Uniwersytet Wrocławski

Funkcje

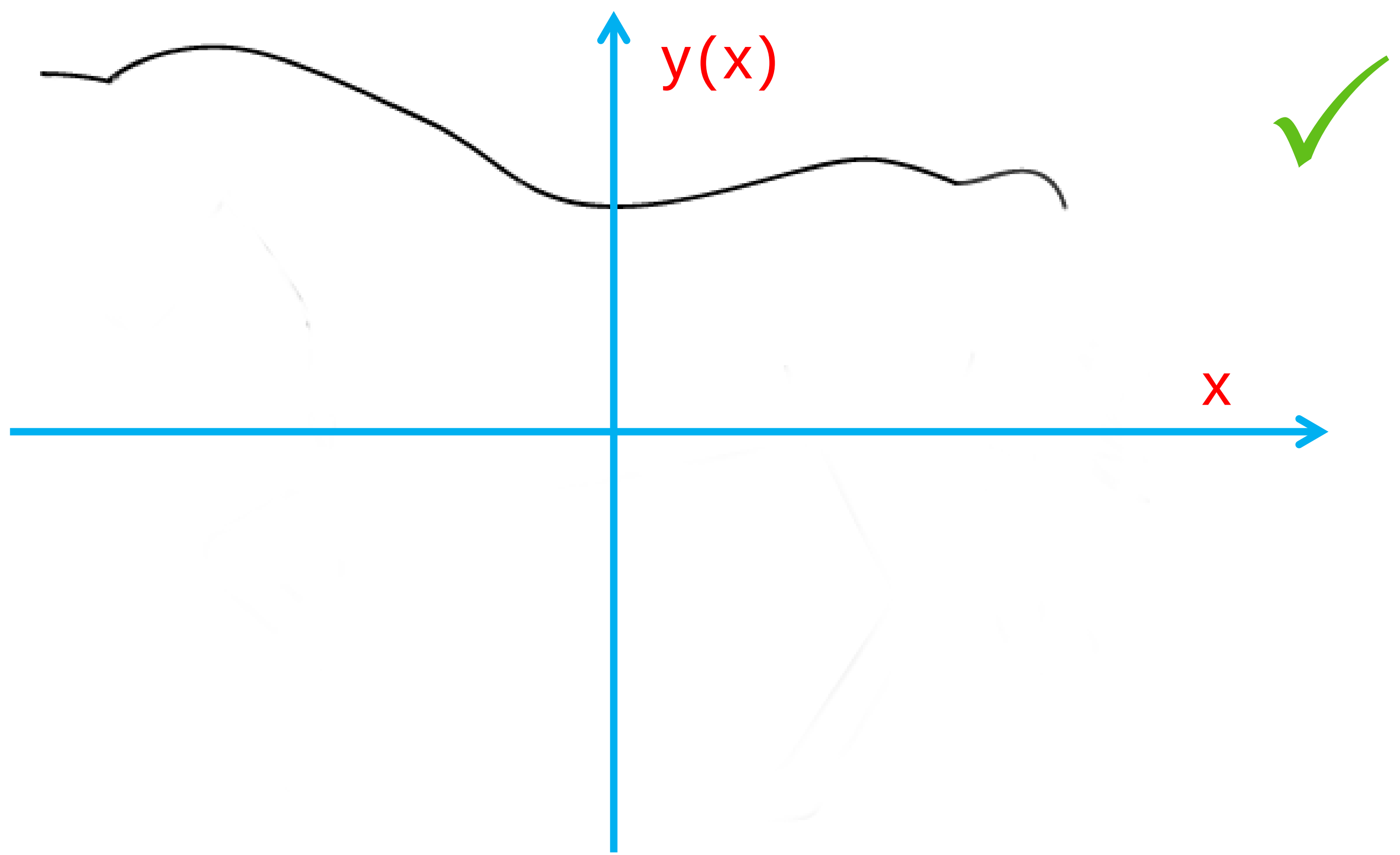
Część pierwsza

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2015

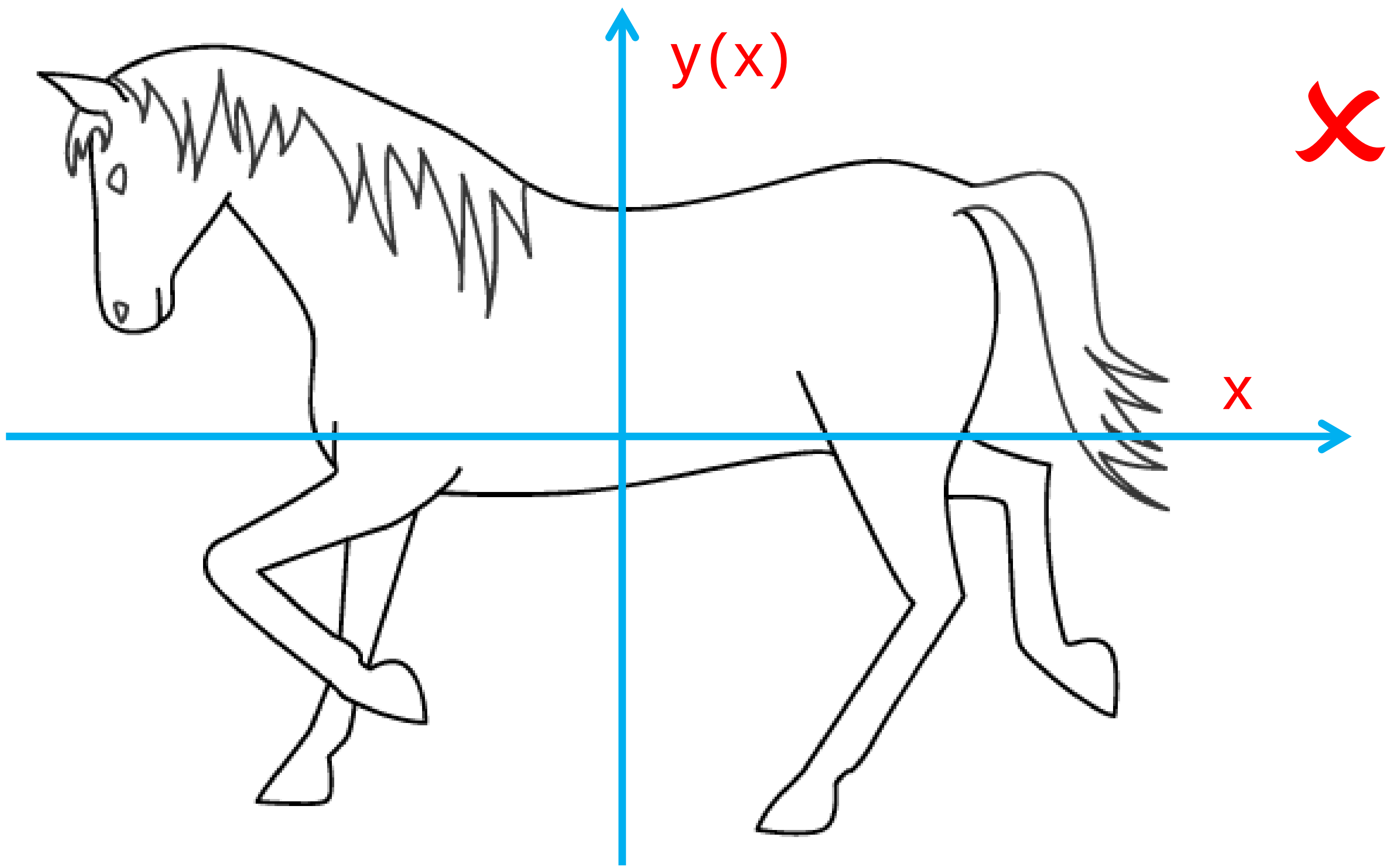
FUNKCYA

~~KON~~ iáká ieſt, káżdy widźi.



FUNKCYA

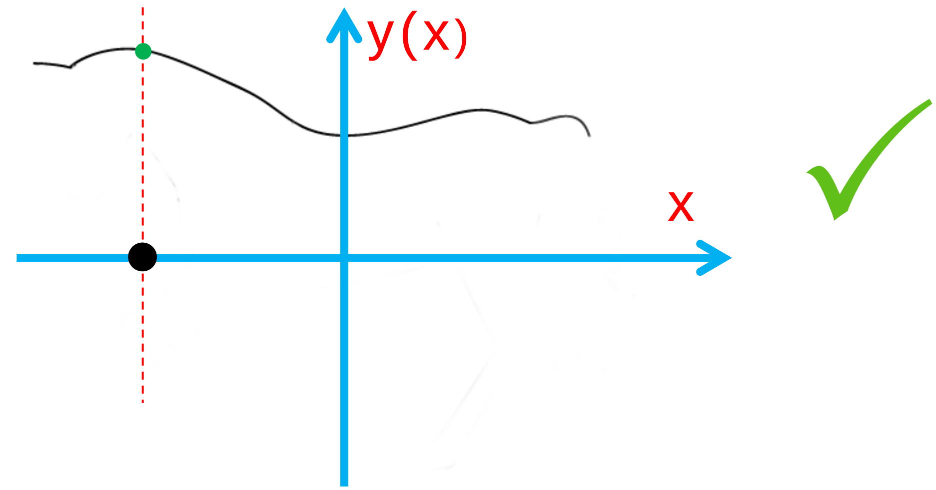
~~KON~~ iáká ieſt, káżdy widźi.

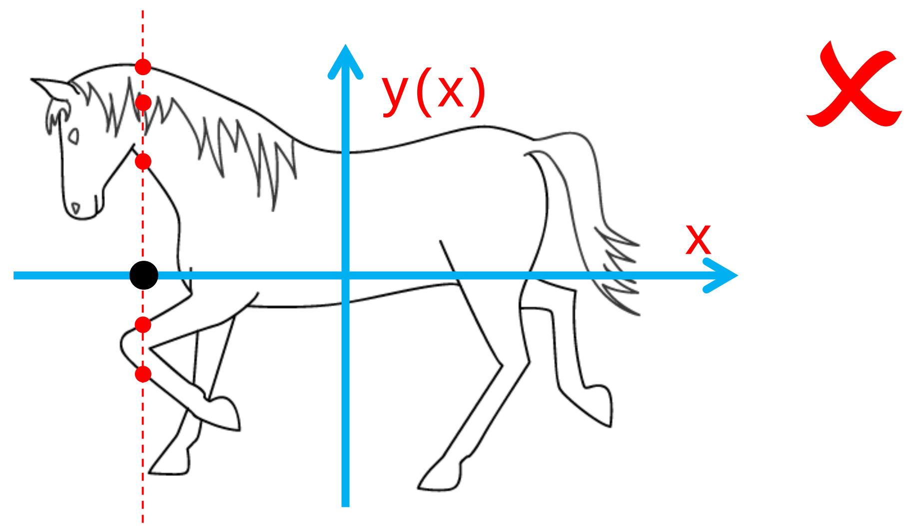


FUNKCYA

~~KOŃ~~ iáká ieſt, káżdy widźi.

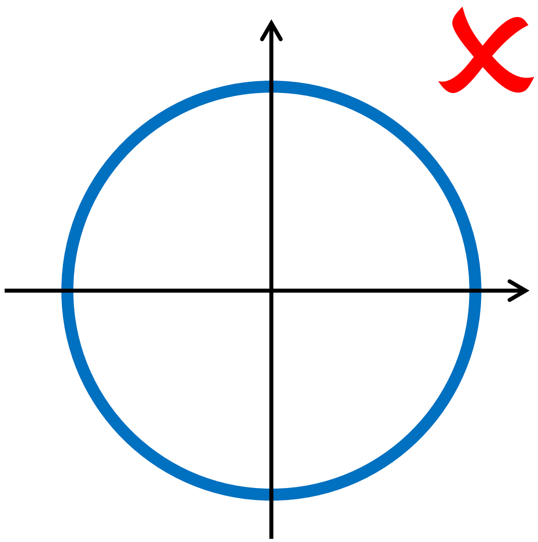
- Funkcja dla każdego argumentu ma określoną dokładnie jedną wartość





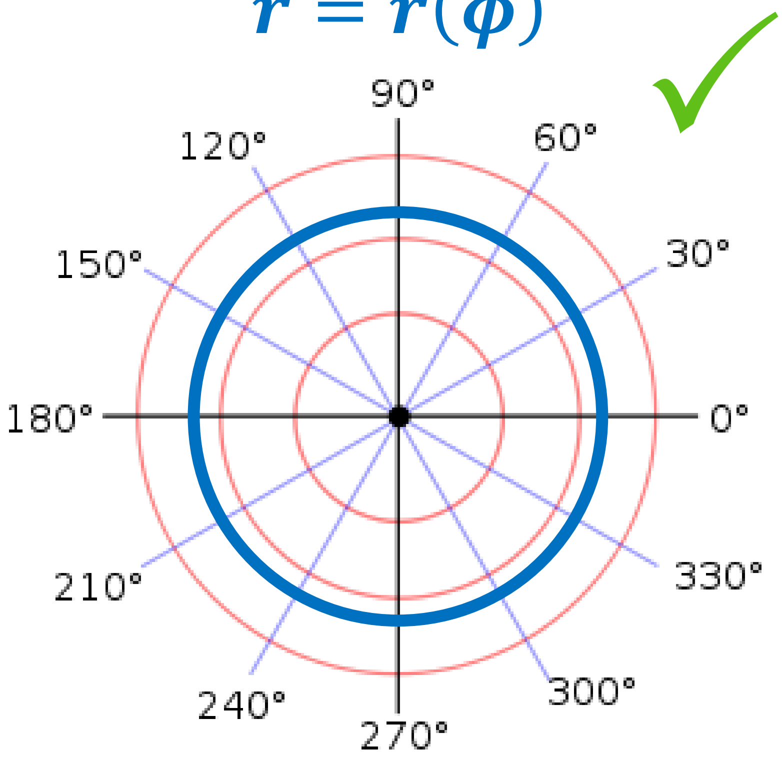
Uwaga na układ współrzędnych!

$$y = y(x)$$



Współrzędne kartezjańskie

$$r = r(\phi)$$



Współrzędne biegunowe

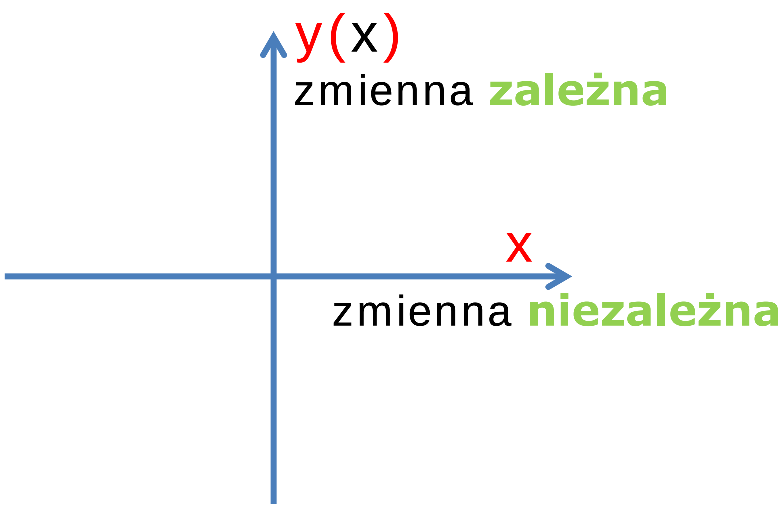
Definicja

- Funkcja ze zbioru X w zbiór Y
  jest to przyporządkowanie
  każdemu elementowi zbioru X
  <u>dokładnie jednego</u> elementu zbioru Y

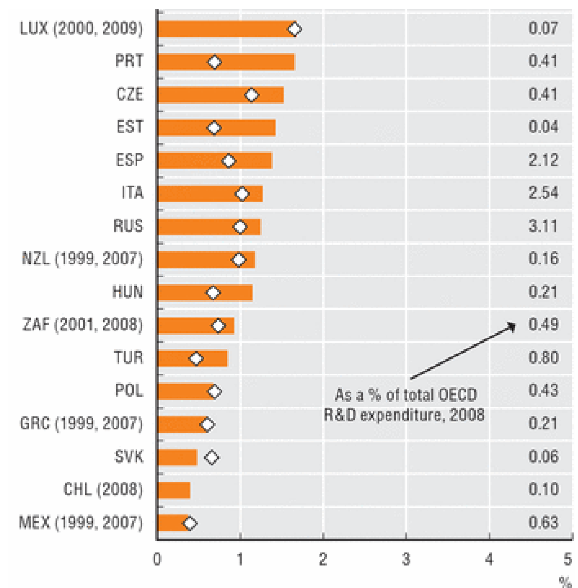
$$f: X \to Y$$
$$f: X \ni x \mapsto y \in Y$$

Funkcja służy do…

- Badania, jak zmiana wartości jednej wielkości (**zmiennej niezależnej**) wpływa na zmianę innej wielkości (**zmiennej zależnej**)



Typowy wykres



czasami: zmienna niezależna na „osi” pionowej

Dygresja – wzory fizyczne

- Który zapis prawa Newtona jest zalecany?

$$a = \frac{F}{m}$$

$$F = a \cdot m$$

$$m = \frac{F}{a}$$

Dygresja – wzory fizyczne

- Który zapis prawa Newtona jest zalecany?

$$\boxed{a = \frac{F}{m}}$$

przyczyna
(zmienna niezależna)

skutek
(zmienna zależna)

parametr
(wartość stała)

Słowniczek

- Zakres zmienności zmiennej zależnej to **dziedzina funkcji** (inaczej: *zbiór argumentów funkcji*)

$$A \xrightarrow{f} B$$

- Zbiór, do którego należą wartości funkcji, to jej **przeciwdziedzina** (inaczej: *zbiór wartości funkcji*).
- Jeśli $y = f(x)$, to x jest *argumentem*, a y jest *wartością* funkcji f (w *punkcie* x)

Inne nazwy

- Funkcja
- Przekształcenie
- Odwzorowanie
- Transformacja

$\approx$ to samo znaczenie

- Operator (wektor lub funkcja $\to$ wektor)
- Funkcjonał (wektor lub funkcja $\to$ skalar)

z tymi terminami też się spotkasz

…

- iniekcja, bijekcja, suriekcja, homeomorfizm, etc.

terminologia fachowa

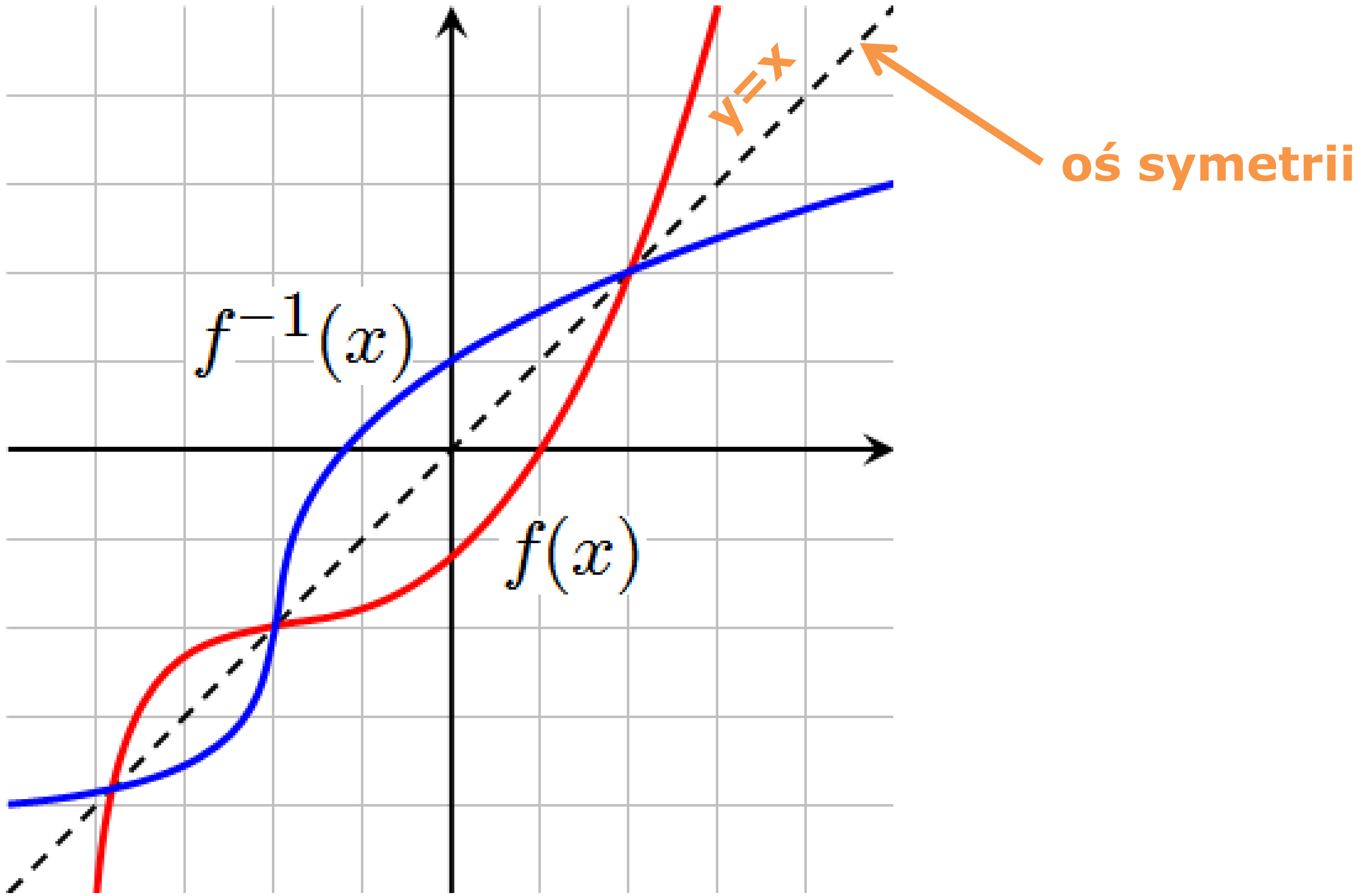
Funkcja odwrotna

- Jeśli $y = y(x)$, to $x = x(y)$ jest **funkcją odwrotną** do $y(x)$.
- Funkcję odwrotną do f oznacza się f^{-1}
- Przykład:

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Wykres funkcji odwrotnej

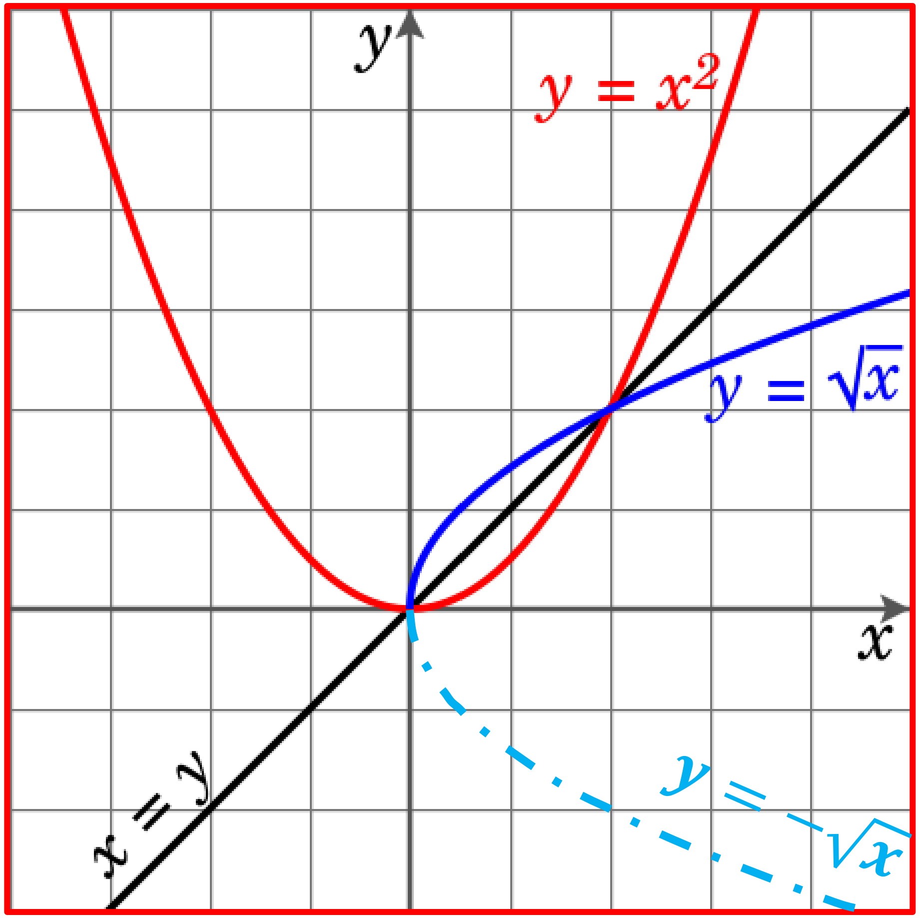


$f^{-1}(x)$ to nie jest $\dfrac{1}{f(x)}$!

funkcja odwrotna

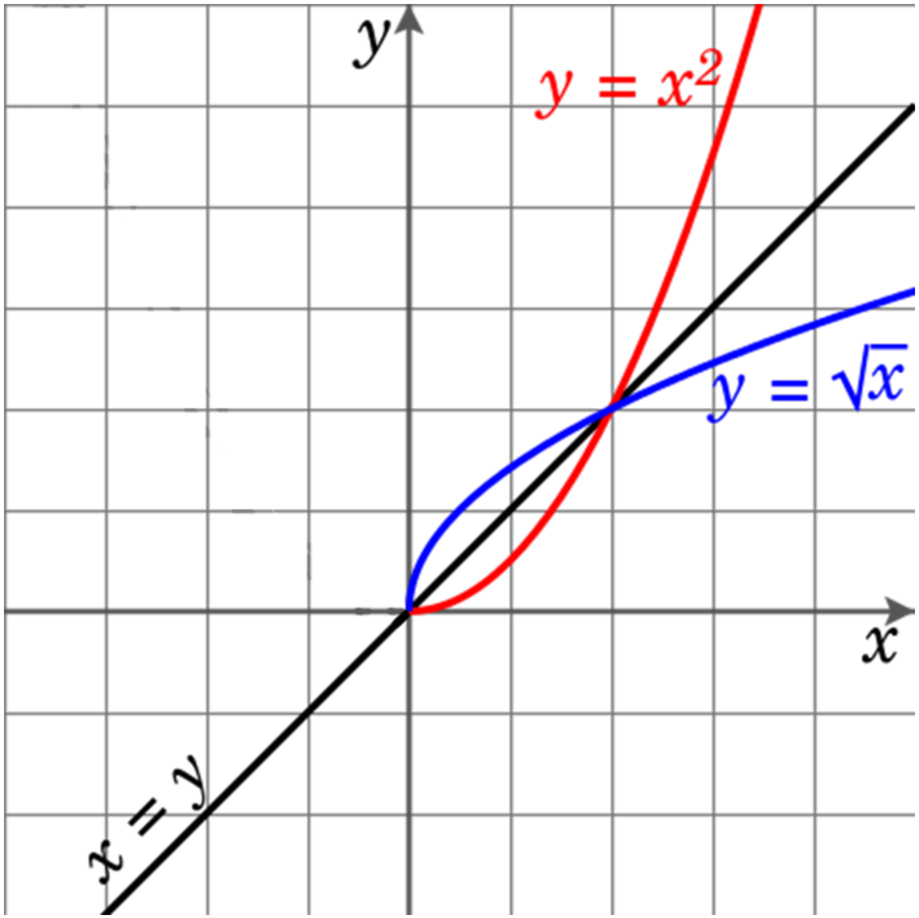
odwrotność
wartości funkcji
w konkretnym
punkcie x

Nie każda funkcja ma funkcję odwrotną

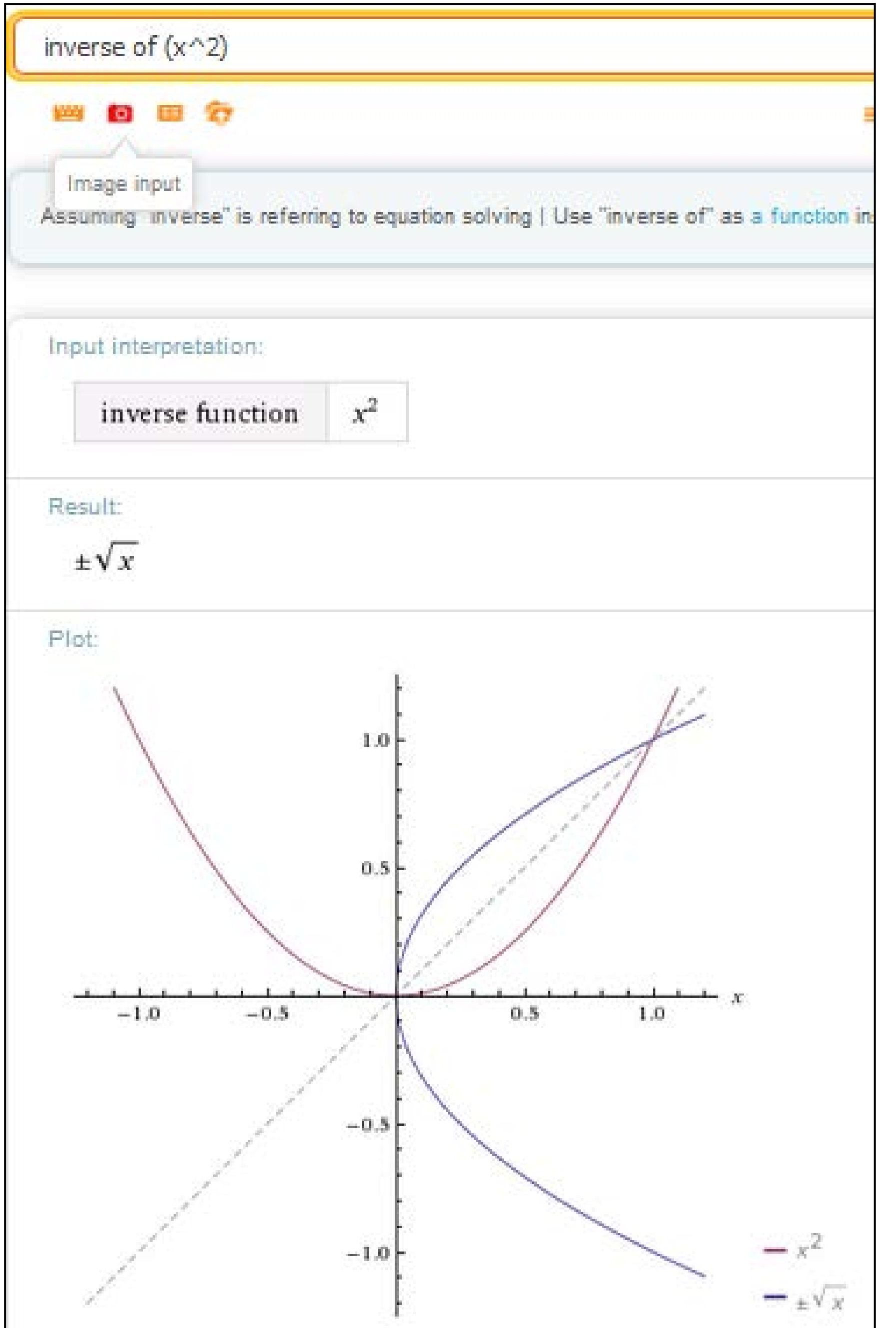


- $y = x^2, x \in R$ nie ma funkcji odwrotnej, bo **nie jest** **różnowartościowa**

Nie każda funkcja ma funkcję odwrotną



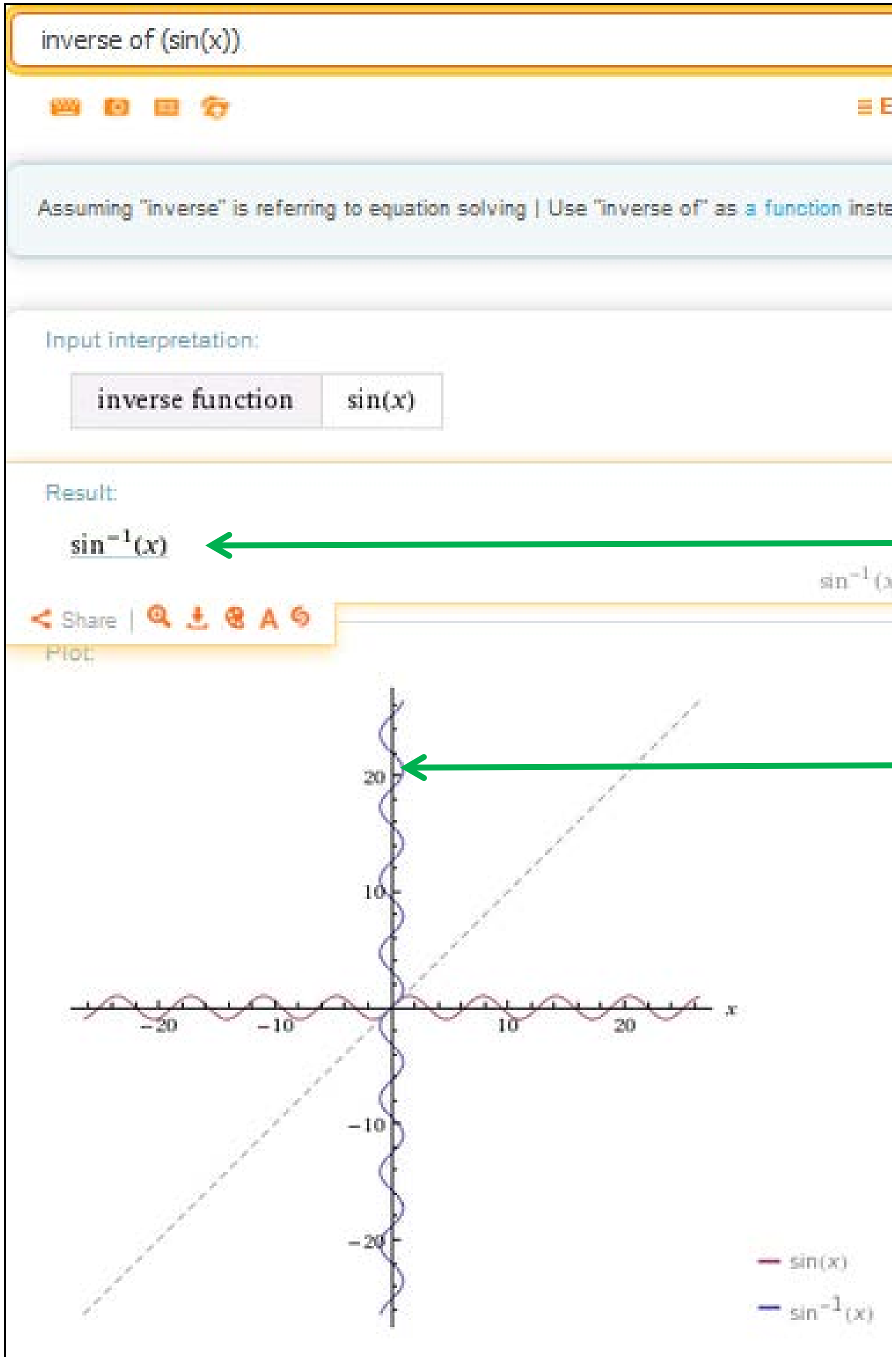
- $y = x^2, x \in \boldsymbol{R}$
  nie ma funkcji odwrotnej,
  bo **nie jest różnowartościowa**
- $y = x^2, x \in \boldsymbol{R}_+$
  jest różnowartościowa
  i ma funkcję odwrotną
  $y = \sqrt{x}$



Przykład

- Do interpretacji wyników z programu komputerowego potrzebna jest pewna znajomość rzeczy

Ooops!



prawda, choć bezużyteczna

Czy to jest wykres funkcji?

- Użyty algorytm chyba jest zbyt prosty…

Złożenie (superpozycja) funkcji

$$g\colon A \to B; \;\; f\colon B \to C$$
$$\Rightarrow$$
$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)\colon A \to C$$

- $h(x)$ jest **złożeniem funkcji** f i g.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Złożenie (superpozycja) funkcji

- Przykład:

$$g(x) = 2x + 1$$
$$f(x) = x^2$$

$$f\big(g(x)\big) = [g(x)]^2$$
$$= (2x+1)(2x+1)$$
$$= 4x^2 + 4x + 1$$

$$1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 9$$

$$g\big(f(x)\big) = 2f(x) + 1$$
$$= 2x^2 + 1$$

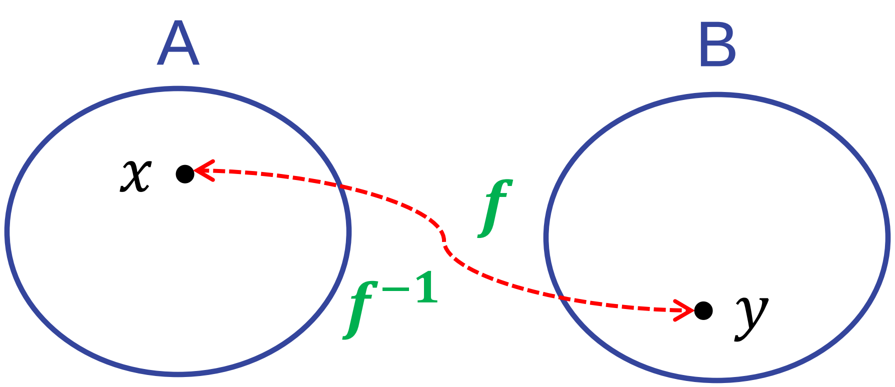
$$1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} 3$$

Złożenie (superpozycja) funkcji

- Złożenie funkcji i funkcji do niej odwrotnej to funkcja identycznościowa:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$



FUNKCJE ELEMENTARNE

Funkcje elementarne

Nazwa	Definicja	Przykład
Wielomiany	$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	$y = 4x^2 - 3x + 12$
Funkcje wymierne	$y = \frac{\text{wielomian}_1}{\text{wielomian}_2}$	$y = \frac{4x^2 - 3x + 12}{3x - 7}, x \neq \frac{7}{3}$
Funkcja potęgowa	$y = x^a, \quad a \in R$	$y = x^{3.14}$
Funkcja wykładnicza	$y = a^x, \qquad a > 0, a \neq 1$	$y = e^x$
Logarytmy	$y = \log_a(x), \qquad a > 0, a \neq 1, x \in R_+$	$y = \ln(x)$
Funkcje trygonometryczne	$y = \sin(x), \qquad y = \cos(x),$ $y = \mathrm{tg}(x), \qquad y = \mathrm{ctg}(x)$	$y = \sin(\mathrm{x})$
Funkcje hiperboliczne	$y = \sinh(\mathrm{x}), \qquad y = \cosh(x),$ $y = \mathrm{tgh}(x), \qquad y = \mathrm{ctgh}(x)$	$y = \sinh(\mathrm{x})$
Funkcje cyklometryczne (kołowe)	$y = \mathrm{arc}\sin(x), \qquad y = \mathrm{arc}\cos(x),$ $y = \mathrm{arc\,tg}(x), \qquad y = \mathrm{arc\,ctg}(x)$	$y = \mathrm{arc}\sin(x)$

Funkcje elementarne

- **Funkcje elementarne** to zbiór wszystkich funkcji, jakie wymieniono na poprzednim slajdzie, oraz funkcji, które można z nich otrzymać za pośrednictwem **czterech działań arytmetycznych (+, -, *, /) oraz operacji złożenia funkcji**.
- Przykład:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - e^x}}{\log_2 x + \sin(x \cdot \cos(3x+1))}$$

Wielomiany

$$y(x) = a_n x^{\boldsymbol{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- Suma, różnica i iloczyn wielomianów jest wielomianem
- Liczbę $\boldsymbol{n} \in N_0$ nazywamy **stopniem wielomianu**
- Liczby $a_n, \dots, a_1, a_0$ to ***współczynniki wielomianu***
- a_0 to ***wyraz wolny***
- $a_1 x$ to ***wyraz liniowy*** (a a_1 to współczynnik liniowy)
- $a_2 x^2$ to ***wyraz kwadratowy***
- $a_n x^n$ to ***wyraz wiodący*** (lub: ***najstarszy***)

Wielomiany

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

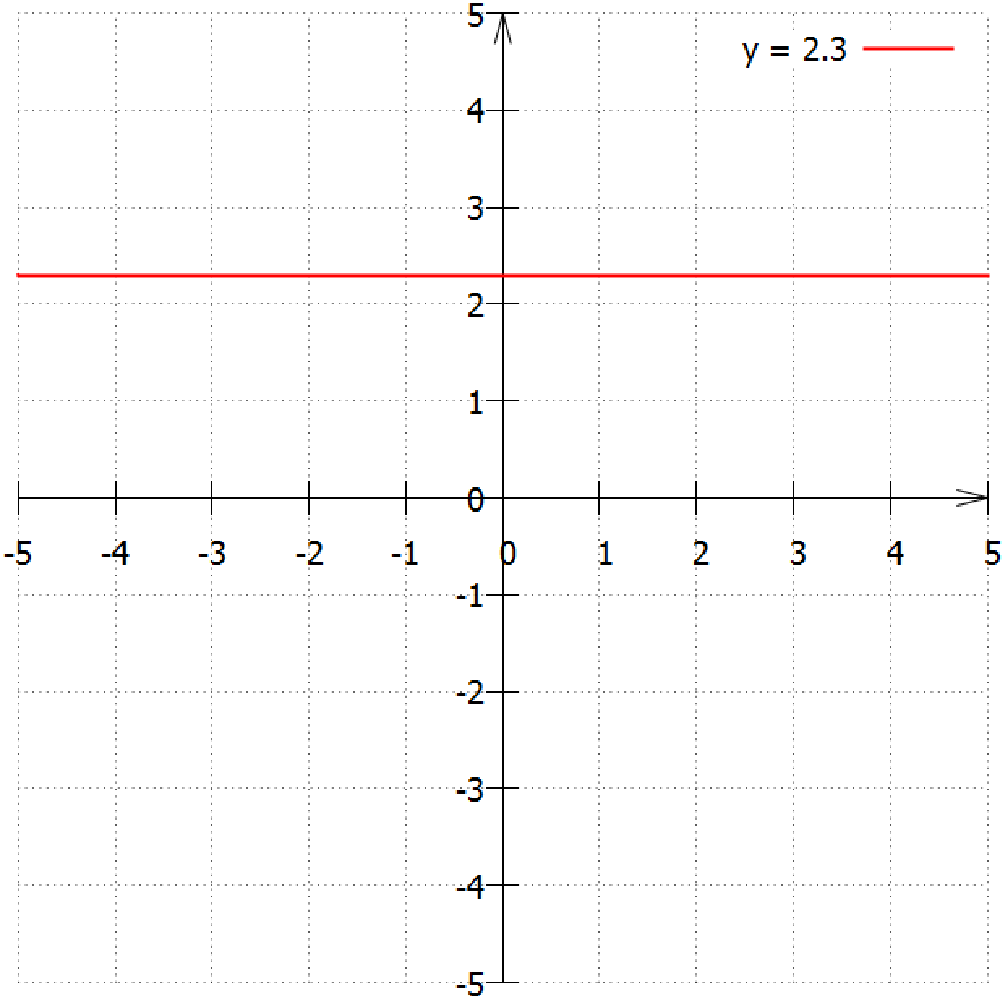
lub (postać iloczynowa):

$$y(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

- Nie każdy wielomian można zapisać w postaci iloczynowej
- Zapis mieszany, np.

$$y(x) = 2(x - 1)^3(x - 2)(x - 4) + 3$$

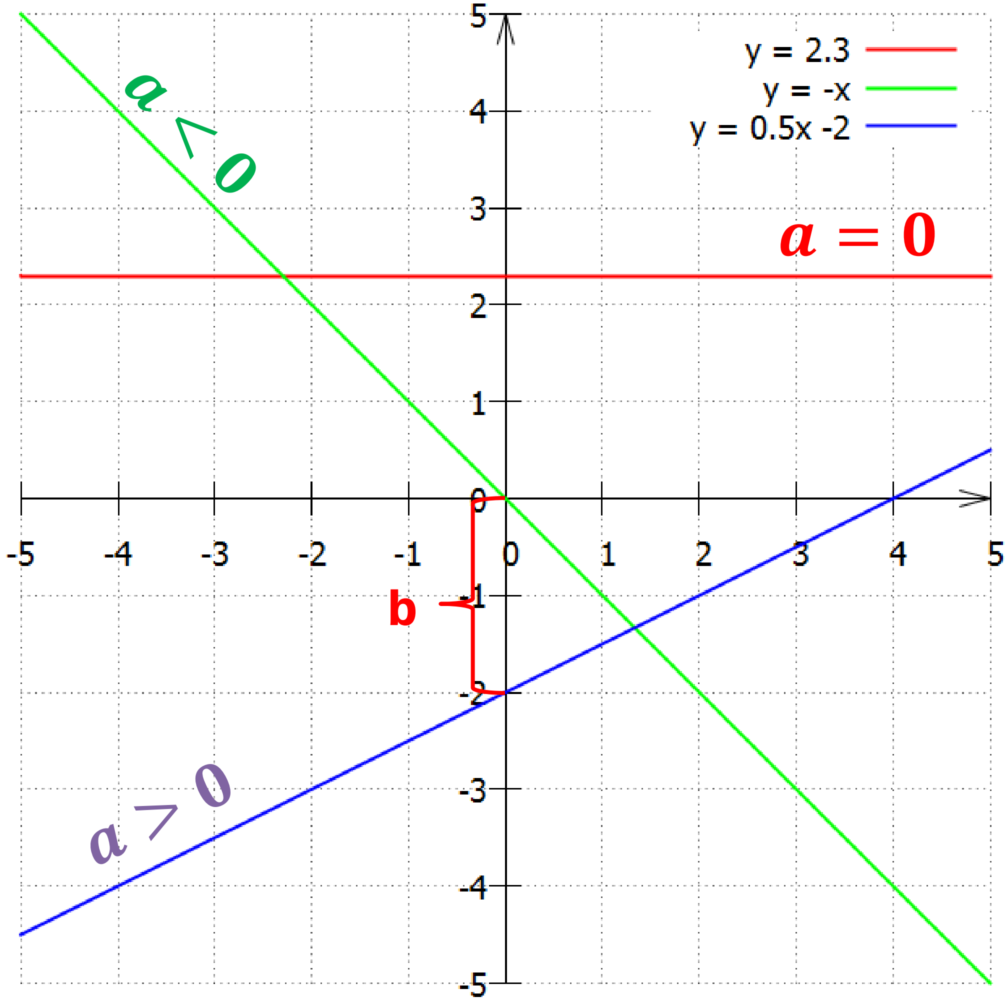
Wielomiany



- Stopień 0:

$$y = c$$

Wielomiany



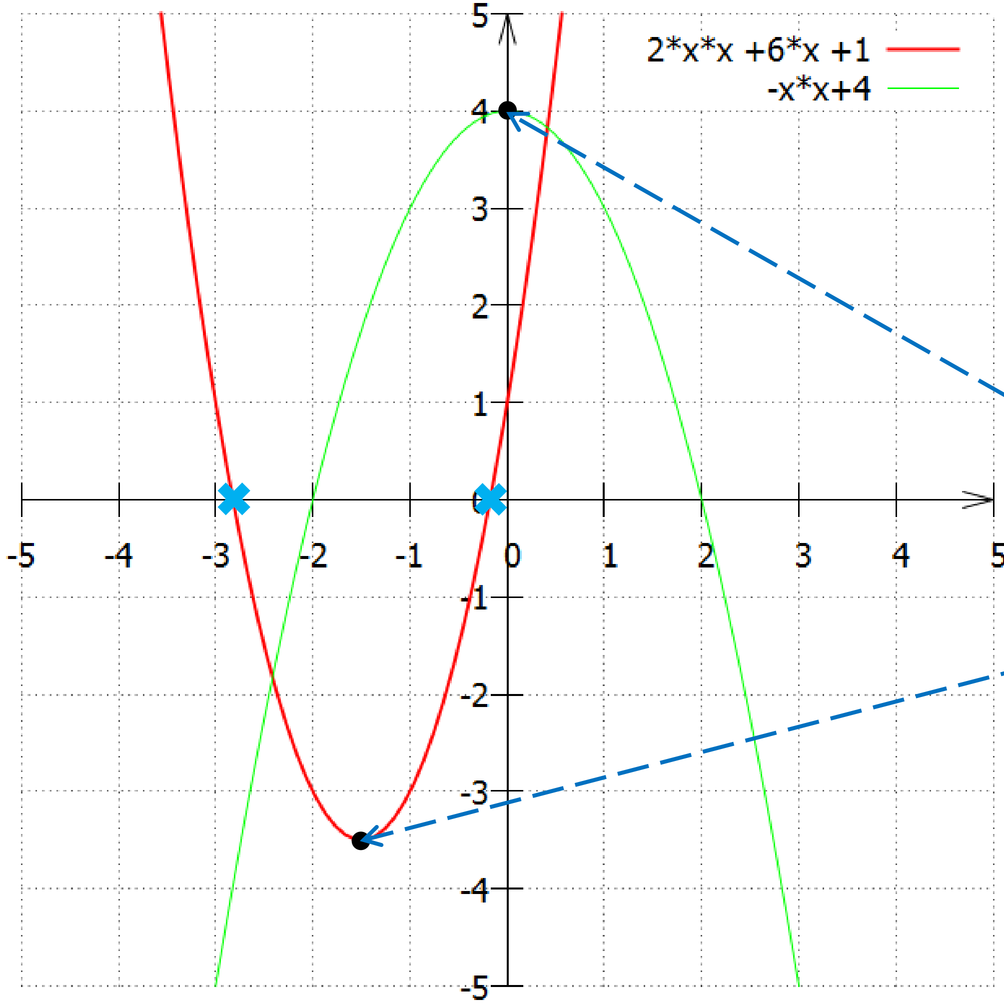
- Stopień 1:

$$y = ax + b$$

a: nachylenie prostej

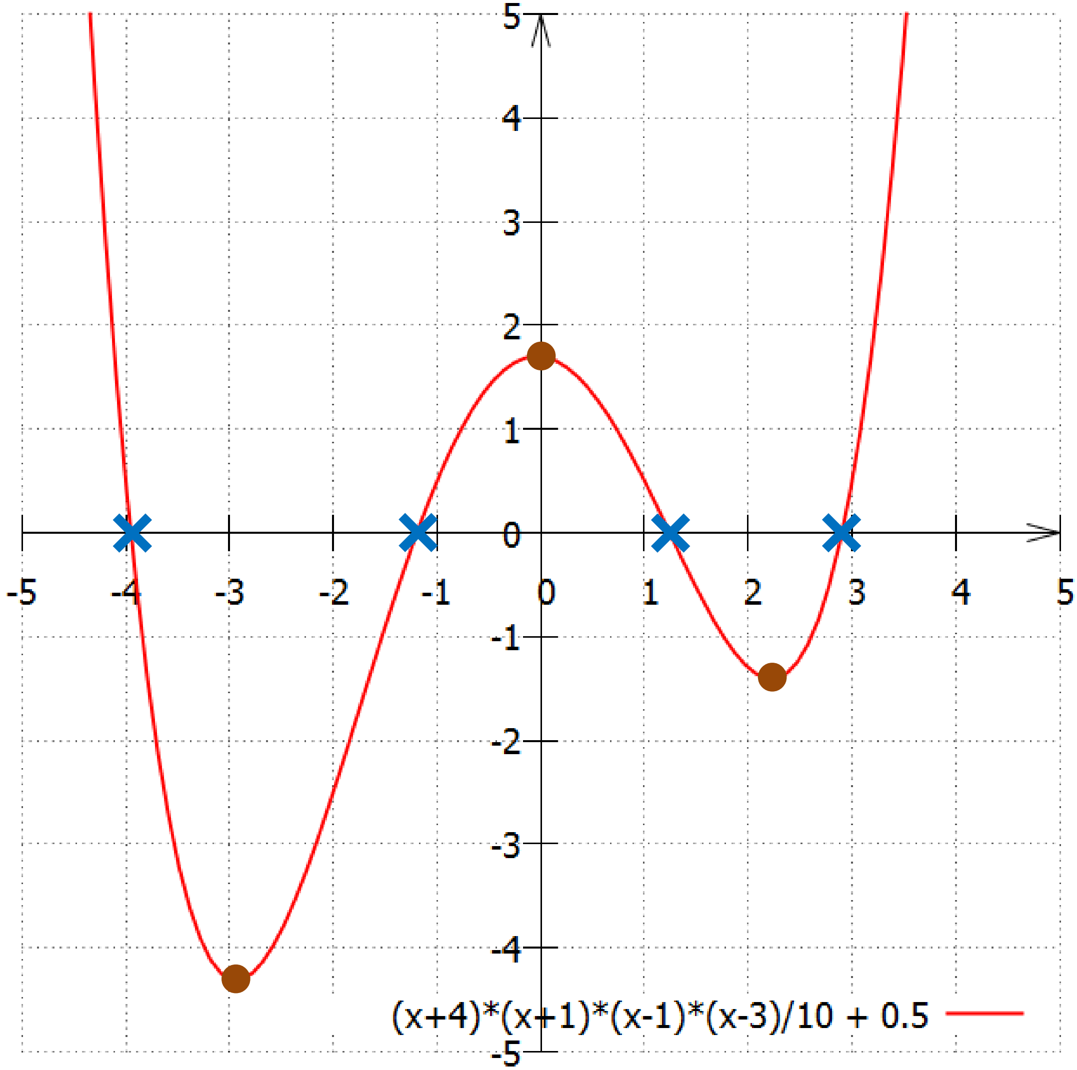
b: punkt przecięcia osi „y”

Wielomiany



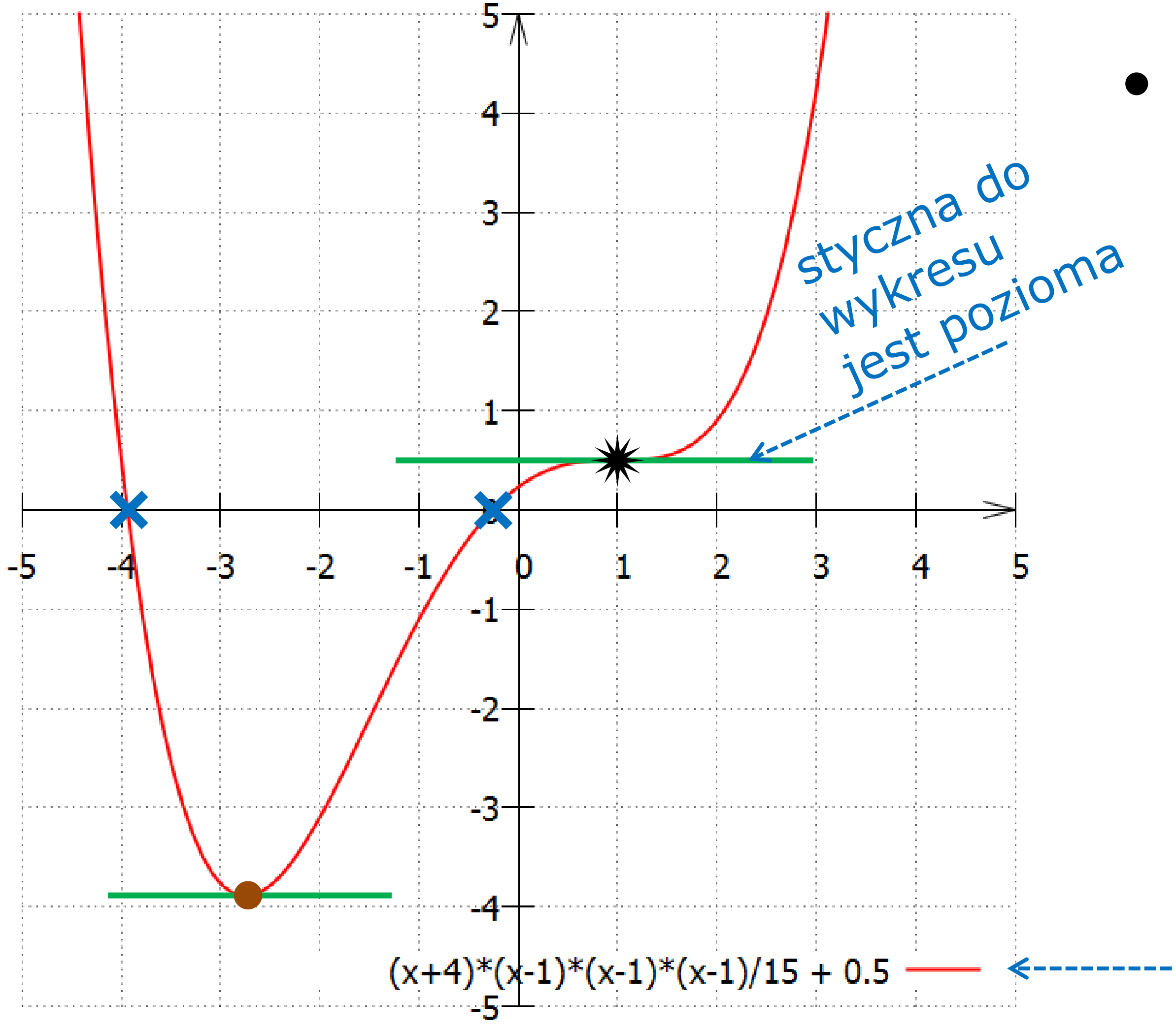
- Stopień 2:
  $y = ax^2 + bx + c$
- Dokładnie jedno ***ekstremum***:
  - $a < 0 \Rightarrow$ maksimum
  - $a > 0 \Rightarrow$ minimum
- ***Parabola***
- 0,1 lub 2 **miejsca zerowe** (✖) (**pierwiastki**)

Wielomiany



- Wielomian 4. stopnia może mieć <u>maksymalnie</u> 3 ekstrema (●) i 4 miejsca zerowe (✕)

Wielomiany



- Wielomian stopnia > 2 może mieć punkty przegięcia (✷)

Zasadnicze twierdzenie algebry(*)

- Każdy wielomian rzeczywisty stopnia $n > 0$ ma <u>dokładnie n pierwiastków</u> (= miejsc zerowych), które nie muszą być wzajemnie różne i <u>mogą być zespolone</u>

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ są miejscami zerowymi $y(x)$

- (*)Nie musisz rozumieć tego twierdzenia, skoro nie wiesz jeszcze, co to są liczby zespolone ☺

Wnioski

- **Wielomian rzeczywisty stopnia $\boldsymbol{n > 0}$ ma co najwyżej $\boldsymbol{n}$ pierwiastków rzeczywistych**
- Wielomian rzeczywisty nieparzystego stopnia $n > 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty
- Każdy wielomian rzeczywisty można zapisać jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej 2.

Wnioski – c.d.

- Jeżeli wielomian

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ma pierwiastki rzeczywiste

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \qquad k \leq n$$

to

$$y(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k) W_m(x)$$

gdzie $W_m(x)$ jest wielomianem stopnia $m = n - k$

Wnioski – c.d.

- Jeżeli wielomian

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ma pierwiastki rzeczywiste

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \qquad k \le n$$

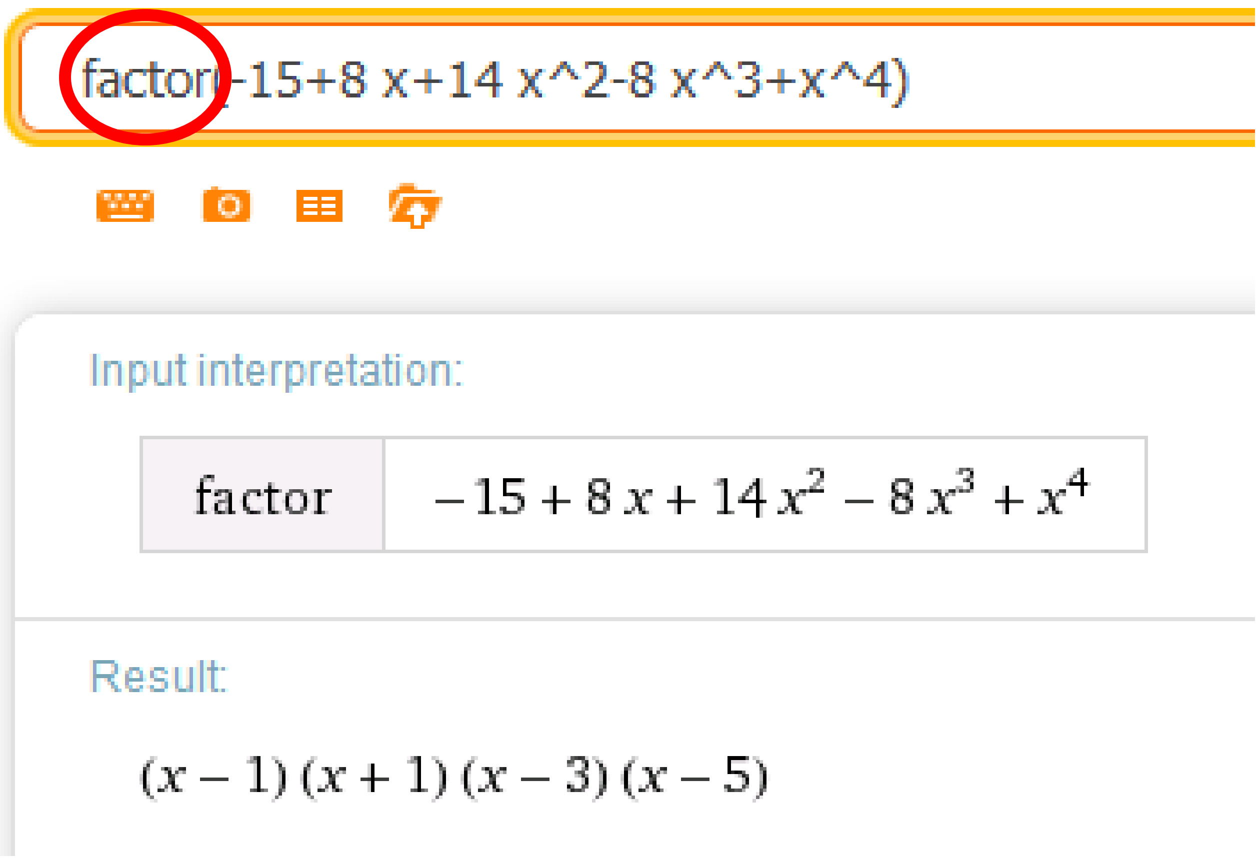
to

$$y(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k) W_m(x)$$

gdzie $W_m(x)$ jest wielomianem stopnia $m = n - k$

Faktoryzacja, czyli rozkład na czynniki (ang. *factors*)

Przykłady



- „Czysta" faktoryzacja

Przykłady

factor(x^8-1)

≡ Examples ⤮ Ran

Input interpretation:

factor	$x^8 - 1$

Result:

Step-by-step sc

$$\underline{(x-1)(x+1)}(x^2+1)(x^4+1)$$

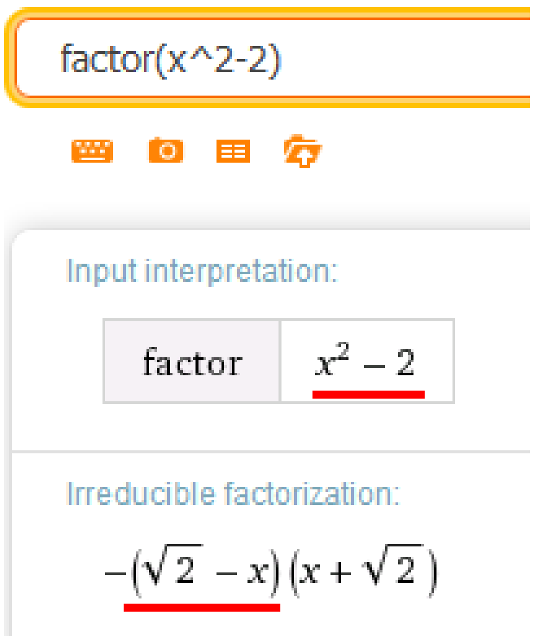
Irreducible factorization:

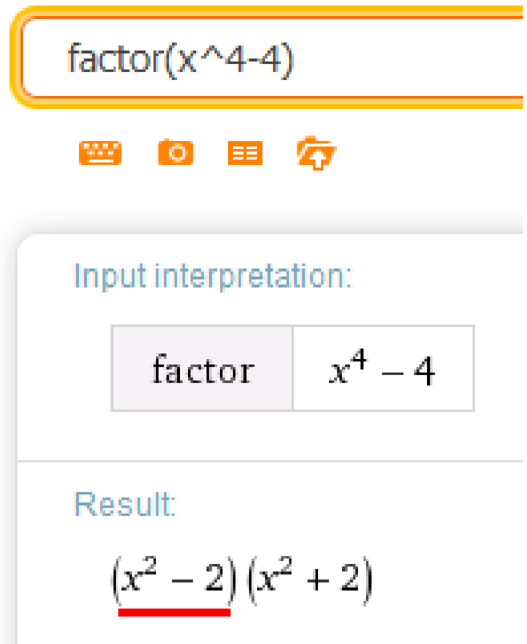
Exac

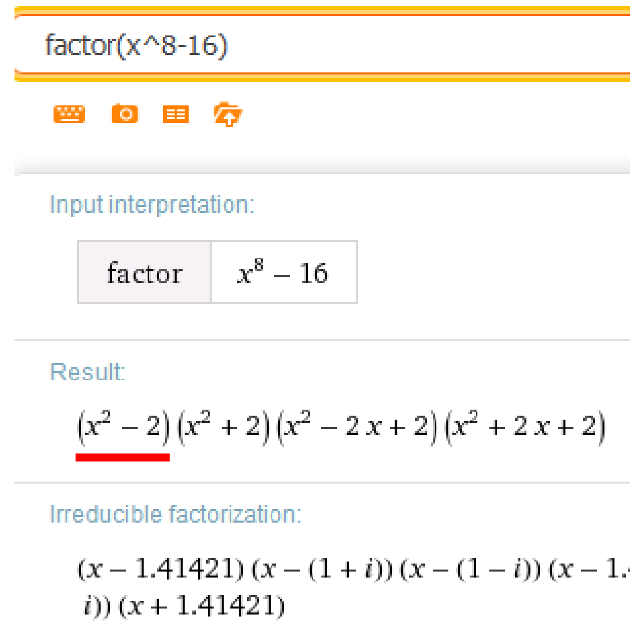
$$(x-1)(x-\underline{i})(x+\underline{i})(x+1)(x-(0.707107+0.707107\,\underline{i}))(x-(0.707107-0.707107\,\underline{i}))$$
$$(x+(0.707107-0.707107\,\underline{i}))(x+(0.707107+0.707107\,\underline{i}))$$

- Faktoryzacja częściowa (w *R*)

Przykłady

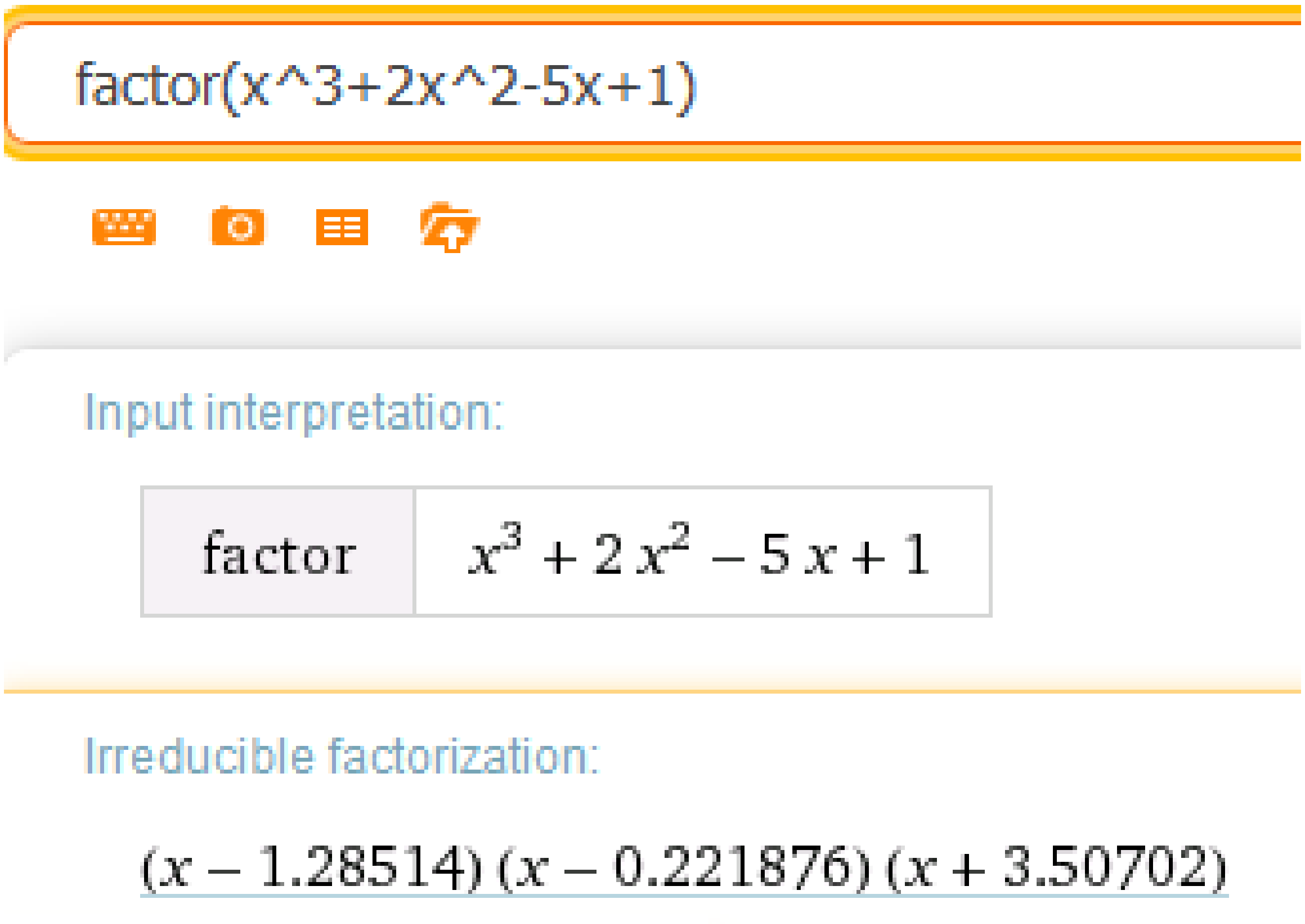






- Program komputerowy bywa ślepy

Przykłady



- Pierwiastki niewymierne

Wielomiany w Octave

- Wielomian

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Zapisujemy jako ciąg współczynników

$$\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$$

- Przykład:

$$y(x) = 3\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 + 1$$

Octave:

```
>> w = [3, -2, 0, 1];
```

Pierwiastki wielomianów: **roots**

$$y(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$$

```
>> w = [3, -4, 0, 1]
w =
  3  -4   0   1
>> roots(w)
ans =
  1.00000
  0.76759
 -0.43426
```

Pierwiastki wielomianów: **roots**

$$y(x) = \mathbf{3}\mathrm{x}^3 + \mathbf{4}\mathrm{x}^2 + \mathbf{1}$$

```
>> w = [3, 4, 0, 1];
>> roots(w)
ans =
  -1.48458 + 0.00000i
   0.07562 + 0.46777i
   0.07562 - 0.46777i
```

Pierwiastki wielomianów: roots

$$y(x) = 3\mathrm{x}^3 + 4\mathrm{x}^2 + 1$$

```
>> w = [3, 4, 0, 1];
>> roots(w)
ans =
  -1.48458 + 0.00000i
   0.07562 + 0.46777i
   0.07562 - 0.46777i
```

Ten pierwiastek jest rzeczywisty

Pierwiastki zespolone zawsze występują parami

Pierwiastki wielomianów: roots

$$y(x) = 3x^3 + 4x^2 + 1$$

```
>> w = [3, 4, 0, 1];
>> roots(w)
ans =
  -1.48458 + 0.00000i
   0.07562 + 0.46777i
   0.07562 - 0.46777i
```

Ten pierwiastek jest rzeczywisty

Pierwiastki zespolone zawsze występują parami

- Nawet jeśli nie rozumiesz liczb zespolonych, musisz rozumieć związaną z nimi notację

Mnożenie wielomianów

- Iloczyn wielomianów w Octave: **conv**

```
>> w =[1,1,1];  # x^2 + x + 1
>> p =[1,-2];     #  x - 2
>> conv (w,p)
ans =
  1  -1  -1  -2
```

czyli

$$(x^2+x\ +1)(x-2) = x^3 - x^2 - x\ - 2$$

Inne operacje na wielomianach

```
>> p=[1,1,-1];
>> polyout (p)   # wyświetl p jako wielomian
1*s^2 + 1*s^1 - 1
>> polyval (p, 2)  # wartość wielomianu w x=2
ans =  5
>> [b, r] = deconv (p, [1,1]) # podziel p przez x+1
b =                   # iloraz
  1   0
r =                   # reszta
  0   0  -1
```