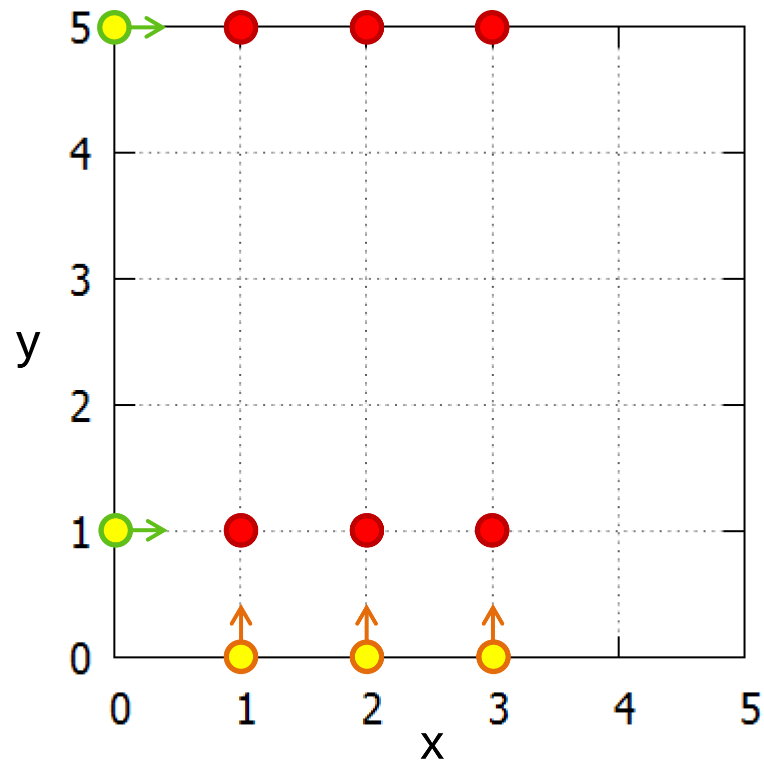
$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt)$$



Dygresja: **`meshgrid`**

- Polecenie **`meshrid`** tworzy prostokątną siatkę punktów do rysunków 2D i 3D

xx = [1, 2, 3]
yy = [5, 1]
[X,Y] = meshgrid(xx, yy)
X =
  1   2   3
  1   2   3
Y =
  5   5   5
  1   1   1



Octave: polecenie `lsode`

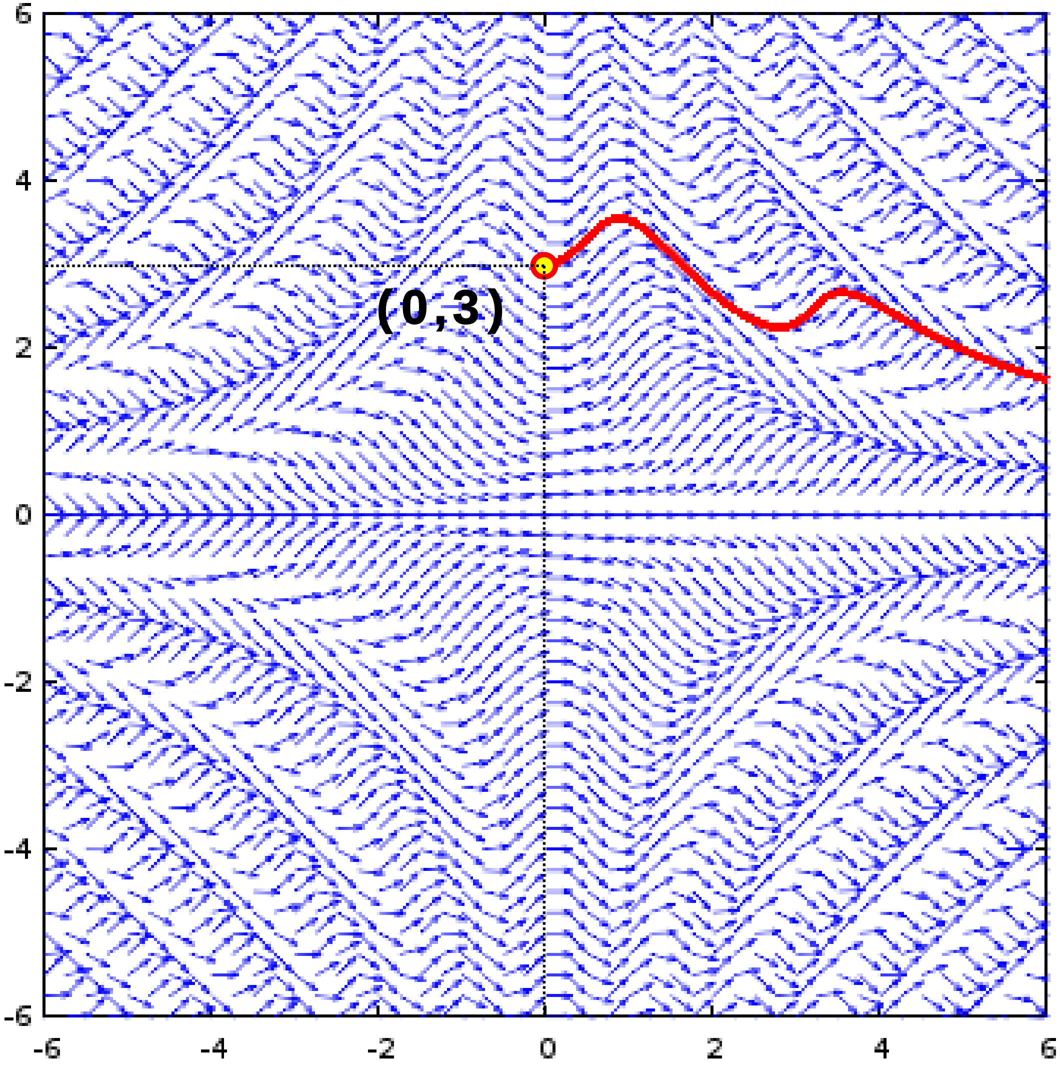
- Rozwiązuje równania różniczkowe zwyczajne

```
f = @(y, t) sin(y.*t);        # definicja funkcji
t = 0:0.01:5;                 # tu szukamy rozwiązań
y0 = 3;                       # rozwiązanie w t(1)
y = lsode (f, y0, t);         # pełne rozwiązanie
plot(t, y);                   # użycie rozwiązania
```

Rozwiązanie a pole kierunków

$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt)$$

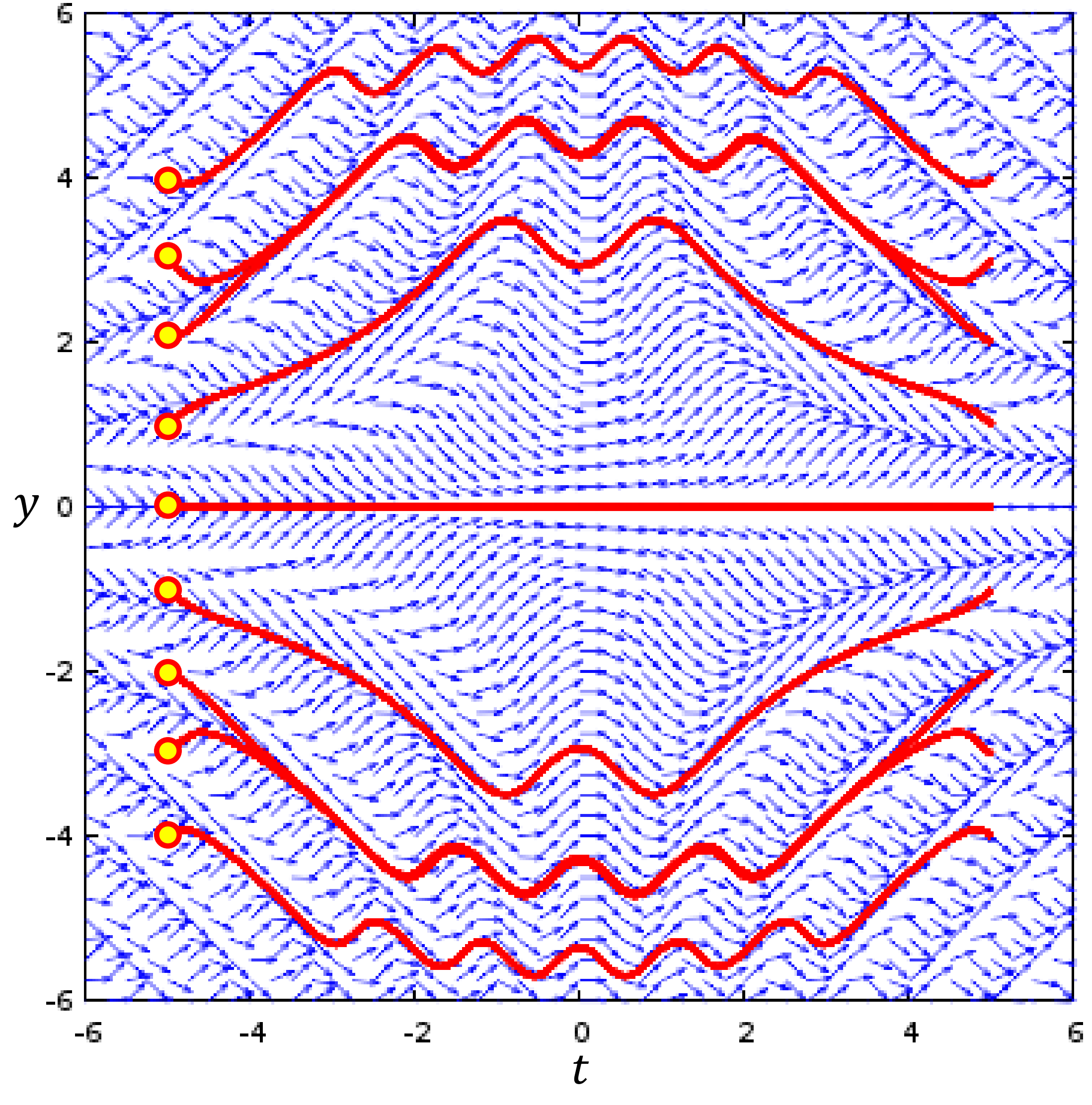
- Rozwiązanie dla warunku początkowego $y(0) = 3$
- Rozwiązanie „płynie" w polu kierunków



Rozwiązania „płyną” w polu kierunków

$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt)$$

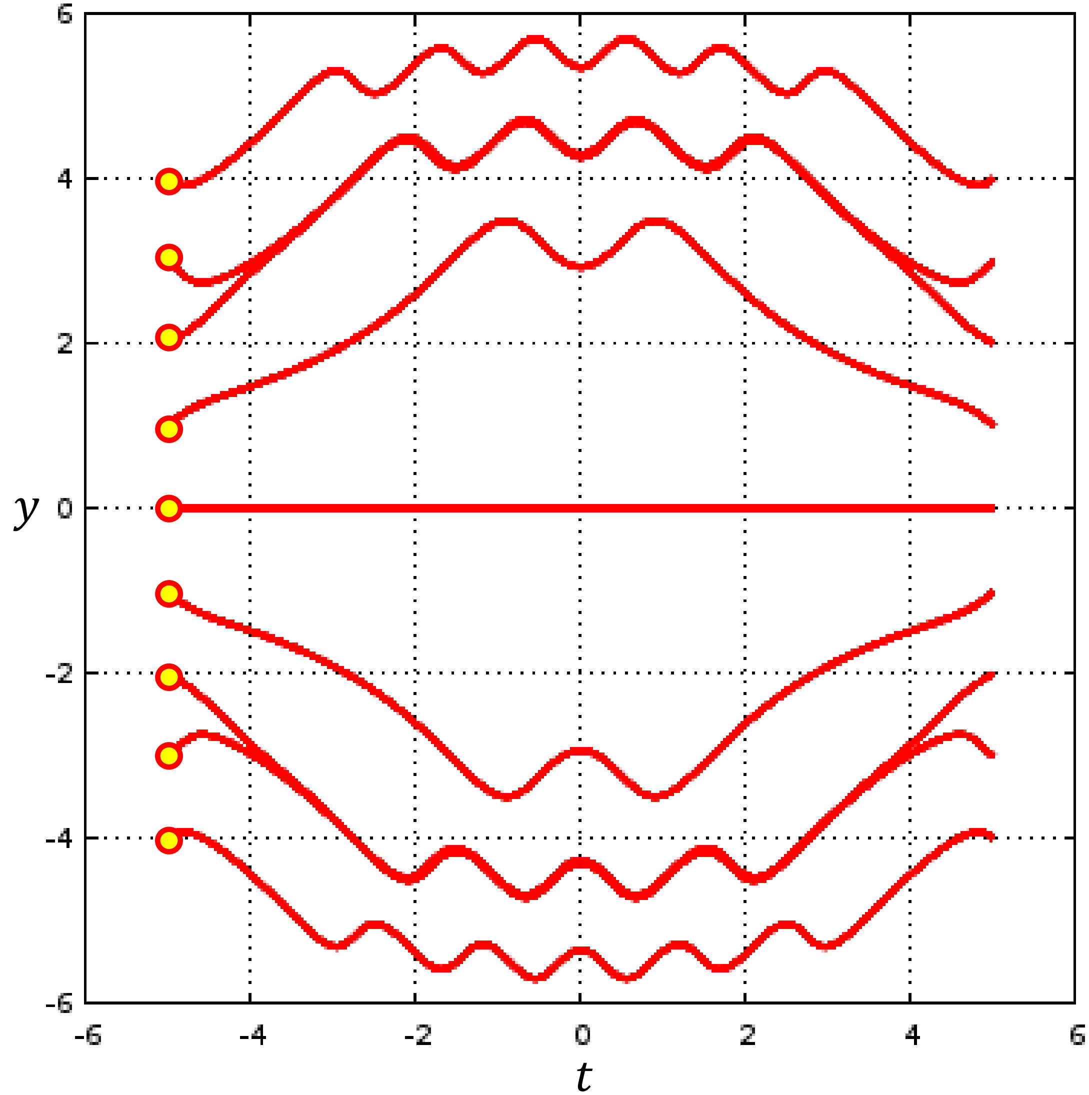
- Rozwiązania dla warunków początkowych $y(-5) = [-4:1:4]$ oraz $-5 \leq t \leq 5$



Rozwiązania dla kilku warunków początkowych

$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt)$$

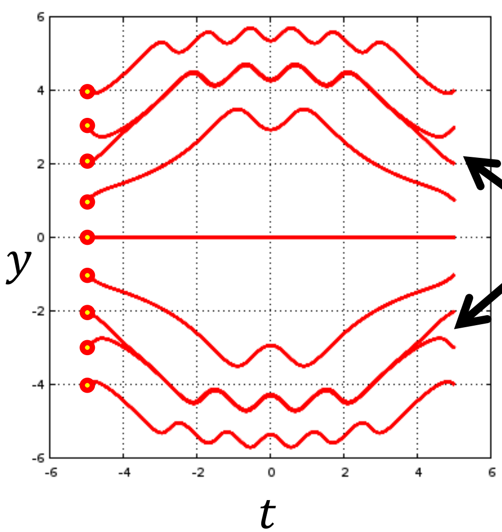
- Rozwiązania dla warunków początkowych $y(-5) = [-4{:}\,1{:}\,4]$ oraz $-5 \le t \le 5$



Warunek początkowy determinuje krzywą

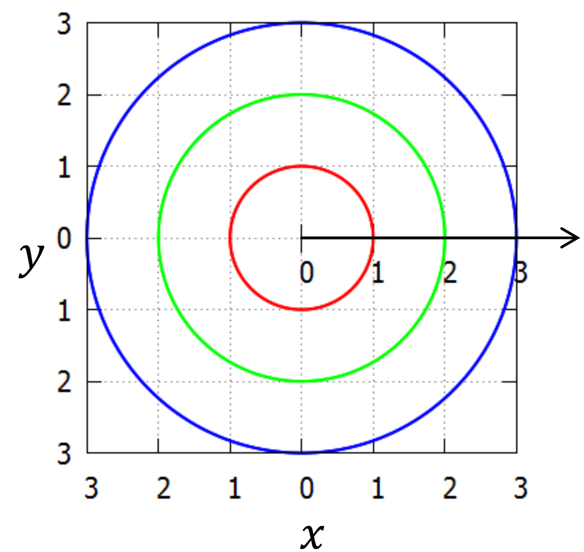
- Rozwiązanie ogólne generuje krzywe, które *na ogół się nie przecinają* (nie zawsze tak jest). Wybór krzywej zależy od warunku początkowego.

$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt)$$



te krzywe się nie przecinają (choć *bardzo* się do siebie zbliżają)

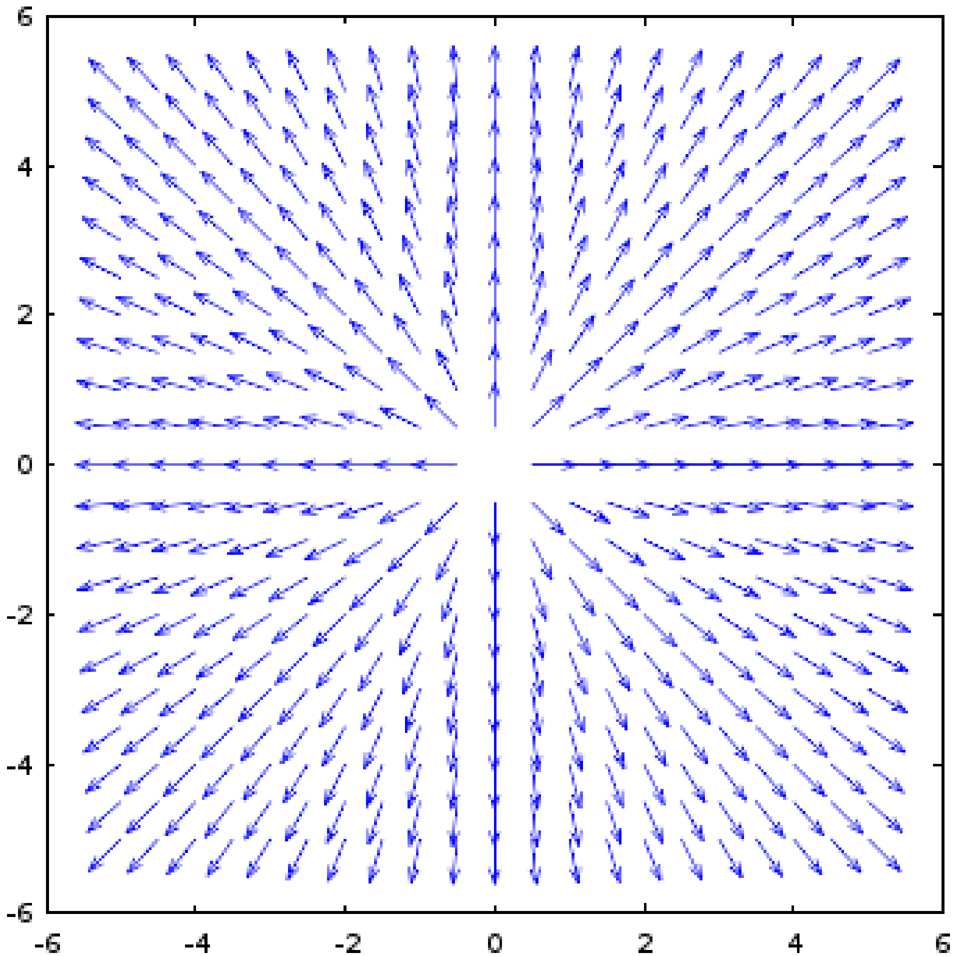
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



Wyjątki się zdarzają

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

- **Nie ma rozwiązań dla $(x, y) = (0, 0)$**
- „Podejrzane” punkty dla $\frac{dy}{dx} = f(y, x)$:
  f lub f' nie jest funkcją ciągłą x i y



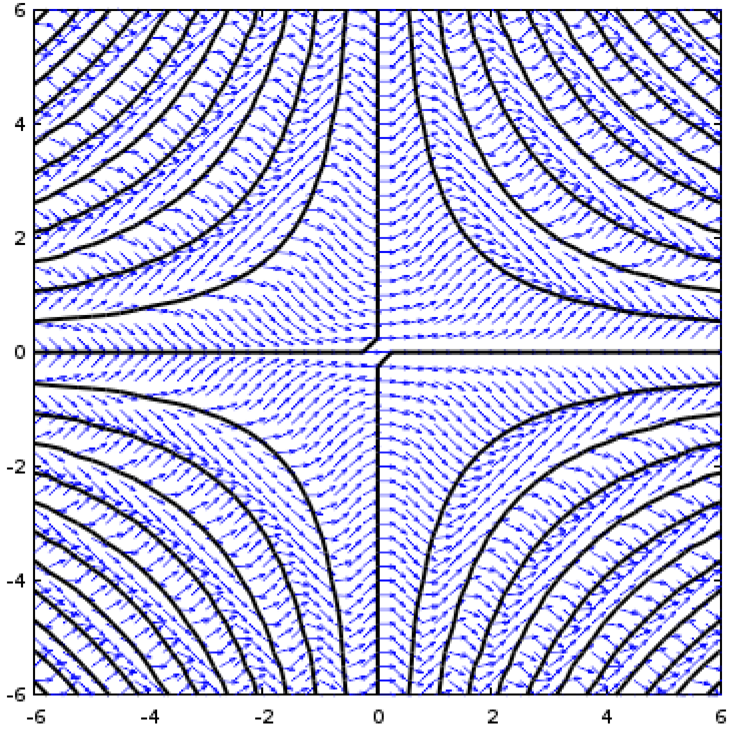
Warunki istnienia rozwiązania

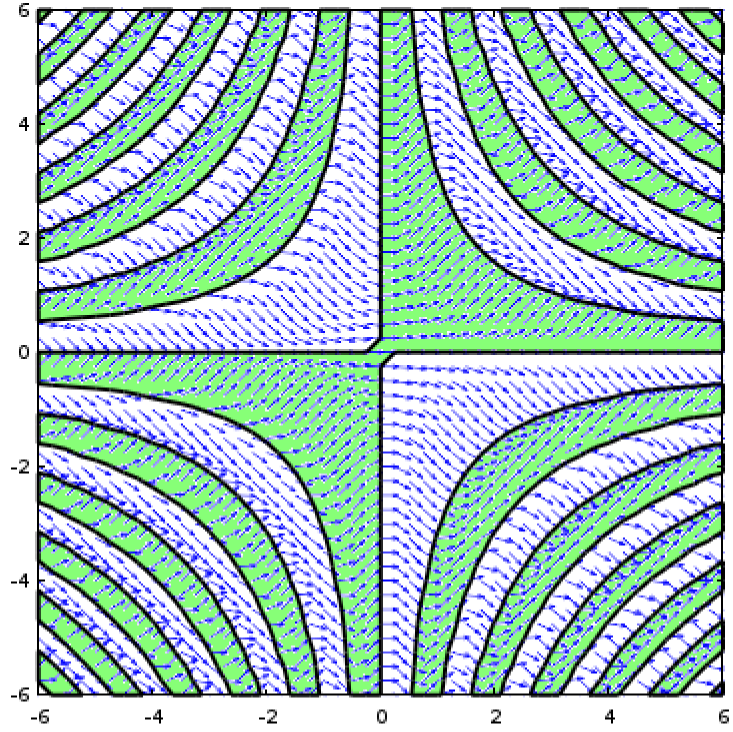
- Dla równania
$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0$$
istnieje (co najmniej jedno) rozwiązanie w otoczeniu (prostokątnym) punktu (x_0, t_0), jeżeli w tym otoczeniu funkcja $f(x,t)$ jest ciągła.
- Jeśli dodatkowo $\frac{df}{dx}$ jest określona i ciągła w otoczeniu (x_0, t_0), to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie w otoczeniu tego punktu

Izokliny pola kierunków

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

contour(x, y, dy, [0,0]); **contourf(x, y, dy, [0,0]);**



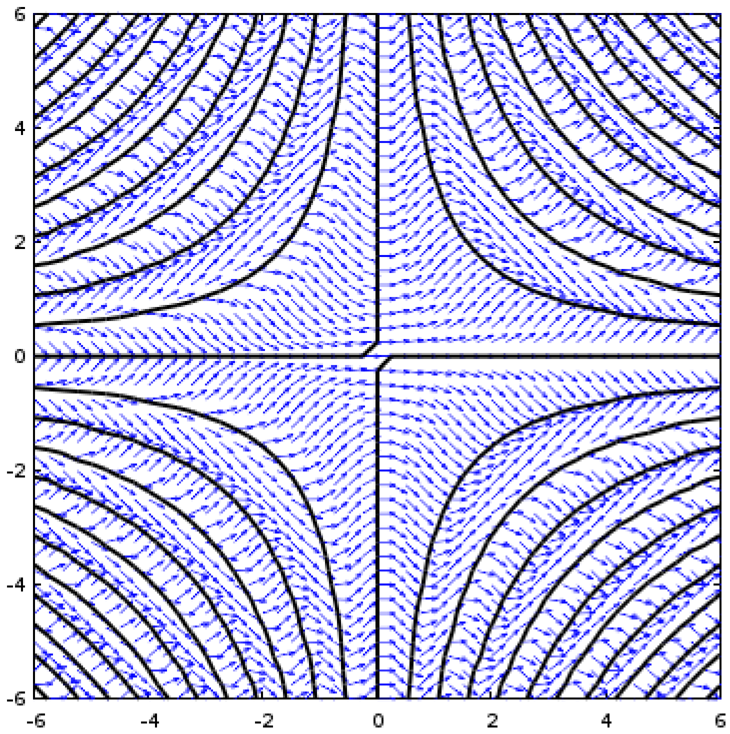


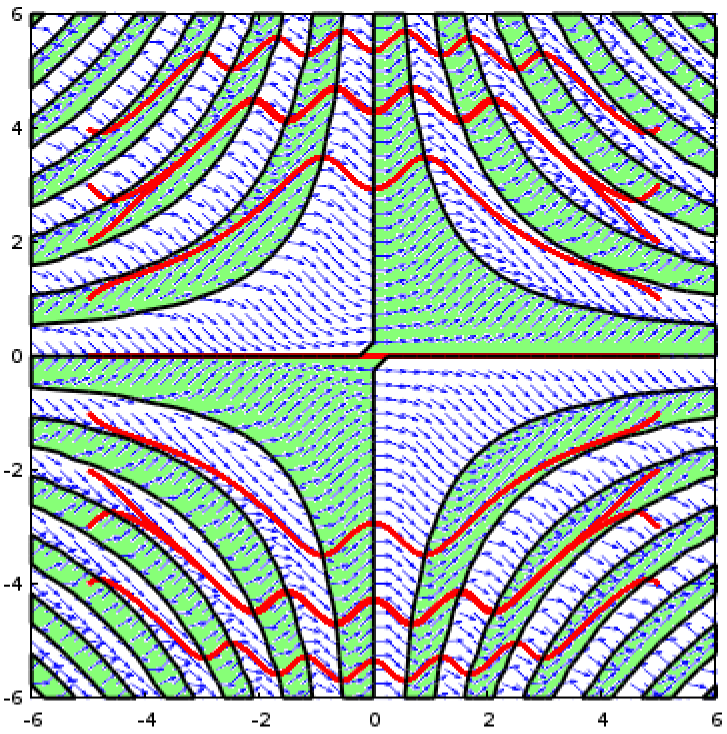
Izokliny przedstawiają punkty o tym samym nachyleniu pola kierunków

Izokliny pola kierunków

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{0}$$

contour(x, y, dy, [0,0]); **contourf(x, y, dy, [0,0]);**





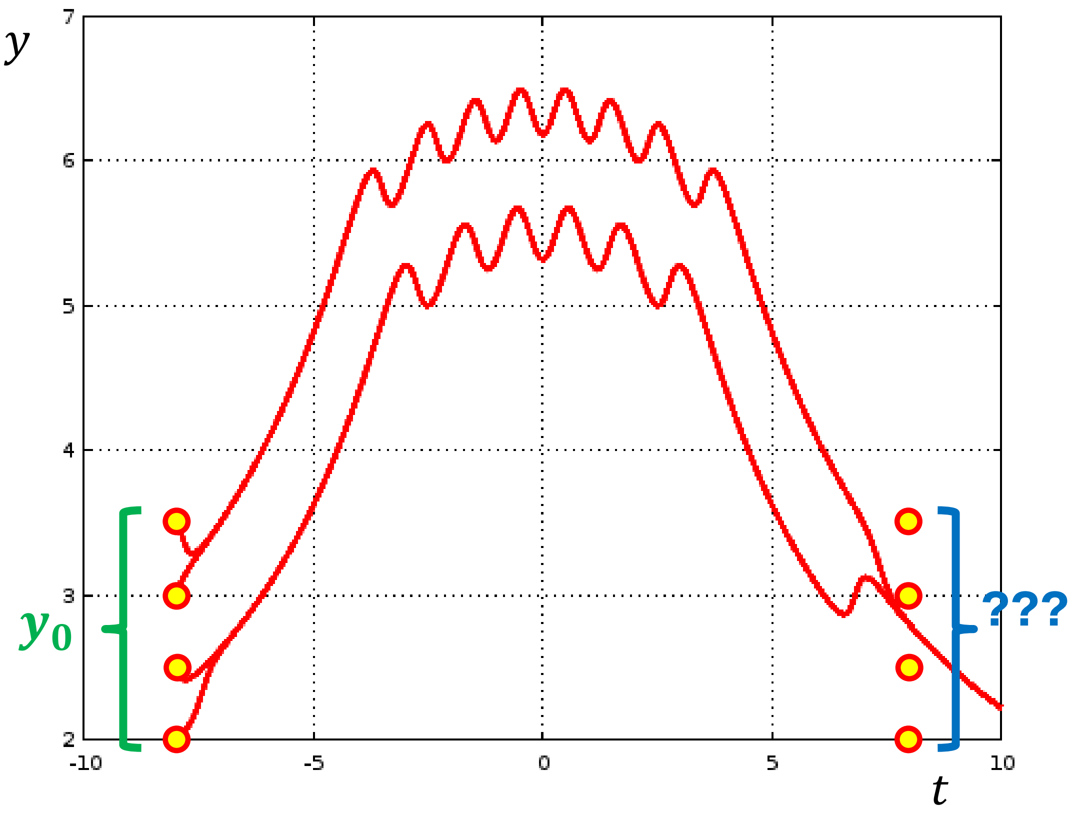
W obszarze zielonym każde rozwiązanie rośnie

w białym – maleje

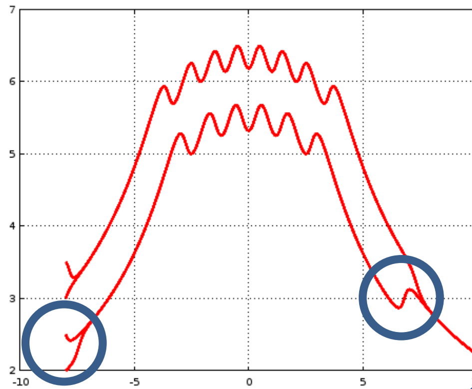
Błędy lokalne a błędy globalne

- Rozwiązanie na rysunku obok powinno być parzyste, $y(t) = y(-t)$, jednak ewidentnie nie jest (na końcach)

$$\frac{dy}{dt} = \sin(yt), t_0 = -8, y_0 = 2, 2.5, 3, 3.5$$

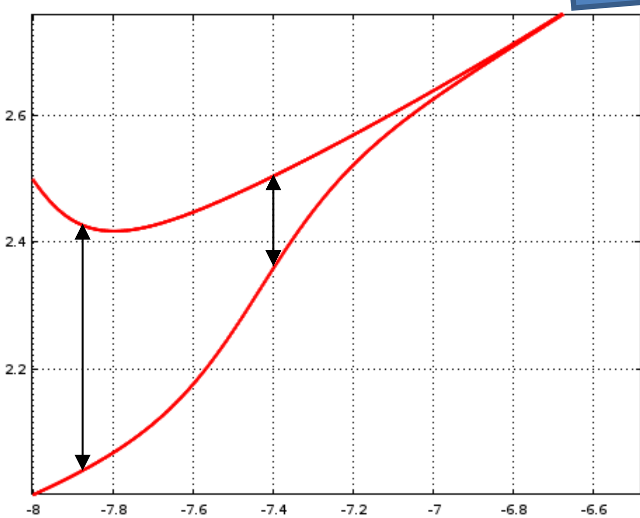


Wałkowanie ciasta

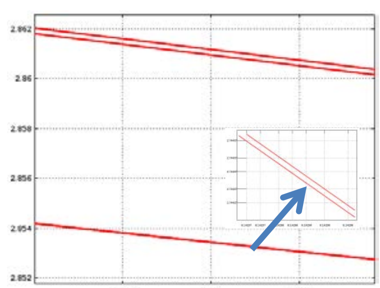


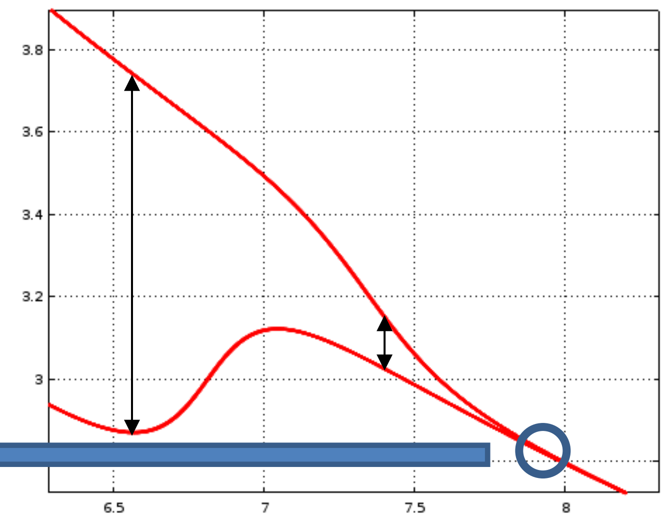
ściskanie

ściskanie



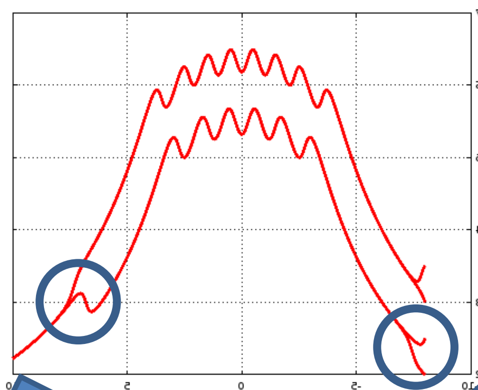
$$\min\left|\frac{\Delta y(t)}{\Delta y(0)}\right| \approx 10^{-14}$$





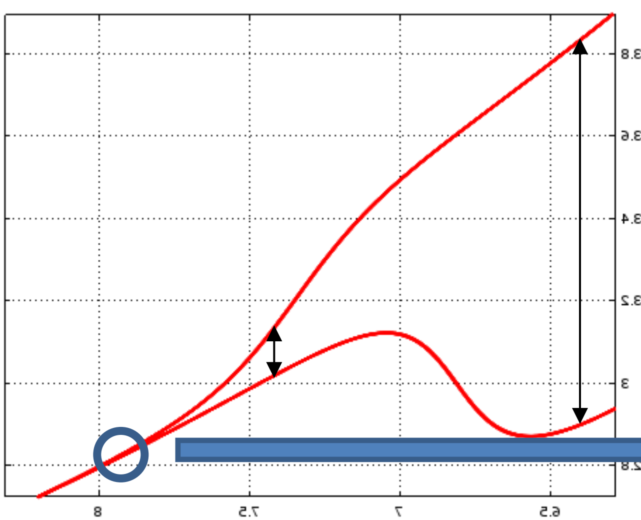
Wałkowanie ciasta: $t \to -t$

$-t \to t$

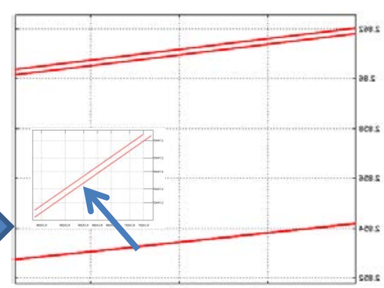


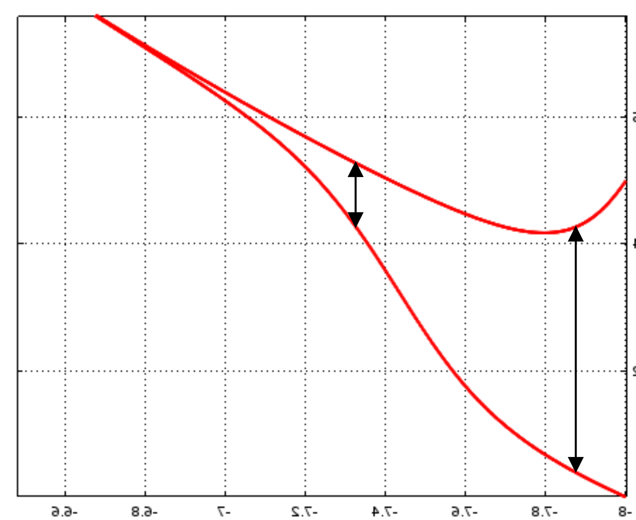
ściskanie → rozszerzanie

ściskanie → rozszerzanie



$$\max\left|\frac{\Delta y(t)}{\Delta y(0)}\right| \approx 10^{14}$$

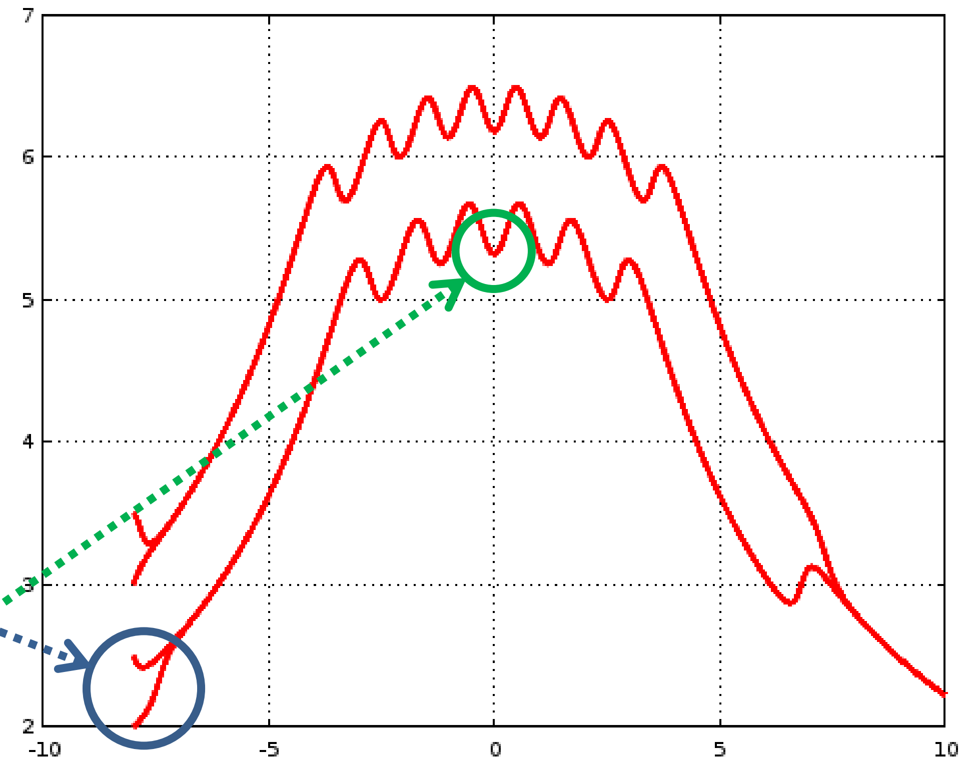




Utrata dokładności numerycznej

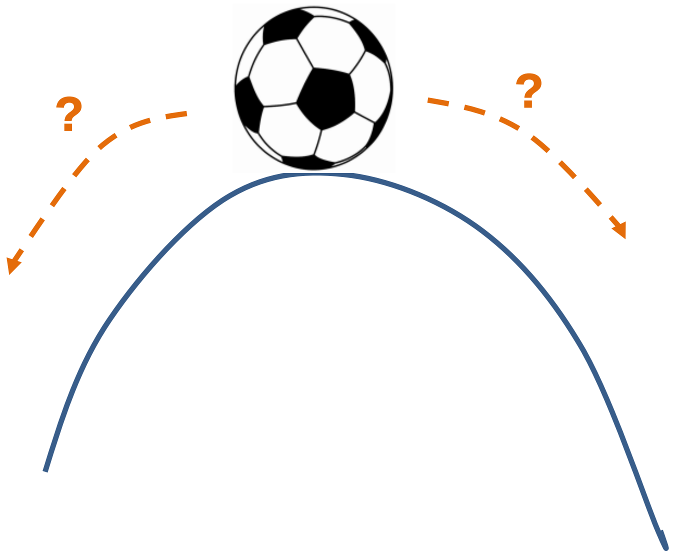
Współczynnik kompresji rozwiązania rzędu 10^{-14}:

- Tu komputer rozróżnia ok. 10^{16} rozwiązań
- Tu komputer ma miejsce na ok. 100 rozwiązań

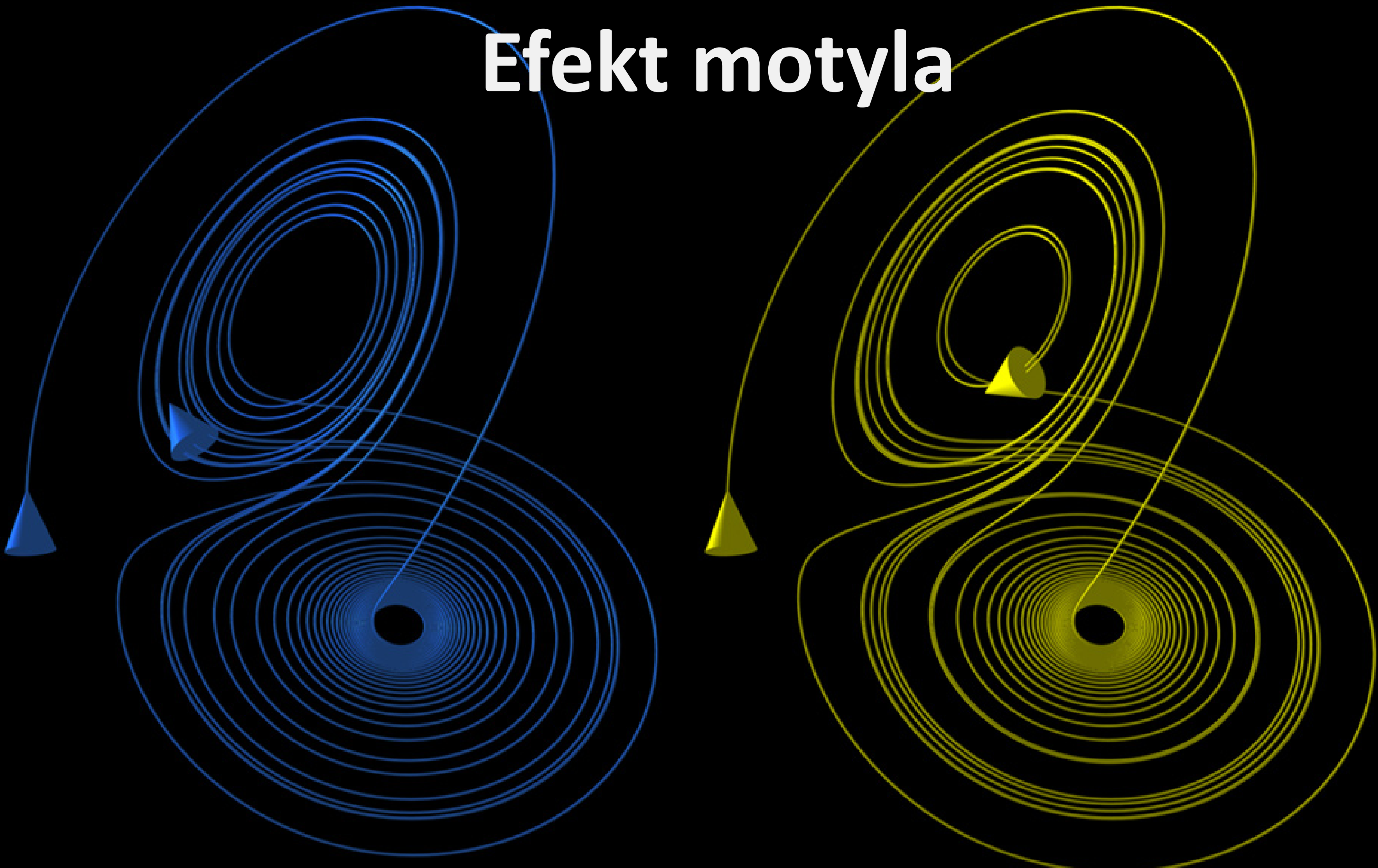


Wałkowanie ciasta

- „Wałkowanie ciasta" przez (nieliniowe) równania różniczkowe zwyczajne jest zjawiskiem powszechnym i nie można na nie nic poradzić



Efekt motyla



Efekt motyla

Dwie trajektorie o warunku początkowym przesuniętym wzdłuż osi „x” o 10^{-5}

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z$$

Efekt motyla

Dwie trajektorie o warunku początkowym przesuniętym wzdłuż osi „x” o 10^{-5}

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y$$

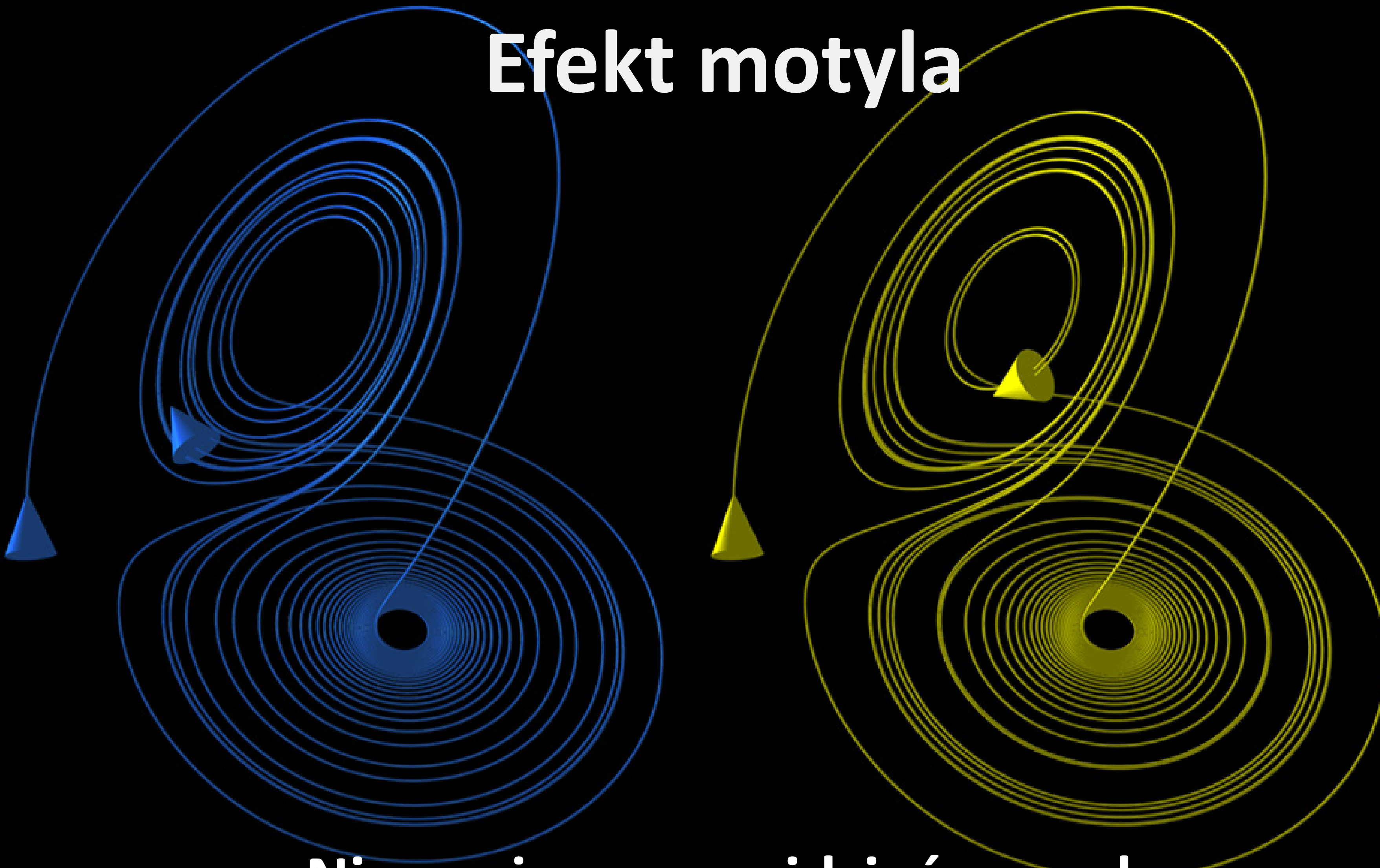
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z$$

te równania są nieliniowe…

Efekt motyla

Po $t \approx 23$
oba rozwiązania
nie mają już ze sobą
nic wspólnego

Efekt motyla



**Nie można przewidzieć pogody
z wyprzedzeniem dłuższym niż kilka dni**

UKŁADY
RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Układy równań różniczkowych

- W praktyce największe znaczenie mają nie pojedyncze równania, a układy równań różniczkowych, w których występuje więcej niż jedna zmienna zależna

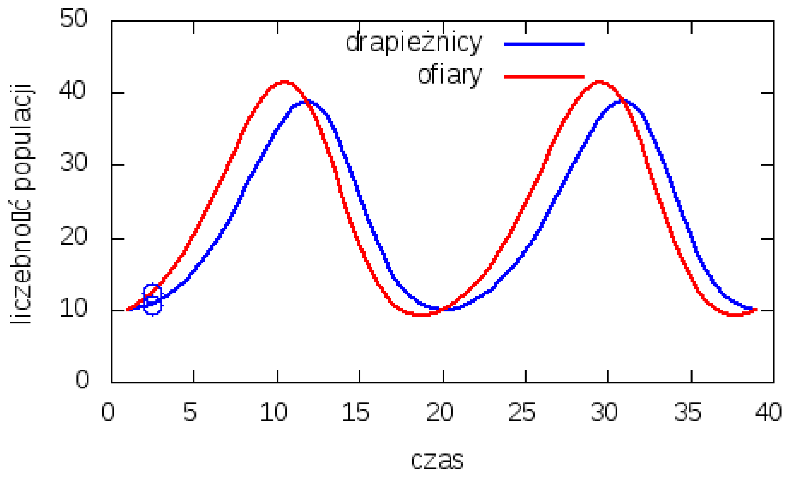
Przykład

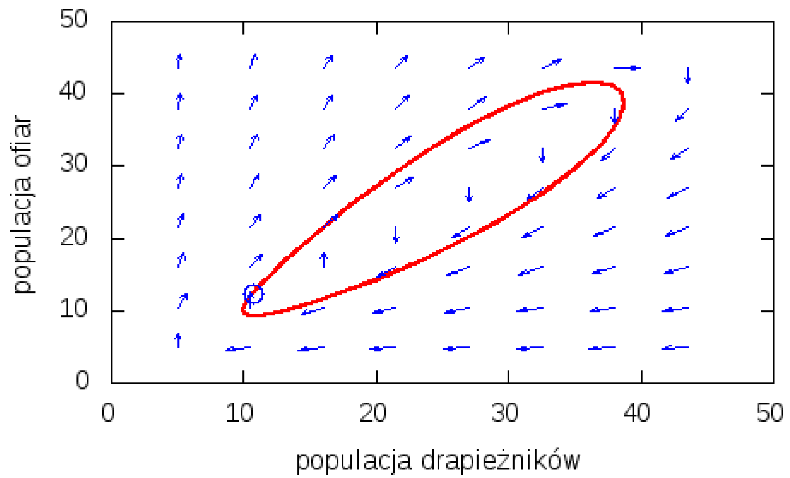
Równania Lotki-Voltery

$$\frac{du}{dt} = u(1 - v)$$

$$\frac{dv}{dt} = av(u - 1)$$

- Model układu drapieżnik (v) – ofiara (u); a jest parametrem modelu





Równania Lotki-Voltery w Octave

$$\overbrace{\frac{du}{dt}}^{=x_1} = u(1-v)$$

$$\overbrace{\frac{dv}{dt}}^{=x_2} = 1.5v(u-1)$$

dwa równania ⇒ parametr x funkcji to dwuelementowy wektor stanu; funkcja zwraca prawe strony równania jako wektor dwuelementowy (**dx**)

```
function dx = lotka_voltera (x, t)
  dx = zeros(2,1);   # wektor dwuelementowy
  a = 1.5;           # parametr
  u = x(1);          # x to zmienne zależne
  v = x(2);
  dx(1) = u*(1-v);     # pierwsze równanie
  dx(2) = a*v*(u-1);  # drugie równanie
endfunction
```

lub:

```
f = @(x,t) [x(1)*(1-x(2)), 1.5*x(2)*(x(1)-1)];
```

$$\underbrace{x(1)}_{u} \quad \underbrace{x(2)}_{v} \quad \underbrace{x(2)}_{v} \quad \underbrace{x(1)}_{u}$$

Równania Lotki-Voltery w Octave

czas (wektor 1xN)

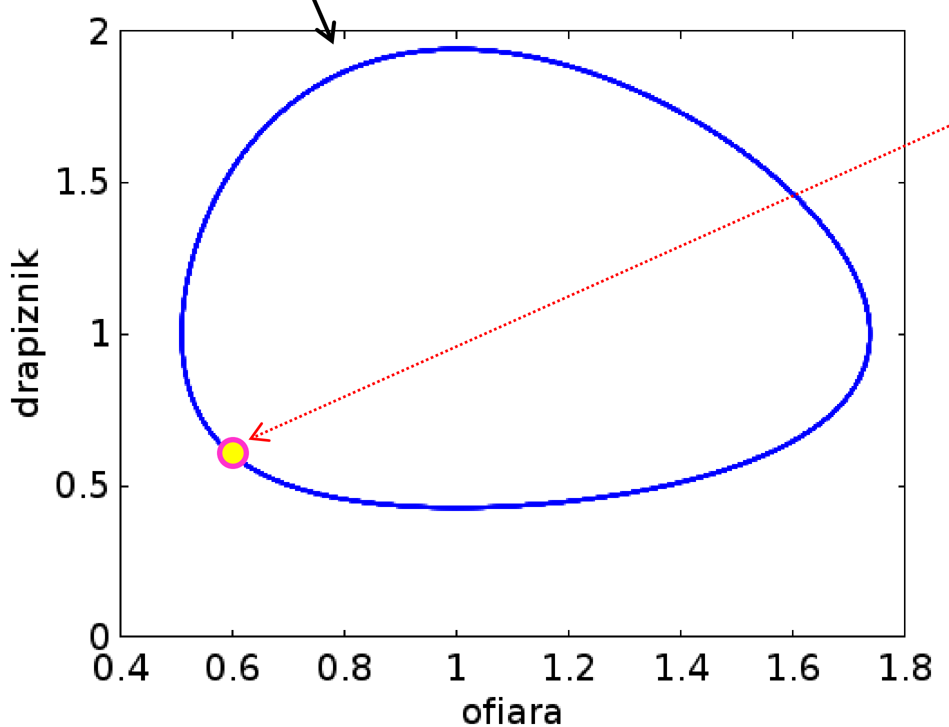
rozwiązanie (wektor 2xN)

```
t = 0:0.01:20;
sol = lsode("lotka_voltera", [0.6,0.6], t);
plot(sol(:,1), sol(:,2), "b");
```

$= x_1$ $= x_2$

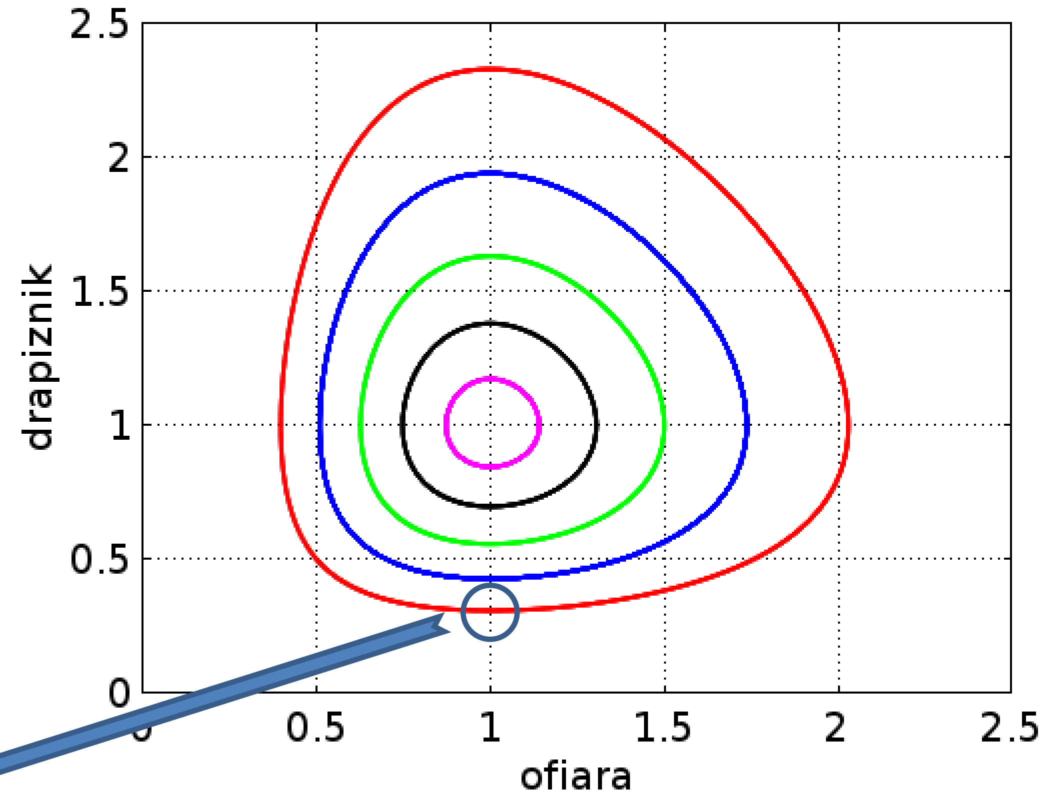
użycie wyniku

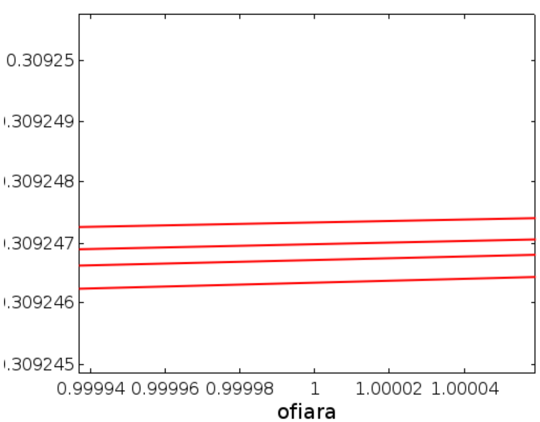
warunek początkowy (wektor 1x2)



Równania Lotki-Voltery w Octave

- Rozwiązanie dla $a = 1.5$





orbita zatoczona 4 razy;
błąd względny poniżej 10^{-6}

RÓWNANIA
RZĘDU WIĘKSZEGO NIŻ 1

Redukcja rzędu równania

- Równanie różniczkowe rzędu N można sprowadzić do układu N równań rzędu 1
- Dlatego najważniejsze są **układy równań różniczkowych** rzędu 1
- Redukcji dokonuje się poprzez wprowadzenie dodatkowych $N-1$ zmiennych zależnych

$$x_1 = \frac{dx}{dt}, x_2 = \frac{dx_1}{dt}, \dots, x_{N-1} = \frac{dx_{N-2}}{dt}$$

($x_1$to prędkość, x_2 to przyspieszenie, etc.)

Redukcja rzędu równania

- Zamiast jednego równania

$$\frac{d^N x}{dt^N} = f(x,t)$$

konstruujemy N równań rzędu 1:

$$\underbrace{\frac{dx}{dt} = x_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2, \dots, \frac{dx_{N-2}}{dt} = x_{N-1},}_{\boxed{\text{$N-1$ nowych równań ma bardzo prostą postać}}} \underbrace{\frac{dx_{N-1}}{dt} = f(x,t)}_{\boxed{\text{„stare” równanie, ale teraz rzędu 1}}}$$

Przykład: równanie Newtona

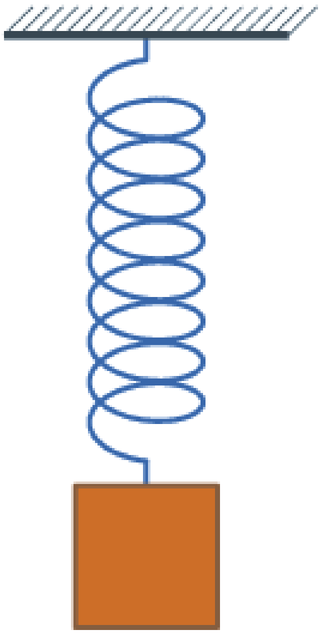
$$\frac{d^{\mathbf{2}}x}{dt^{\mathbf{2}}} = F(x)$$

sprowadzamy do układu dwóch równań rzędu 1
poprzez wprowadzenie nowej zmiennej $\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = F(\boldsymbol{x})$$

Przykład: oscylator harmoniczny



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v} \\ \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\dfrac{k}{m}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

k: stała sprężystości
m: masa

Przykład: oscylator harmoniczny

$$\frac{d\boldsymbol{x}^{\,=x_1}}{dt} = \boldsymbol{v}$$

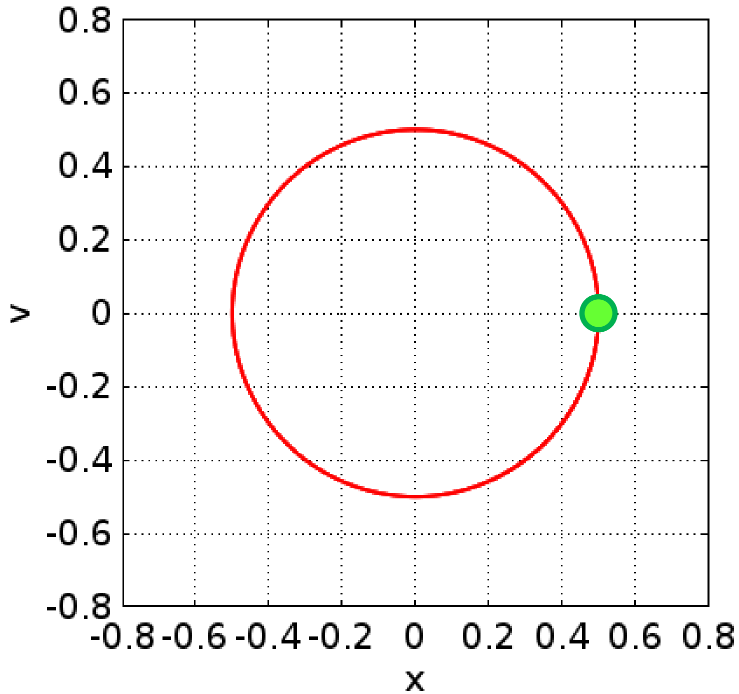
$$\frac{d\boldsymbol{v}^{\,=x_2}}{dt} = -x$$

$$x(0) = \mathbf{0.5}$$

$$v(0) = \mathbf{0}$$

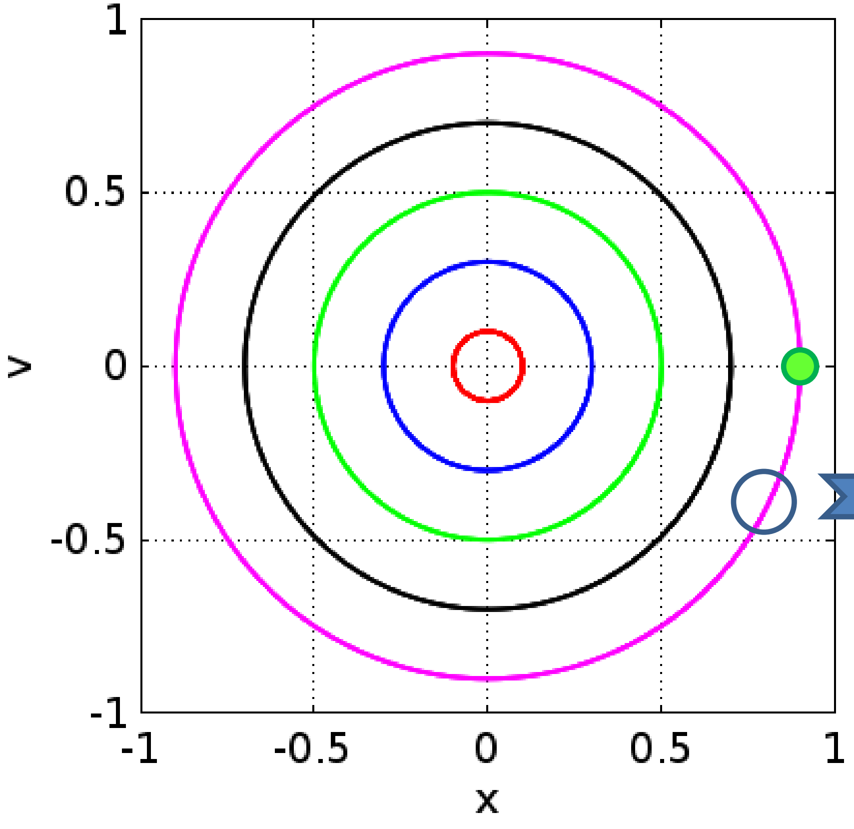
$$\frac{k}{m} = 1$$

```
f = @(x,t) [x(2), -x(1)];
t = 0:0.01:20;
x0 = 0.5; v0 = 0;
sol = lsode(f, [x0, v0], t);
plot(sol(:,1), sol(:,2));
```

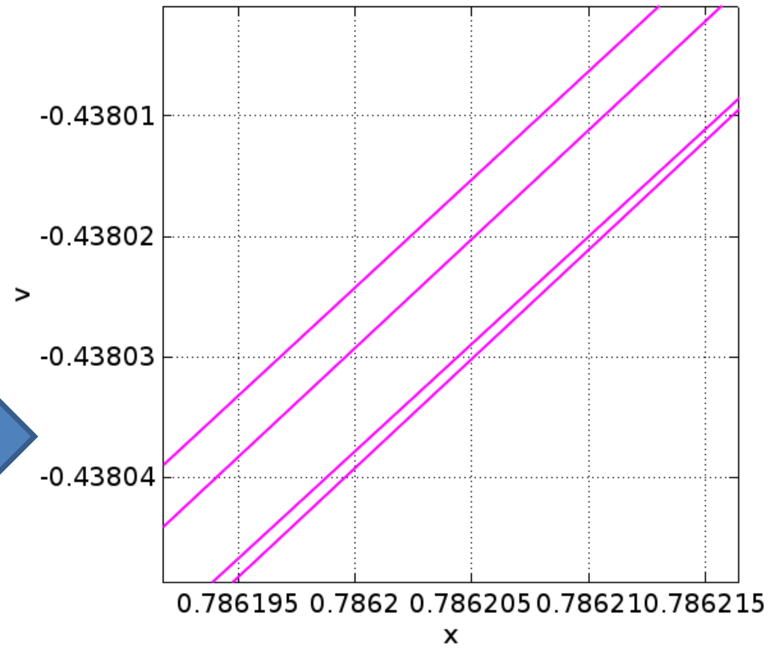


oscylator harmoniczny: **orbity** kołowe

Kilka warunków początkowych



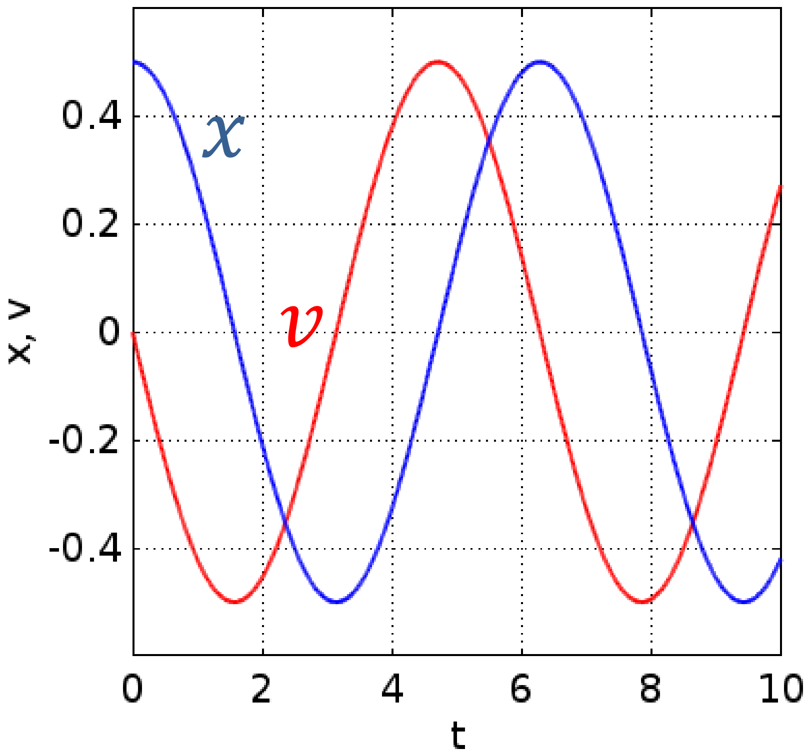
„Kontrola jakości”



oscylator harmoniczny: **zależność od czasu**

$x(t) \propto \cos(\omega t)$

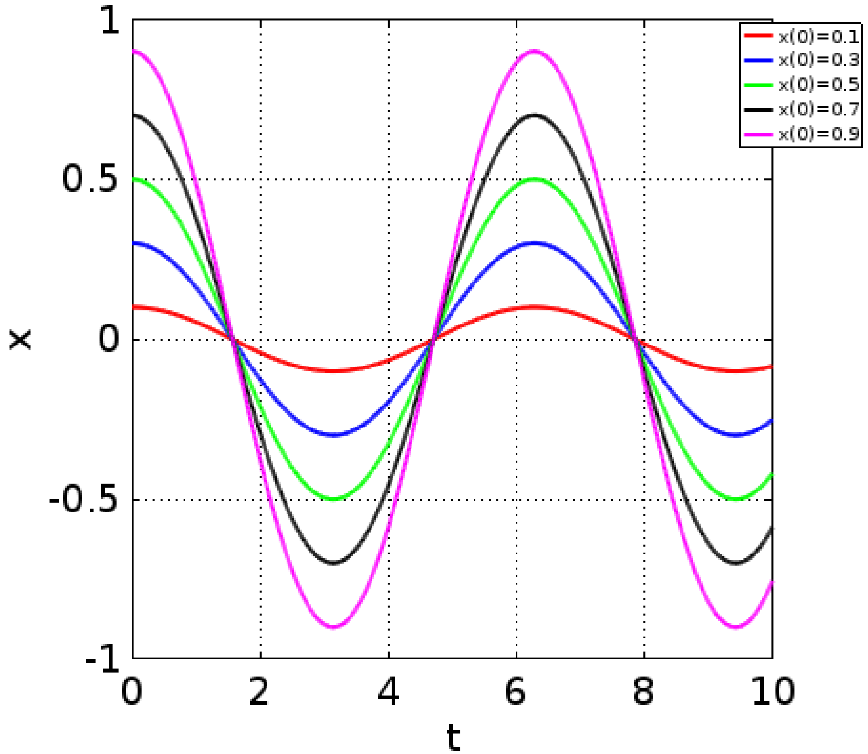
$v(t) \propto \sin(\omega t)$




```
plot(t, sol(:,2), "r;v;");
plot(t, sol(:,1), "b;x;");
```

oscylator harmoniczny:
zależność od czasu i amplitudy

okres drgań
nie zależy od amplitudy




```
t = 0:0.01:10;

sol1 = lsode(f, [0.1,0], t);
sol3 = lsode(f, [0.3,0], t);
sol5 = lsode(f, [0.5,0], t);
sol7 = lsode(f, [0.7,0], t);
sol9 = lsode(f, [0.9,0], t);

plot(t, sol1(:,1), "r;x(0)=0.1;");
plot(t, sol3(:,1), "b;x(0)=0.3;");
plot(t, sol5(:,1), "g;x(0)=0.5;");
plot(t, sol7(:,1), "k;x(0)=0.7;");
plot(t, sol9(:,1), "m;x(0)=0.9;");
```

RÓWNANIA LINIOWE

Układy liniowych RRZ (o stałych współczynnikach)

- Ogólna postać układu 2 równań liniowych:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2$$

- Przykład:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 13$$

Jednorodne układy liniowych RRZ (o stałych współczynnikach)

- Ogólna postać układu 2 równań:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cancel{b_1}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cancel{b_2}$$

- Przykład:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

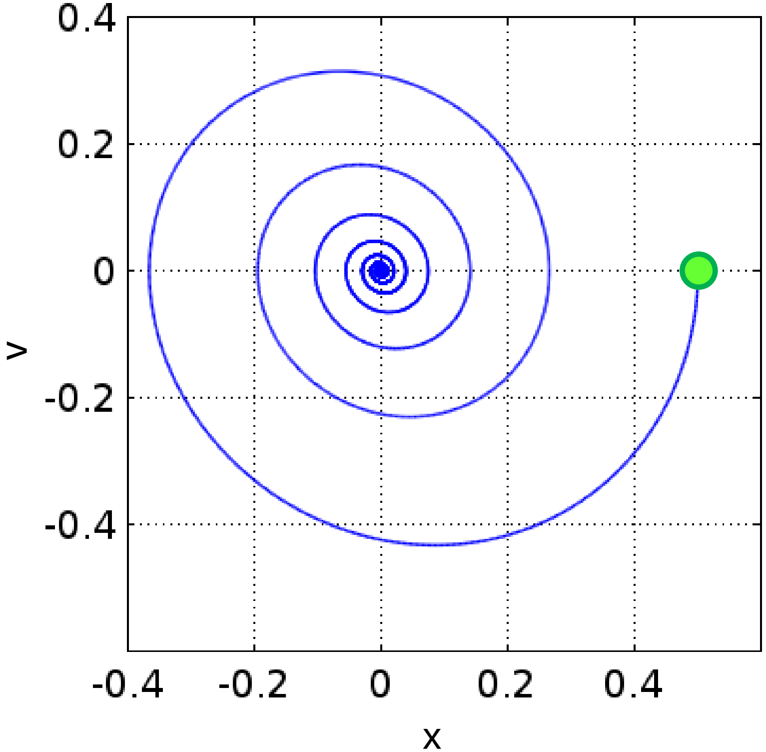
Układy liniowych RRZ o stałych współczynnikach

- Podobnie definiuje się układy N liniowych równań różniczkowych zwyczajnych
- Często występują w zagadnieniach praktycznych
- Liczba niewiadomych może sięgać tysięcy – istnieją specjalne metody rozwiązywania takich równań ($\Rightarrow$ kolejny semestr)
- $\Rightarrow$ Linearyzacja równań nieliniowych

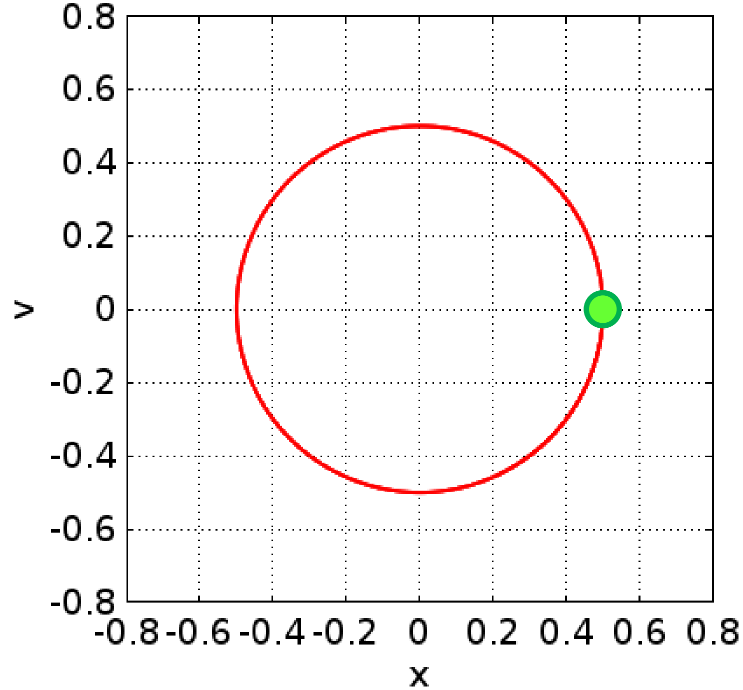
ATRAKTORY I INNE ATRAKCJE

Punkty stałe, orbity, atraktory, chaos

Punkt stały
(stabilny, przyciągający)
(tłumiony oscylator harmoniczny)

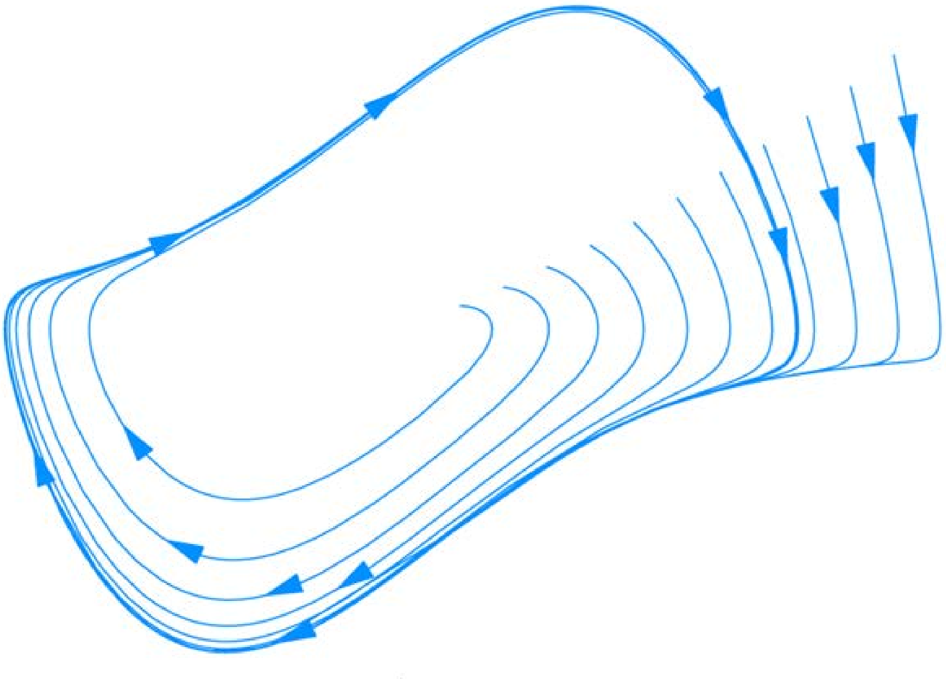


Orbita
(oscylator harmoniczny)

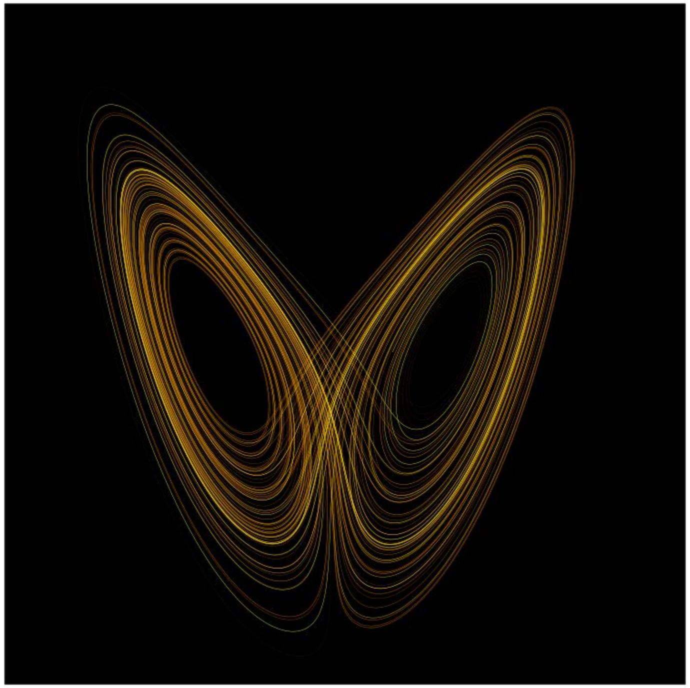


Punkty stałe, orbity, atraktory, chaos

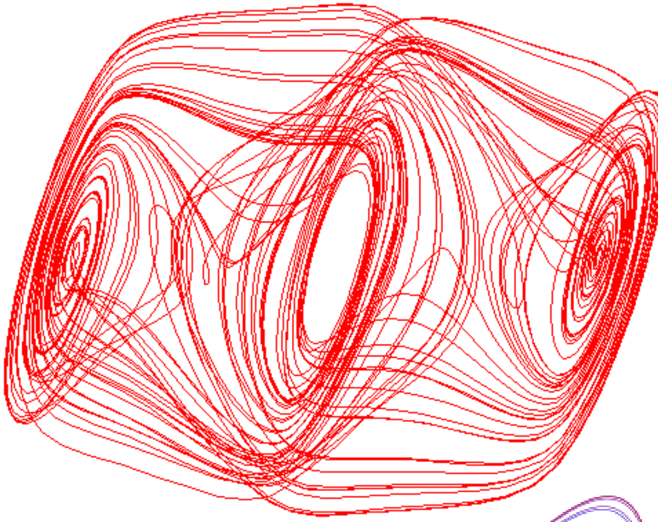
Atraktor
(oscylator Van der Pola)



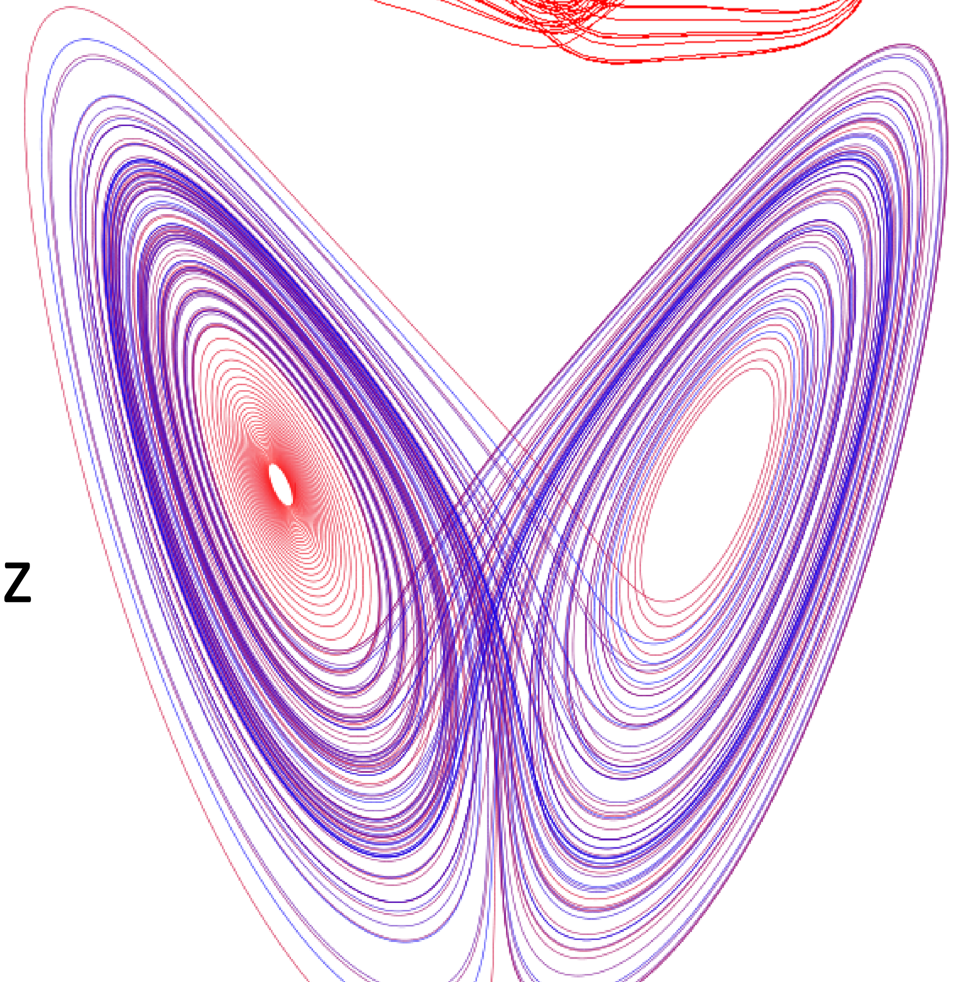
Dziwny atraktor
(atraktor Lorenza, obiekt 3D)



W praktyce



- Chaos lub jego okolice jest powszechny, jeśli równań jest co najmniej 3
- Rozwiązania mogą penetrować w sposób gęsty przestrzeń 3D bez samoprzecinania
- Zagadnienie 3 planet…



METODY DOKŁADNE

solve (dx/dt = -x)

wprowadzenie równania

Assuming "solve" is referring to equation solving | Use as a word instead

Input interpretation:

solve	$x'(t) = -x$

interpretacja

Separable equation:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -1$$

równanie o zmiennych rozdzielonych

ODE classification:

first-order linear ordinary differential equation

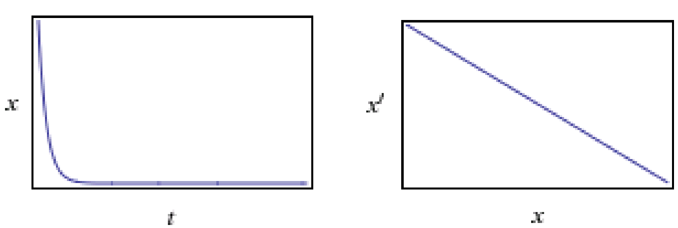
klasyfikacja równania: pierwszego rzędu, liniowe, zwyczajne równanie różniczkowe

Differential equation solution:

$$x(t) = c_1\, e^{-t}$$

rozwiązanie ogólne

Plots of sample individual solution:



$x(0) = 1$

Wykres rozwiązania dla szczególnego warunku początkowego solve (x''=-x, x(0) = 1, x'(0) = 0)

równanie i warunki początkowe

Input:

$\{x''(t) = -x(t), x(0) = 1, x'(0) = 0\}$

interpretacja

ODE names:

klasa równania

Autonomous equation:

$x''(t) = -x(t)$

Van der Pol's equation:

$x''(t) + x(t) = 0$

ODE classification:

second-order linear ordinary differential equation

klasyfikacja równania:
drugiego rzędu, liniowe, zwyczajne
równanie różniczkowe

Alternate form:

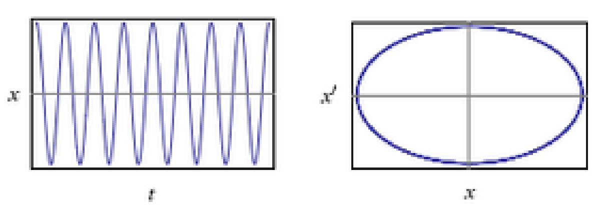
$\{x''(t) + x(t) = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0\}$

Differential equation solution:

$x(t) = \cos(t)$

rozwiązanie

Plots of the solution:



wykres

układ równań i warunki początkowe

solve (x' = y+z, y'=x-z+1, z'= x+y+3, x(0)=1, y(0)=1, z(0)=0)

Input:

$$\{x'(t) = y(t) + z(t),\ y'(t) = x(t) - z(t) + 1,\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3,\ x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0\}$$

interpretacja

ODE classification:

First-order system of linear differential equations

klasyfikacja:
układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

Share

Differential equation solutions:

$$x(t) = 2t + 4e^{-t} + 3e^{t} - 6$$

$$y(t) = -2t - 4e^{-t} + 5$$

$$z(t) = 2t + 3e^{t} - 3$$

rozwiązanie

solve (x' = sin(x*t))

Input:

$$x'(t) = \sin(x(t)\,t)$$

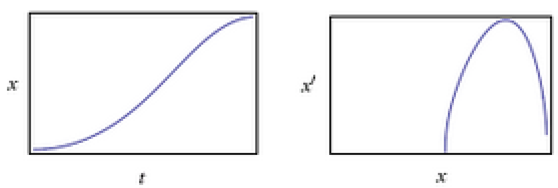
ODE classification:

first-order nonlinear ordinary differential equation

Alternate form:

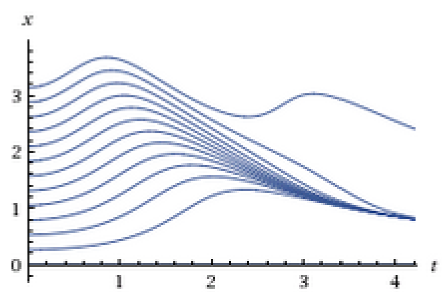
$$x'(t) = \frac{1}{2}\,i\,e^{-i\,t\,x(t)} - \frac{1}{2}\,i\,e^{i\,t\,x(t)}$$

Plots of sample individual solution:



$x(0) = 1$

Sample solution family:



(sampling $x(0)$)

równanie

interpretacja

klasyfikacja równania:
pierwszego rzędu, nieliniowe,
zwyczajne równanie różniczkowe

wykres rozwiązania dla
szczególnego warunku
początkowego

wykres rozwiązania dla
kilku warunków
początkowych

Postęp!

- Na dzisiejszym wykładzie zamiast tradycyjnie zajmować się matematyką XVII i XVIII-wieczną, po raz pierwszy *dotknęliśmy* matematyki z 2. połowy XX wieku

Podsumowanie

- O równaniach różniczkowych myśl w kategoriach przepływu w danym polu prędkości (np. w rzece)
- Łatwe równania rozwiążesz w Wolfram Alpha
- Trudne równania rozwiązuj numerycznie
- Równania rzędu > 1 redukuj do układów rzędu 1
- N równań rzędu 1 wymaga podania N warunków brzegowych (np. wartości $x_1(0), x_2(0), \dots x_N(0)$)
- Pamiętaj o niestabilnościach numerycznych, efekcie motyla, wałkowaniu ciasta, punktach stałych, orbitach i przeróżnych atraktorach