Uniwersytet Wrocławski

Ciągi liczbowe

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2015

Co to są ciągi?

- **Ciąg skończony** o wartościach w zbiorze *A* to dowolna funkcja
$$f: \{1,2,\ldots,n\} \to A$$
- **Ciąg nieskończony** o wartościach w zbiorze *A* to dowolna funkcja
$$f: N \to A$$

Co to są ciągi liczbowe?

- **Ciąg liczbowy** (lub: **rzeczywisty)**
  to ciąg o wartościach rzeczywistych ($A \equiv \mathbb{R}$)
  np.: $a_n = 1/n$
- Ciąg *całkowitoliczbowy*: $A \equiv \mathbb{Z}$, np. $a_n = n$
- Ciąg *zespolony* $A \equiv \mathbb{C}$, np. $a_n = i/n$
- Ciąg *funkcyjny*: A jest zbiorem pewnych funkcji, np. $a_n = \frac{1}{x^n}, x > 0$
- …

Notacja

- a_n – n-ty ***wyraz*** (lub ***element***) ciągu (*n* jest ***indeksem***)
- (a_n) lub $\{a_n\}$ – cały ciąg

Dlaczego ciągi liczbowe są interesujące?

- **Sumy** ciągów *skończonych*
- **Granice** ciągów
- **Sumy** ciągów *nieskończonych*

ewentualnie:

- Iloczyny ciągów (zwłaszcza nieskończonych)

Dygresja

- W wielu językach programowania istnieją dość luźne odpowiedniki „ciągów czegokolwiek” : **krotki** (ang. ***tuples***)

```
>> s = {1, "ala", [1, 2; 3, 4]};                  # Octave
>> s{1}                       # Indeksowanie liczbami; klamry
ans =  1
>> s{2}
ans = ala
>> s{3}
ans =
   1   2
   3   4
```

Sumy ciągów skończonych

- $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k} = \dfrac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$ (ciąg arytmetyczny)
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{\boldsymbol{(a_{1+}\, a_n)}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{n}$ (ciąg arytmetyczny)
- $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (suma kwadratów)
- $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^3} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (sześciany)

Sumy ciągów skończonych

- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{\boldsymbol{a^{n+1}-1}}{\boldsymbol{a-1}}$, dla $a \neq 1$ (ciąg geometryczny)

Sumy ciągów skończonych

- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, dla $a \neq 1$ (ciąg geometryczny)

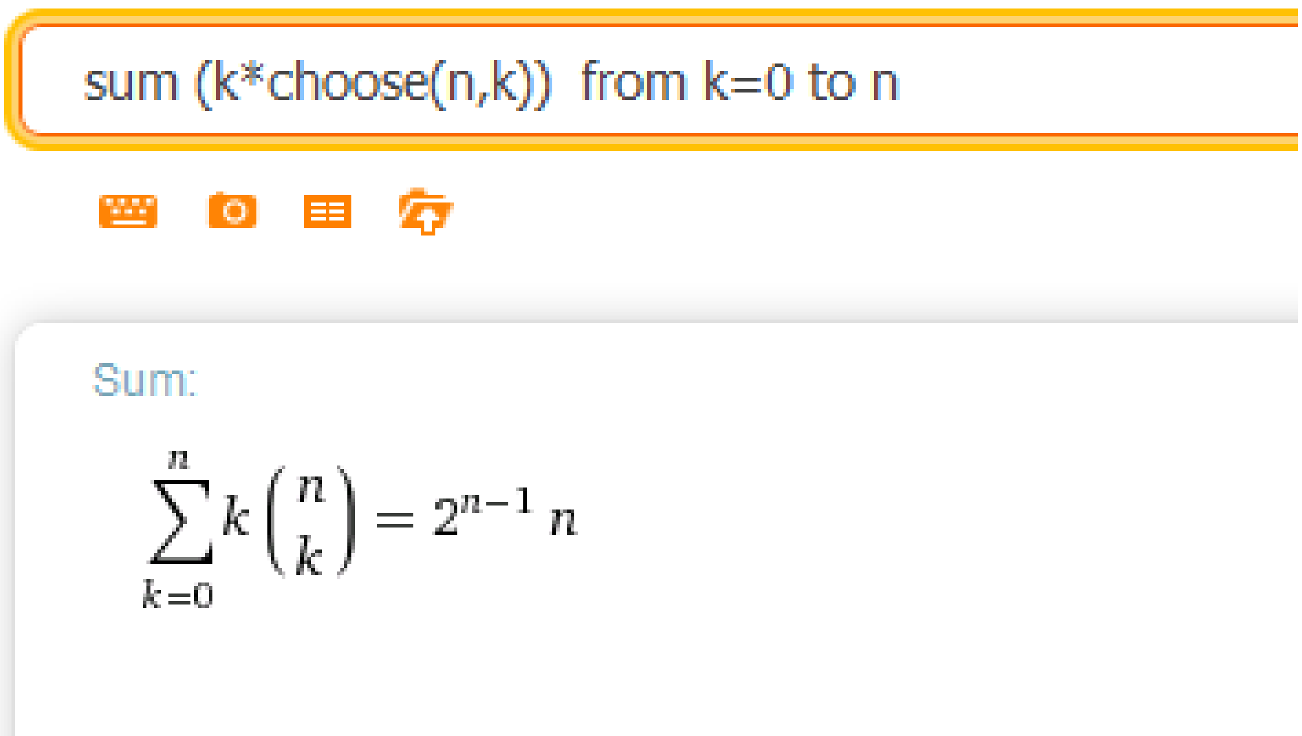
Inne, np.:

- $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2(n2^n - 2^n + 1)$

- $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n2^{n-1}$

Sumy ciągów skończonych

- **Wzory** na sumy ciągów skończonych, jeśli istnieją, najłatwiej odczytać z programów typu Wofram Alpha, Maxima, Mathematica, etc.



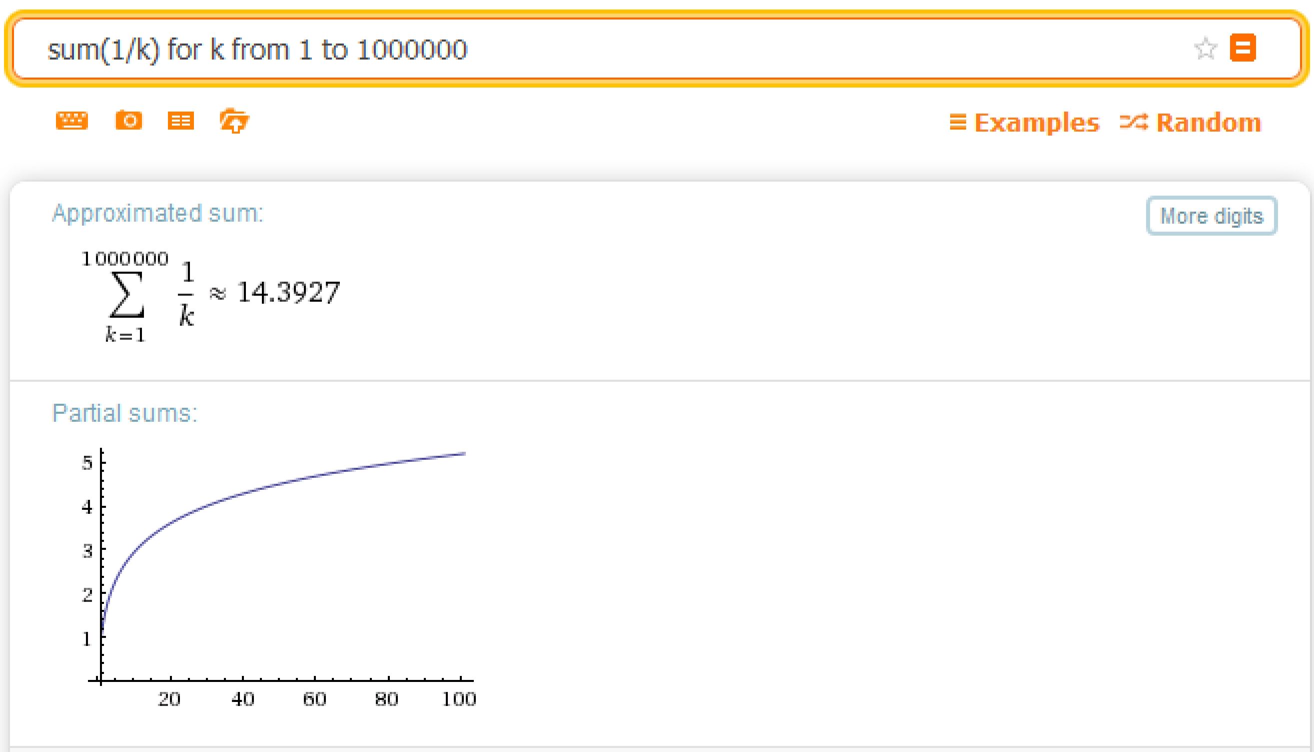
Sumy ciągów skończonych

- **Wartość** sumy ciągu skończonego najłatwiej obliczyć w programach typu Octave/Wolfram Alpha etc.

```
>> N = 1000000
N =  1000000
>> sum (1./(1:N))  # suma 1/k, k = 1,2,...,N
ans =  14.393
```

Sumy ciągów skończonych

- **Wartość** sumy ciągu skończonego najłatwiej obliczyć w programach typu Octave/Wolfram Alpha etc.



Dygresja: konwencja sumacyjna

- W niektórych obszarach nauki i techniki powszechnie stosuje się **konwencję sumacyjną Einsteina**: jeśli w wyrażeniu objętym sumą indeks sumowania powtarza się w dwóch czynnikach, to znak sumy pomija się.
- Przykład:

$$y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \quad \text{można uprościć tak:} \quad y_i = a_{ij} x_j$$

Sumy częściowe

- **Sumy częściowe ciągu** w Octave:

```
>> a = [1,2,3,4,5];
>> s = cumsum(a)
s =
   1   3   6  10  15
>> s2 = cumsum(s)
s2 =
   1   4  10  20  35
```

Ciąg różnicowy

- **Ciąg różnicowy** ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ to ciąg $(b_n) = \; a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$.
- Octave: polecenie **diff**

```
x = [0, 5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96, 117];
>> diff (x)
ans =
   5   7   9   11   13   15   17   19   21
diff (ans)
ans =
  2   2   2   2   2   2   2   2
```

Ciąg różnicowy

- Jeśli k-ty ciąg różnicowy ciągu (a_n) jest stały (i różny od ciągu zer), to ciąg (a_n) można zapisać jako wielomian stopnia k:

$$a_n = W_k(n)$$

przykład

```
x = [0, 5, 12, 21, 32, 45, 60, 77, 96, 117];
>> diff (diff(x))
ans =
   2   2   2   2   2   2   2   2
```

więc *x*(n) jest wielomianem stopnia 2.

Ciąg różnicowy

- Jeśli k-ty ciąg różnicowy, (b_n), ciągu (a_n) jest stały, $b_n = c$, gdzie $c \neq 0$, to ciąg (a_n) jest wielomianem stopnia k względem *n* oraz

$$a_n = \frac{c}{k!} n^k + W_{k-1}(n)$$

```
>> diff (diff(x))   # drugi ciąg różnicowy ciągu x
ans =
  2   2   2   2   2   2   2   2
```

więc $x(n) = \frac{2}{2!} n^2 + w_1 n + w_0$

$$= n^2 + w_1 n + w_0.$$

Najważniejsza część wykładu:

GRANICE CIĄGÓW

Granica ciągu

- Elementy niektórych ciągów nieskończonych zbliżają się do pewnej wartości, zwanej jej granicą
- Przykład:

$$a_n = 1/n;$$

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,\ldots$$

elementy tego ciągu coraz bardziej zbliżają się do zera, które jest jego granicą

Zapis

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

„granica ciągu 1/n przy n dążącym do nieskończoności równa się zero”

Definicja formalna

- Ciąg (a_n) ma granicę c wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} \; \underset{m \in N}{\exists} \; \underset{k > m}{\forall} \; |a_k - c| < \epsilon$$

- ∀ (lub ∧)oznacza „dla każdego” (ang. *for **A**ll*)
- ∃ (lub ∨) oznacza „istnieje” (ang. ***E**xists*)

Definicja nieformalna

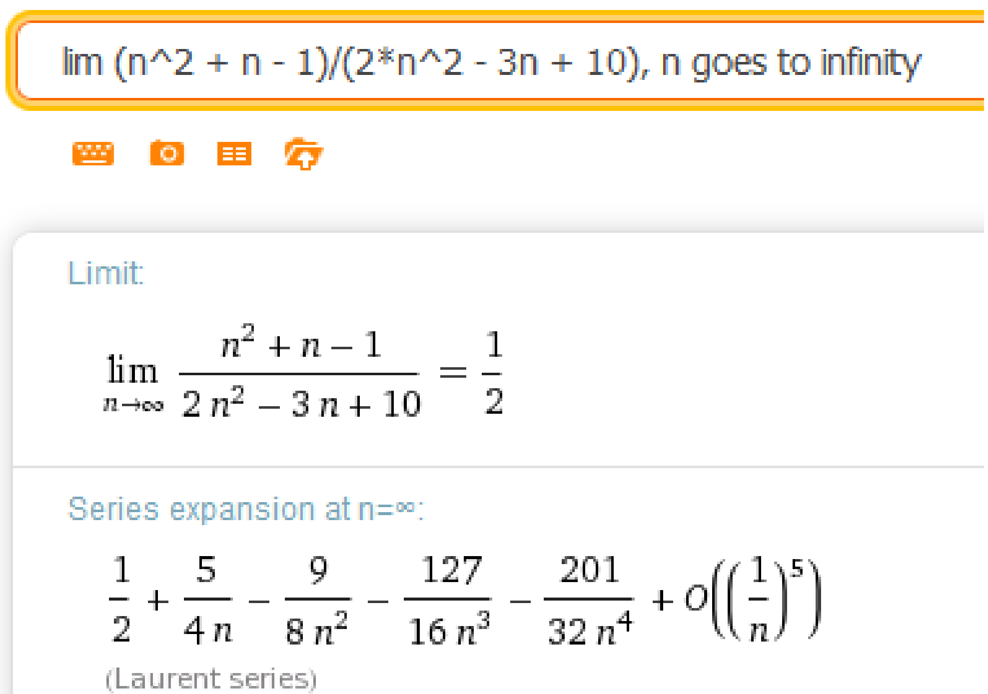
- Ciąg (a_n) ma granicę c wtedy i tylko wtedy, jeśli zastąpienie jego wyrazów liczbą c spowoduje **dowolnie mały błąd** („epsilon”) wszędzie z wyjątkiem być może **skończonej liczby** jego wyrazów (zwykle leżących na początku ciągu)

Ciąg zbieżny

- Mówimy, że ciąg jest **zbieżny**, jeśli posiada granicę
- W przeciwnym wypadku ciąg jest **rozbieżny**

Jak obliczać granice ciągów?

- Najłatwiej:
  - W pamięci (łatwe przypadki, np. 1/n)
  - Wolfram Alpha, Maxima, Mathematica,…



Funkcje wymierne

- **Funkcje wymierne** to ilorazy 2 wielomianów
- Przykład:

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 - 4n - 5}{n^3 + 2n^2 + 3n + 4}$$

Funkcje wymierne

- **Funkcje wymierne** to ilorazy 2 wielomianów
- Przykład:

$$a_n = \frac{\mathbf{2n^3} + 3n^2 - 4n - 5}{\mathbf{n^3} + 2n^2 + 3n + 4} \div \frac{n^3}{n^3}$$

$$a_n = \frac{\mathbf{2} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{\mathbf{1} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{1} = 2$$

Funkcje wymierne

- Jeśli ciąg a_n zadany jest funkcją wymierną, to z obu wielomianów wystarczy wziąć wyrazy z największą potęgą indeksu:

$$a_n = \frac{\boldsymbol{3n^2} - 4n - 5}{\boldsymbol{n^3} + 2n^2 + 3n + 4}$$

$$a_n \sim \frac{\boldsymbol{3n^2}}{\boldsymbol{n^3}} = \frac{3}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- Rozwiązanie znajdujemy znacznie szybciej ręcznie niż w programie komputerowym!

Składnik wiodący

$$a_n = \frac{\mathbf{2^n} - 4n - 5}{\mathbf{2^n} + 2n^2 + 3n + 4}$$

$$a_n \sim \frac{\mathbf{2^n}}{\mathbf{2^n}} = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

- Funkcja potęgowa a^n dla $|a| > 1$ rośnie szybciej niż każdy wielomian
- Rozwiązanie znajdujemy znacznie szybciej ręcznie niż w programie komputerowym!

Granica wymierna

$$a_n = a_{n-1} + 3 \cdot 10^{-n}, \quad a_1 = 0.3$$

$$\{a_n\} = 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots$$

$$\{a_n\} \to \frac{1}{3}$$

- Granica *tego ciągu* liczb wymiernych też jest wymierna

Granica niewymierna

$$a_1 = 0.1$$
$$a_2 = 0.101$$
$$a_3 = 0.101001$$
$$a_4 = 0.1010010001$$
$$a_5 = 0.101001000100001$$
$$a_6 = 0.101001000100001000001$$
...
$$\{a_n\} \to 0.1\mathbf{0}1\mathbf{00}1\mathbf{000}1\mathbf{0000}1\ldots$$

- Granica ***tego ciągu*** liczb ***wymiernych*** jest ***<u>niewymierna</u>*** (dlaczego?)

Liczby rzeczywiste

- Zbiór liczb rzeczywistych można zdefiniować jako zbiór wszystkich granic ciągów liczb wymiernych
- Każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych, np. swoich kolejnych rozwinięć dziesiętnych
- Przykład:

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, \dots \to \pi$$

- Jeżeli ciąg rzeczywisty ma granicę, to jest ona rzeczywista

Liczba π

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$a_3 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{52}{15}$$

$$a_4 = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} = \frac{304}{105}$$

…

$$a_n = a_{n-1} + 4\,\frac{\mathbf{(-1)^{n+1}}}{2n-1}$$

$$a_n \to \pi$$

Liczba $\boldsymbol{e}$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} \approx 2.667$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} \approx 2.708$$

…

$$a_n \to e = \mathbf{2.71}828\ldots$$

Liczba e

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2.37$$

...

$$a_n = \boldsymbol{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \boldsymbol{e} = \mathbf{2.71}828\ldots$$

Liczba $1/e$

$$a_n = \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbf{1}/\boldsymbol{e}$$

$\sqrt{2}$

$$x_1 = 0, \quad x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1} + 1}$$

$$x_n \to \sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$

Sprawdzamy:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{4}{3}, x_4 = \frac{10}{7}, x_5 = \frac{24}{17},$$

$$x_6 = \frac{58}{41}, x_7 = \frac{140}{99}, x_8 = \frac{338}{239}, x_9 = \frac{816}{577},$$

$$x_{10} = \frac{1970}{1393}, x_{11} = \frac{1393}{985} \approx 1.41421349985$$

Granice niewłaściwe

- Ciąg o **dowolnie dużych** elementach ma **granicę niewłaściwą** oznaczaną symbolem

$$\infty$$

- Ciąg o **dowolnie małych** elementach ma **granicę niewłaściwą** oznaczaną symbolem

$$-\infty$$

Definicja formalna

- Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\delta > 0}{\forall} \quad \underset{m \in N}{\exists} \quad \underset{k > m}{\forall} \quad a_k > \delta$$

- Ciąg (a_n) ma granicę niewłaściwą $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

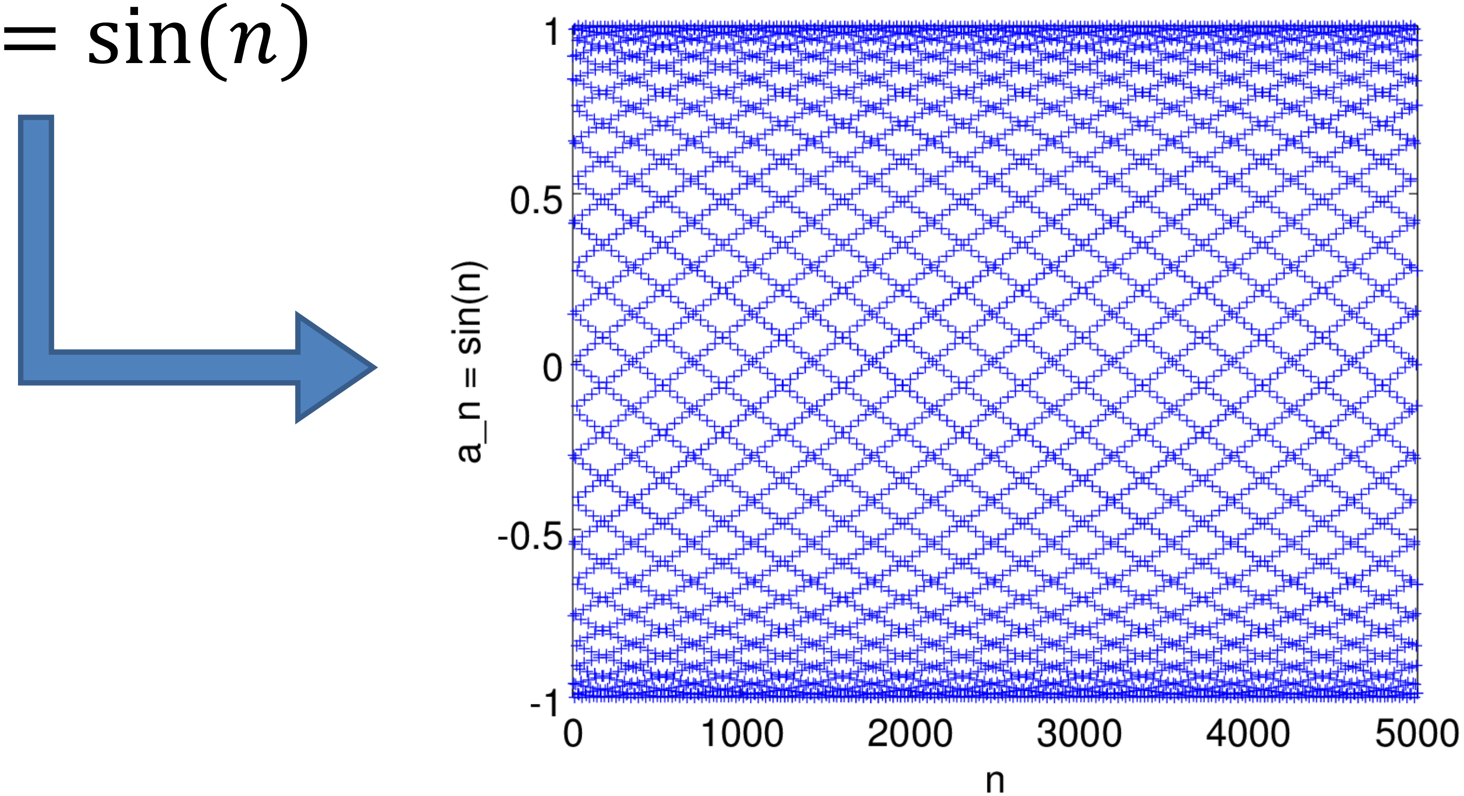
$$\underset{\delta > 0}{\forall} \quad \underset{m \in N}{\exists} \quad \underset{k > m}{\forall} \quad a_k < -\delta$$

Granice niewłaściwe – przykłady

- $a_n = n$ $\qquad a_n \to \infty$
- $b_n = 2^n - 3^n$ $\qquad b_n \to -\infty$

Brak granicy

- Nie każdy ciąg ma granicę:
- $a_n = (-1)^n \qquad (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$
- $a_n = \sin(n)$



Granica $\pm, \times, \div$ ciągów

- Jeśli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = d \quad \text{oraz} \quad e \in R$$

to

$$\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = c \pm d$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c\, d$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{c}{d} \quad (\text{o ile } d \neq 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} e \cdot a_n = ea\,, \qquad \lim_{n\to\infty} (e + a_n) = e + a$$

Wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$

- Jeśli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \mathbf{0}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

nazywamy wyrażeniem nieoznaczonym typu **0/0**.

W tym przypadku ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ może mieć granicę skończoną, niewłaściwą lub nie mieć granicy

$$\frac{0}{0}$$

- Przykłady:

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

$$b_n = \frac{1}{n} \to 0$$

wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1\,, \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n)^2}{b_n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{(b_n)^2} = \infty$$

Wyrażenia nieoznaczone

- $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$
- $\mathbf{0} \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$
- $\mathbf{1}^{\infty}$
- $\infty^{\mathbf{0}}$

W tych przypadkach znajomość granicy poszczególnych ciągów nie daje żadnych informacji o granicy wyrażeń nieoznaczonych zbudowanych z tych ciągów

Szeregi

- Niech (a_n) będzie ciągiem.
  Ciąg (s_n) jego ***sum częściowych***,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

nazywamy ***szeregiem***, a jego **granicę** (jeśli istnieje i jest właściwa) – jego *sumą*.

Szeregi – przykłady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ \ldots = e$$

$\boxed{0! \equiv 1}$

Bardzo znane szeregi

- **Szereg geometryczny**

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

jest zbieżny tylko dla $|q| < 1$.

Bardzo znane szeregi

- **Szereg potęgowy**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q}$$

jest zbieżny tylko dla $q > 1$

Bardzo znane szeregi

- **Szereg harmoniczny**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

jest rozbieżny do nieskończoności

Szereg przemienny

- W szeregu przemiennym co drugi wyraz jest dodatni, a co drugi ujemny
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

- Jeśli (a_n) jest nierosnący i $a_n \to 0$, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ jest zbieżny

Jak obliczać sumy szeregów?

sum(1/(2^k)/(k*k)), for k from 1 to infinity

Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k\,(k\,k)} = \frac{1}{12}\left(\pi^2 - 6\log^2(2)\right)$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Decimal approximation:

More digits

0.58224052646501250590265632015968010874419847480612642543434 7...

Convergence tests:

By the ratio test, the series converges.

Jak obliczać sumy szeregów?

sum(1/(2^k)/(k*k)), for k from 1 to infinity

Examples Random

Infinite sum:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k\,(k\,k)} = \frac{1}{12}\left(\pi^2 - 6\log^2(2)\right)$$

$\log(x)$ is the natural logarithm

Decimal approximation:

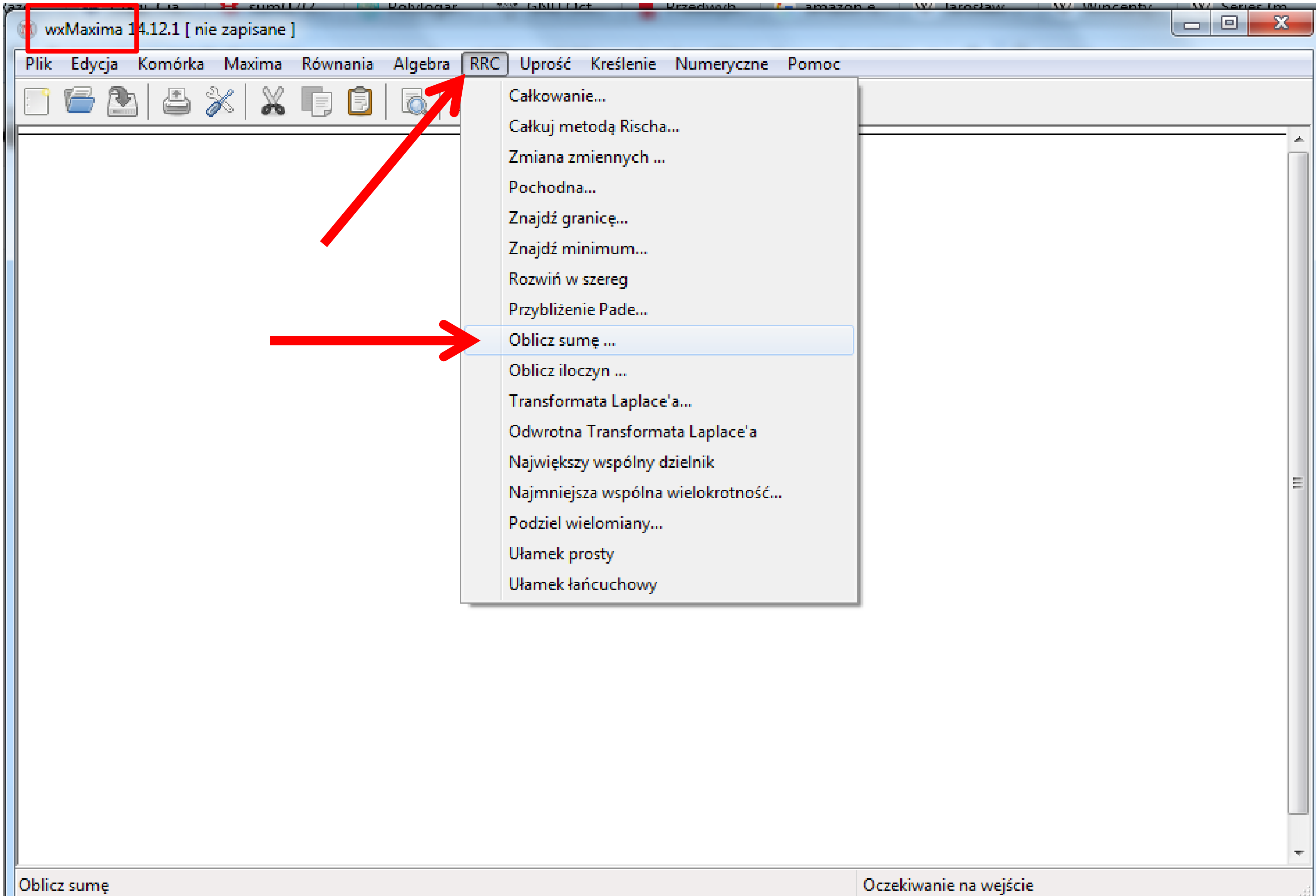
More digits

0.58224052646501250590265632015968010874419847480612642543434 7...

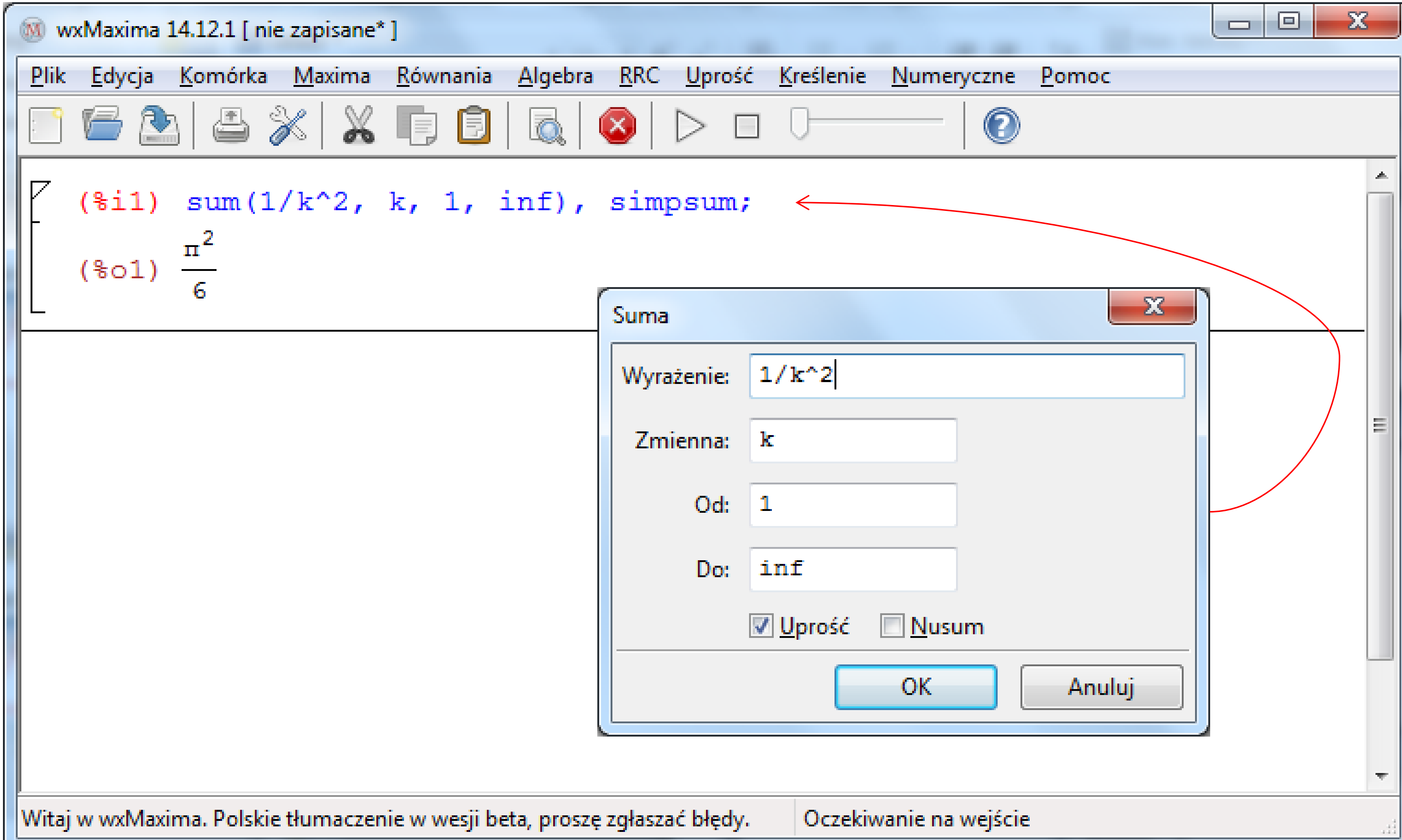
Convergence tests:

By the ratio test, the series converges.

Jak obliczać sumy szeregów?



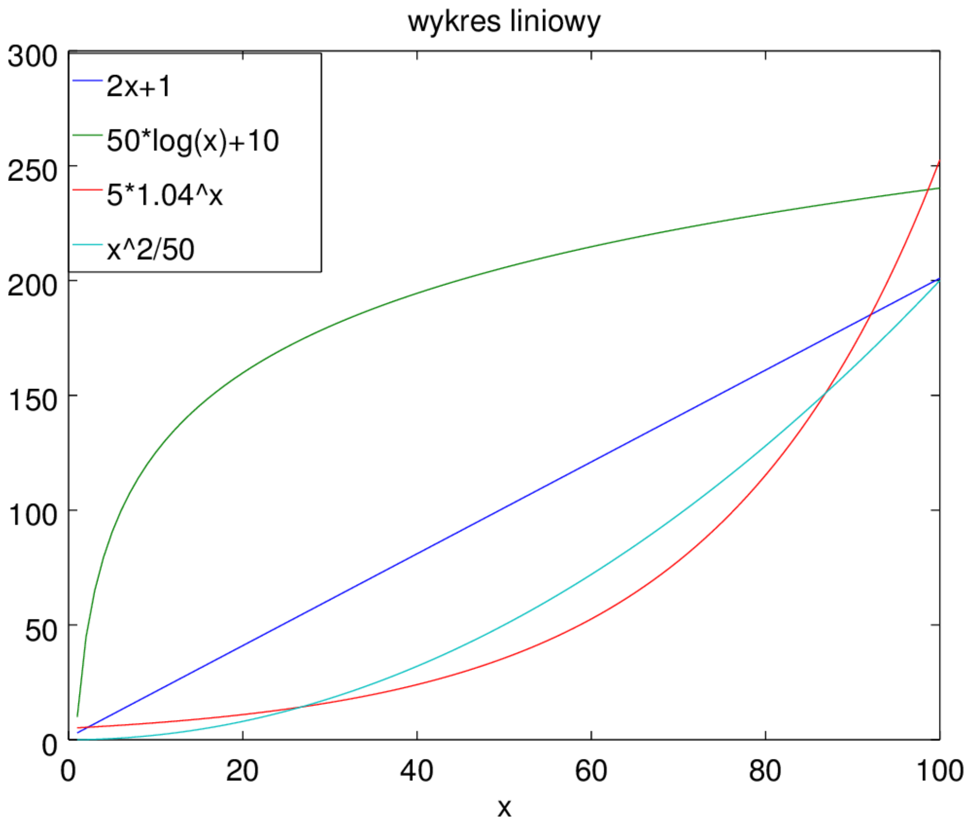
Jak obliczać sumy szeregów?



Szybkość zbieżności

Na zwykłym wykresie funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest <u>linią prostą</u>:

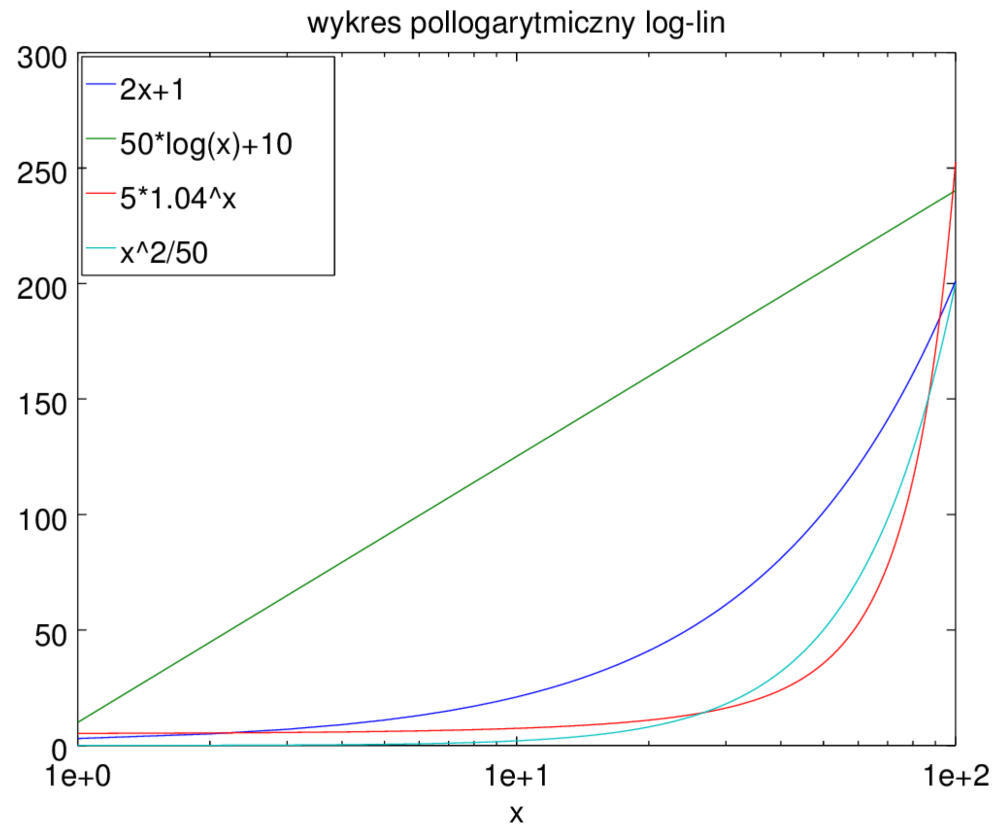
- $f(x) = \mathbf{50\ \log x + 10}$
- $f(x) = \mathbf{2x + 1}$
- $f(x) = \mathbf{5 \cdot 1.04^{x}}$
- $f(x) = \mathbf{\frac{x^2}{50}}$



Szybkość zbieżności

Na wykresie półlogarytmicznym **log-lin** funkcja $f(x) = \boldsymbol{a} \log \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ jest <u>linią prostą</u>:

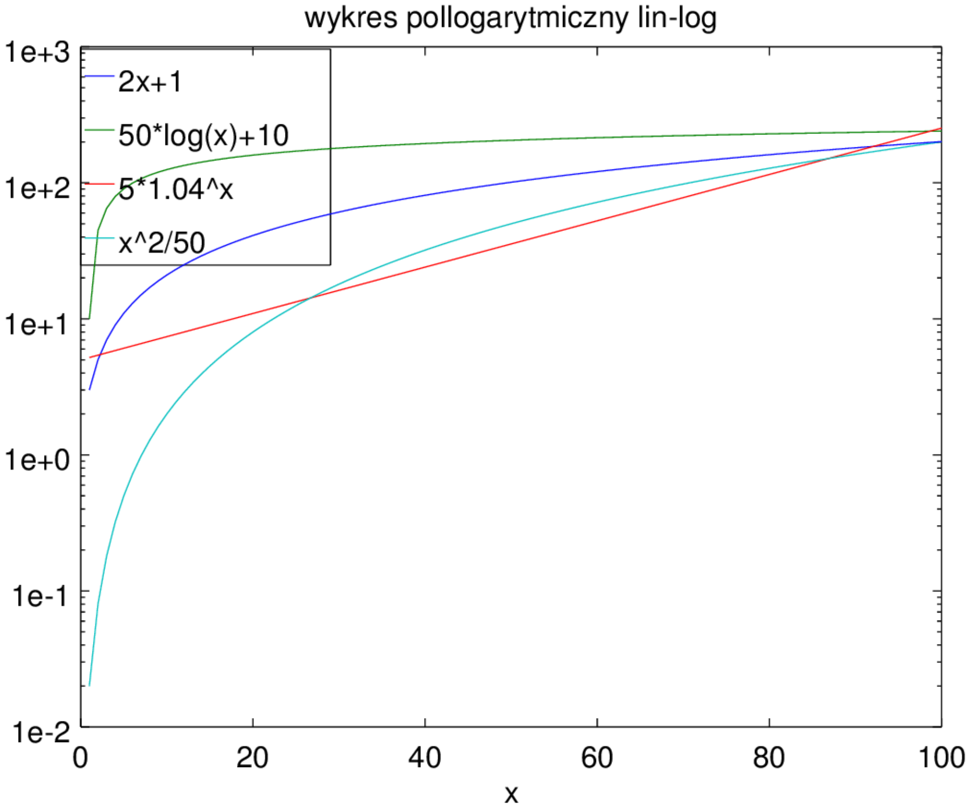
- $f(x) = \mathbf{50}\ \log \boldsymbol{x} + \mathbf{10}$
- $f(x) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$
- $f(x) = \mathbf{5} \cdot \mathbf{1.04}^{\boldsymbol{x}}$
- $f(x) = \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{50}}$



Szybkość zbieżności

Na wykresie półlogarytmicznym **lin-log** funkcja wykładnicza $f(x) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}$ jest <u>linią prostą</u>:

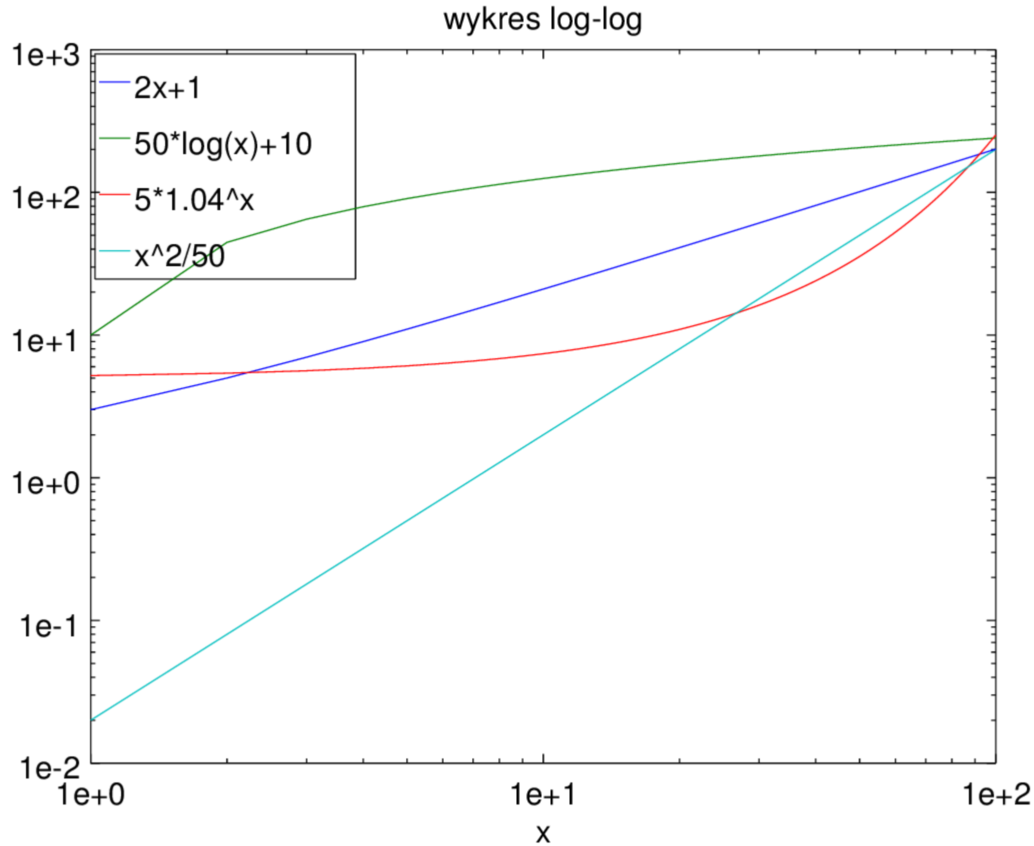
- $f(x) = \mathbf{50}\ \mathbf{log}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{10}$
- $f(x) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$
- $f(x) = \mathbf{5} \cdot \mathbf{1.04}^{\boldsymbol{x}}$
- $f(x) = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{50}}$



Szybkość zbieżności

Na wykresie podwójnie logarytmicznym (**log-log**) funkcja potęgowa $f(x) = \boldsymbol{ax^b}$ jest <u>linią prostą</u>:

- $f(x) = \mathbf{50\ \log \boldsymbol{x} + 10}$
- $f(x) = \mathbf{2\boldsymbol{x} + 1}$
- $f(x) = \mathbf{5 \cdot 1.04^{\boldsymbol{x}}}$
- $f(x) = \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{50}}$



Szybkość zbieżności

Reasumując, za pomocą zwykłych wykresów można **szacować**, czy **wiodący czynnik** w jakiejś zależności ma charakter:

- linowy, $f(x) = ax + b$,
- logarytmiczny, $f(x) = a \log x + b$,
- wykładniczy, $f(x) = b \cdot a^x$,
- potęgowy, $f(x) = ax^b$.

Wartości a i b można odczytać z parametrów linii prostej na wykresie danego rodzaju

Przykład

- Jak numerycznie uprawdopodobnić tezę, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

dla

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

?

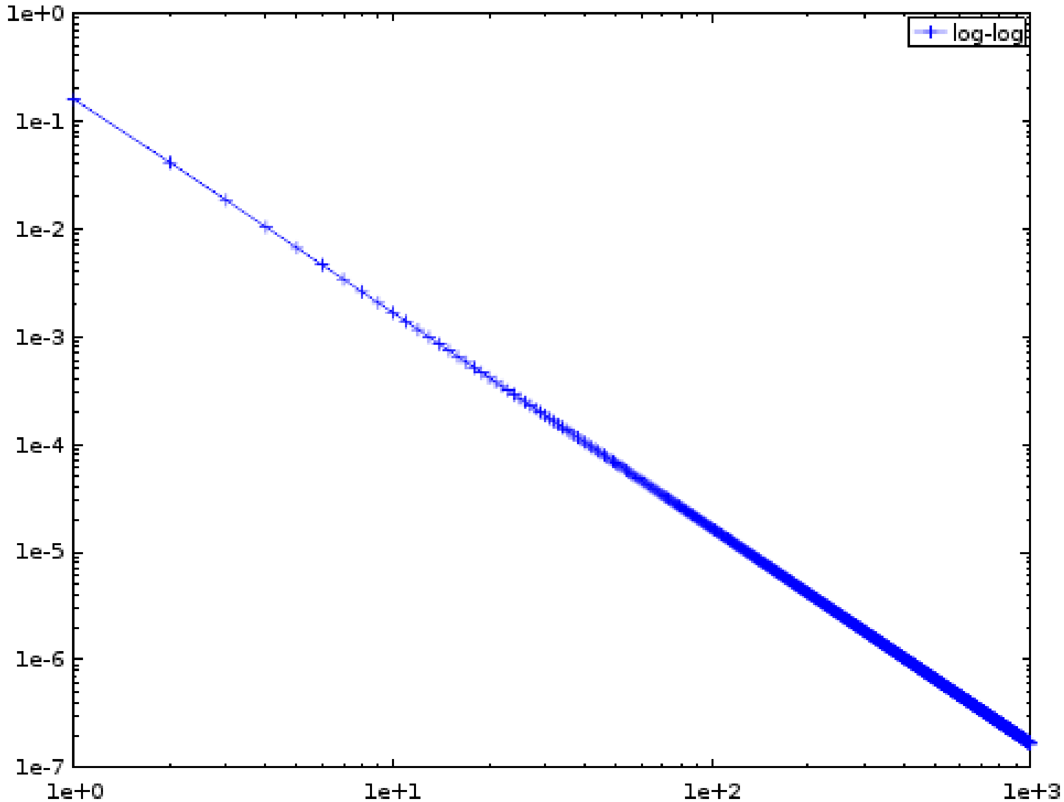
Przykład

- Niech $b_n = a_n - 1$ (czyli tworzymy ciąg, o którym sądzimy, że jest zbieżny do 0).
- Rysujemy b_n na rysunkach lin-lin, lin-log, log-lin i log-log, szukając linii prostej

```
>> n = 1:1000;
>> y = abs(sin(1./n)./(1./n) - 1); # |sin(1/n)/(1/n)-1|

>> plot (y, "+-;lin-lin;");
>> xlim([0,20]);
>> pause (2);

>> semilogx (y, "+-;log-lin;");
>> pause(2);

>> semilogy (y, "+-;lin-log;");
>> pause(2);

>> loglog (y, "+-;log-log;")
```

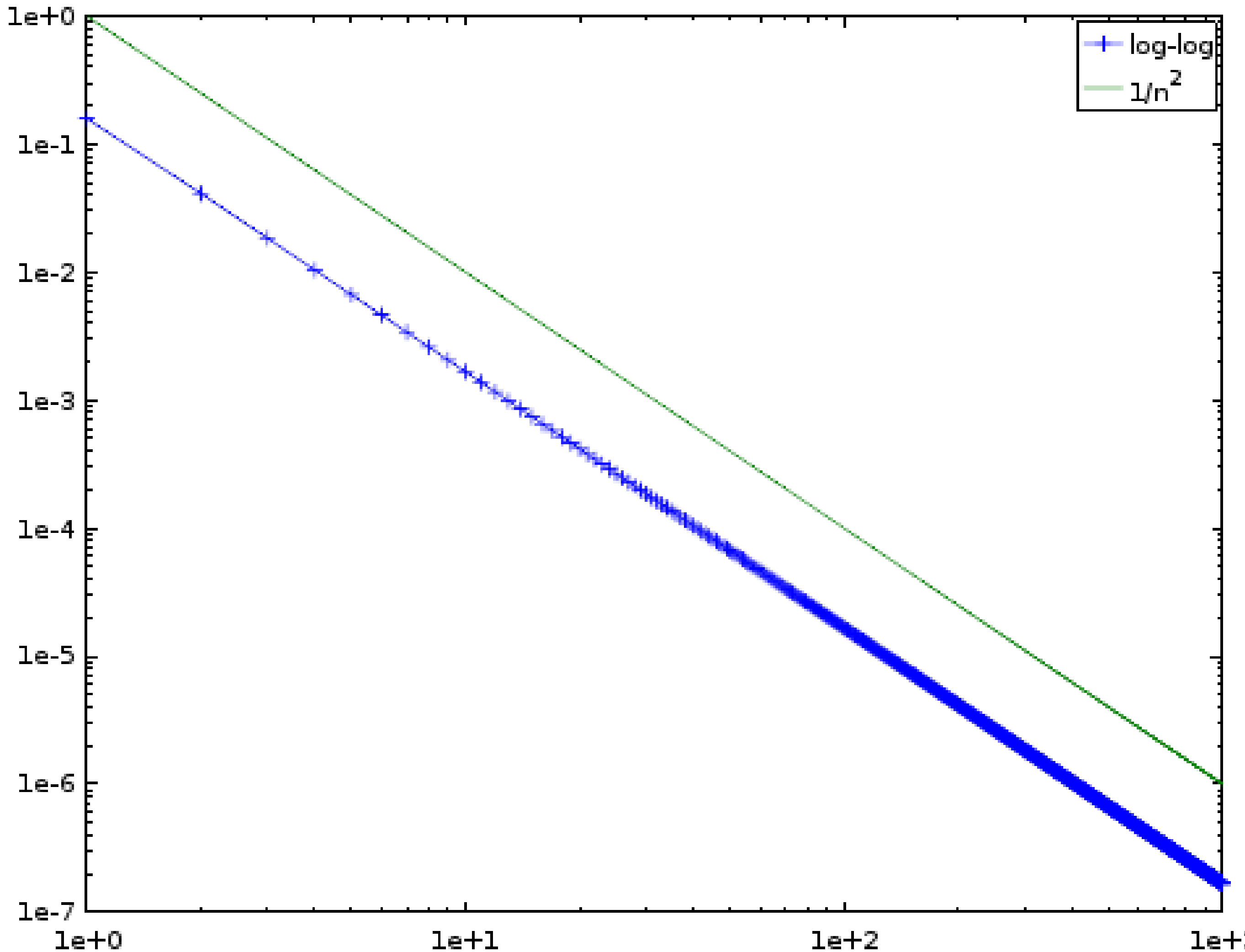
Wykres log-log…

- Czyli a_n zbliża się do 1 jak $\frac{A}{x^B}$. Ile może wynosić B?
- Wykres zanika 2 razy szybciej na osi y niż x, czyli $B \approx 2$. Próbujemy!



Wykres log-log…

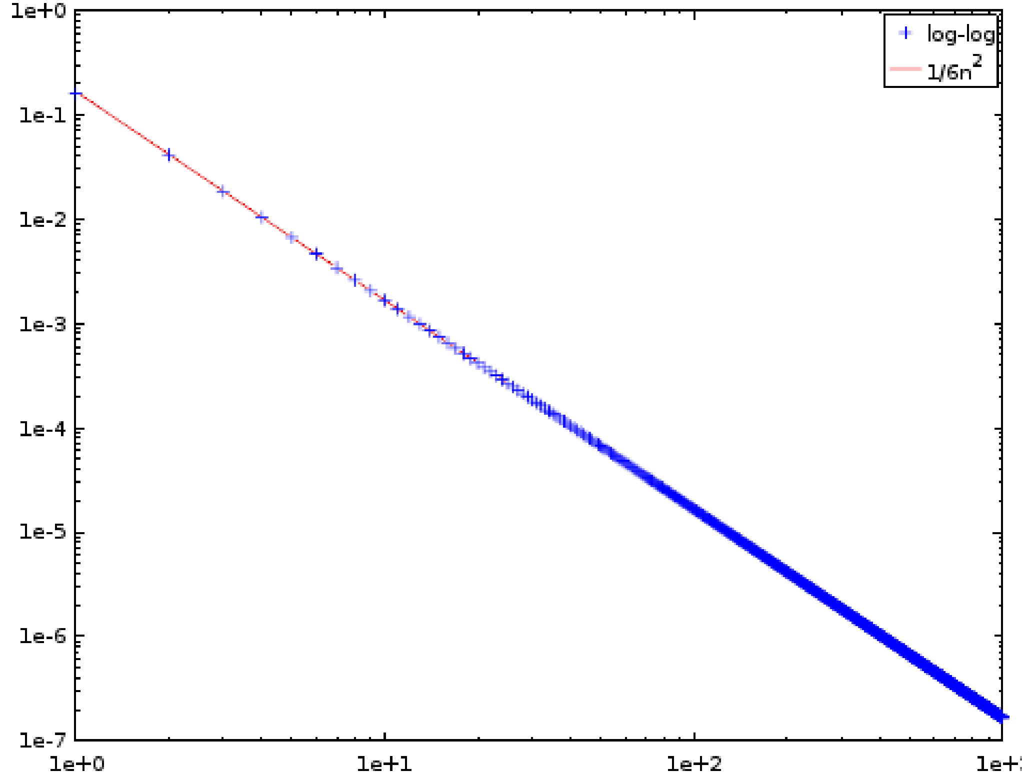
- Bingo!



Wykres log-log…

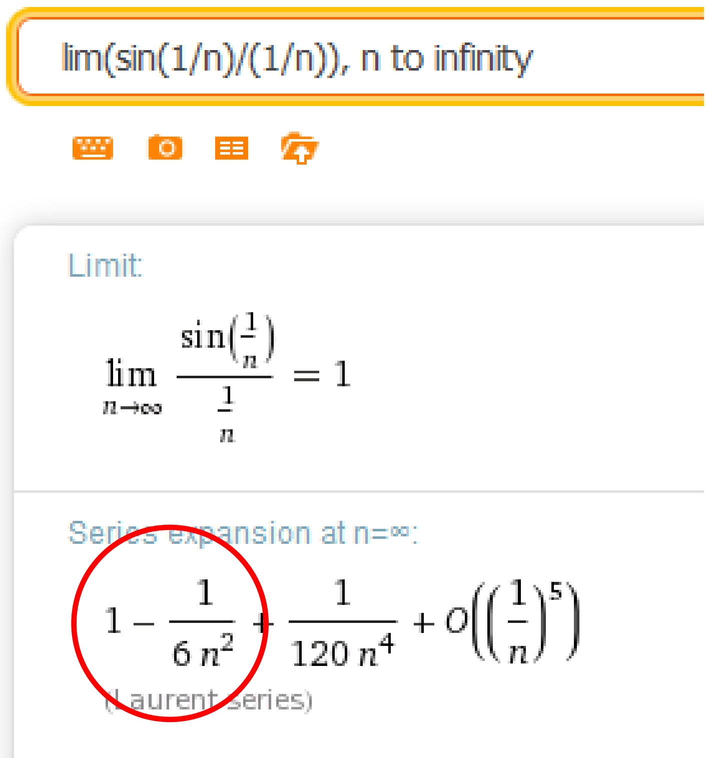
- Czyli $a_n \approx 1 - A/n^2$
- Można łatwo pokazać, że $\mathrm{A} \approx 1/6$
- Czyli

$$a_n \approx 1 - \frac{1}{6n^2}$$



Wykres log-log…

- $a_n \approx 1 - \frac{1}{6n^2}$
- to samo szybciej pokazuje Wolfram Alpha:
- ale pokazany powyżej sposób badania ciągów jest bardziej uniwersalny, można go stosować m.in. do „żywych danych” doświadczalnych



Nie wszystko policzysz gotowymi programami

sum((-1)^n/log(n))

Assuming "log" is the natural logarithm | Use the base 10 loga

Input interpretation:

$$\sum \frac{(-1)^n}{\log(n)}$$

Approximated sum:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)} \approx \underline{1.01862} - 2.45866 \times 10^{-13}\, i$$

sum((-1)^n/log(n)), n from 2 to infinity

Assuming "log" is the natural logarithm | Use the base 10 logarithm instea

Infinite sum:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n)} = \underline{0.9243}$$

Convergence tests:

By the alternating series test, the series converges.

Dygresja na koniec

- Tak jak definiuje się nieskończone sumy, tak też definiuje się **nieskończone iloczyny**. Słynne przykłady:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots=\frac{2}{\pi}$$