



Uniwersytet
Wrocławski

Funkcje

Część druga

Zbigniew Koza

Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2015

GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Granica funkcji

- Funkcja $f: \mathbb{R} \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ ma **w punkcie** x_0 **granice** g wtedy i tylko wtedy gdy **dla każdego ciągu** (x_n) **o wyrazach w dziedzinie** A **i różnych od** x_0 , **zbieżnego do** x_0 zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Fakt ten zapisujemy następująco:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Granica funkcji

"A jest podzbiorem \mathbb{R} "

- Funkcja $f: \mathbb{R} \supseteq A \rightarrow \mathbb{R}$ ma **w punkcie** x_0 **granice** g wtedy i tylko wtedy gdy **dla każdego ciągu** (x_n) **o wyrazach w dziedzinie A i różnych od x_0 , zbieżnego do x_0** zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

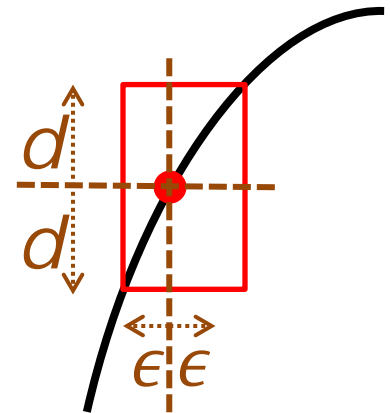
Fakt ten zapisujemy następująco:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

Granica funkcji

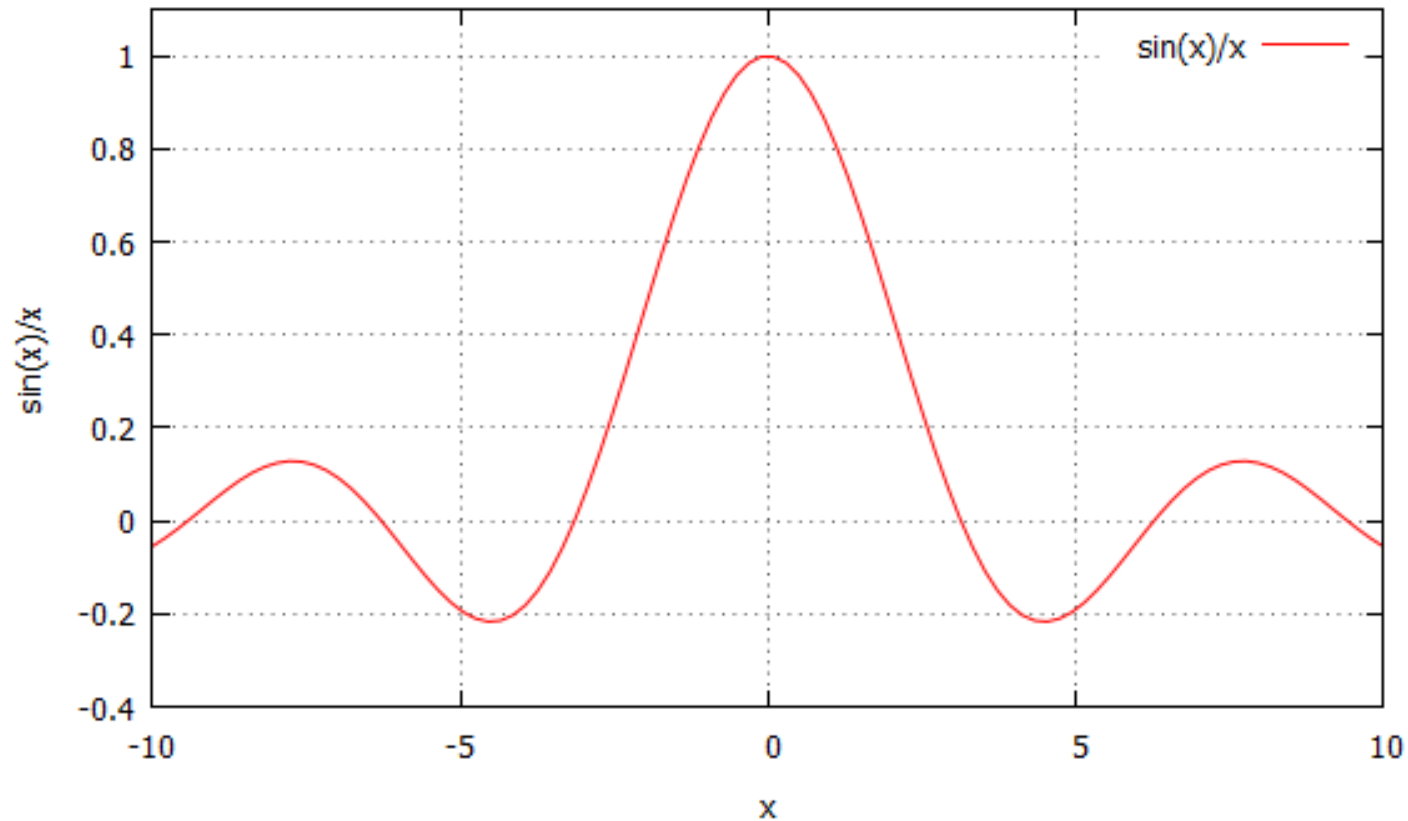
- Definicja nieformalna:

Funkcja rzeczywista f ma w punkcie x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $d > 0$ można znaleźć przedział $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ taki, że dla każdego x z tego przedziału, $x \neq x_0$, wartość $f(x)$ różni się od g o nie więcej niż d .



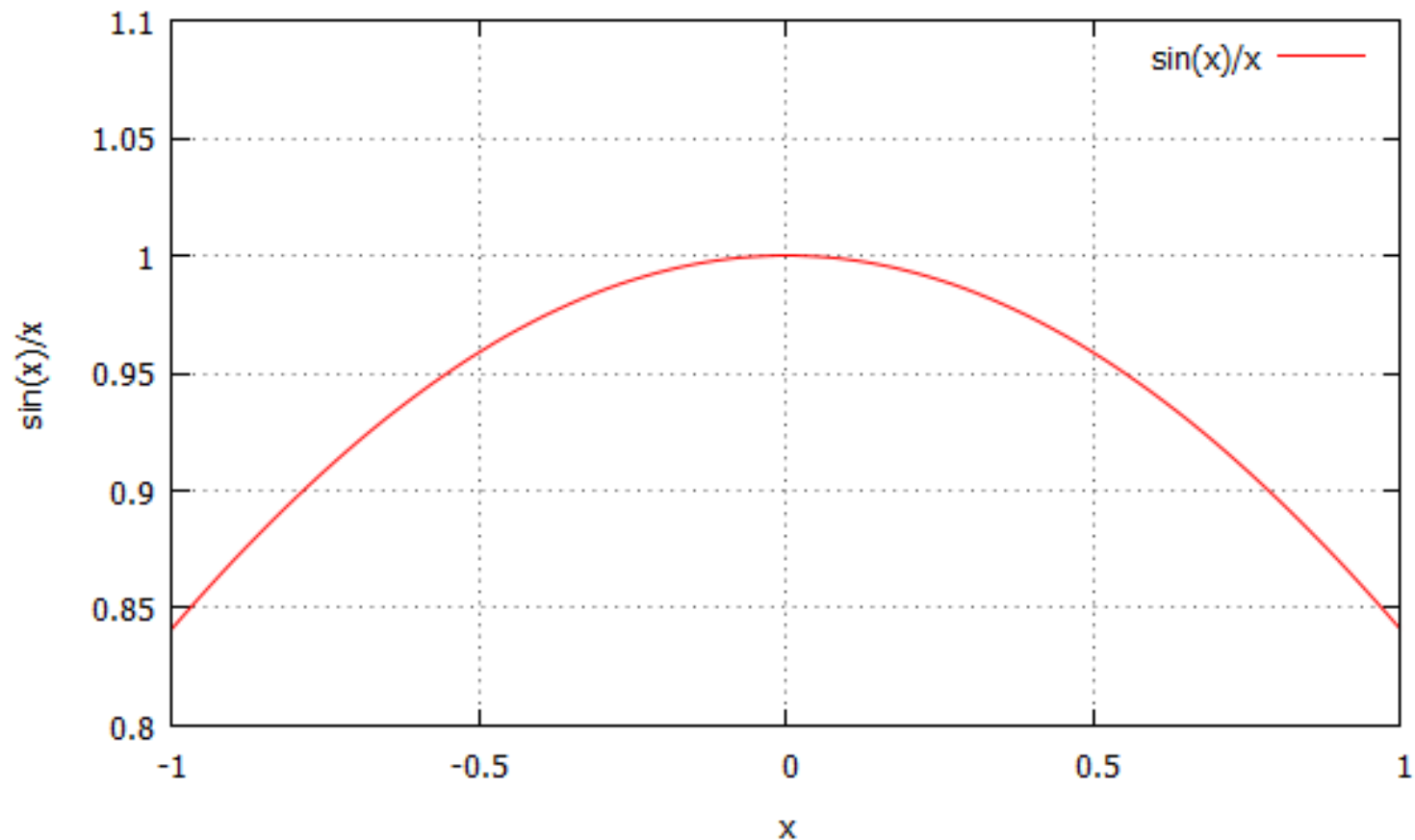
Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \rightarrow 0$

- Jaka wartość dla $x = 0$?



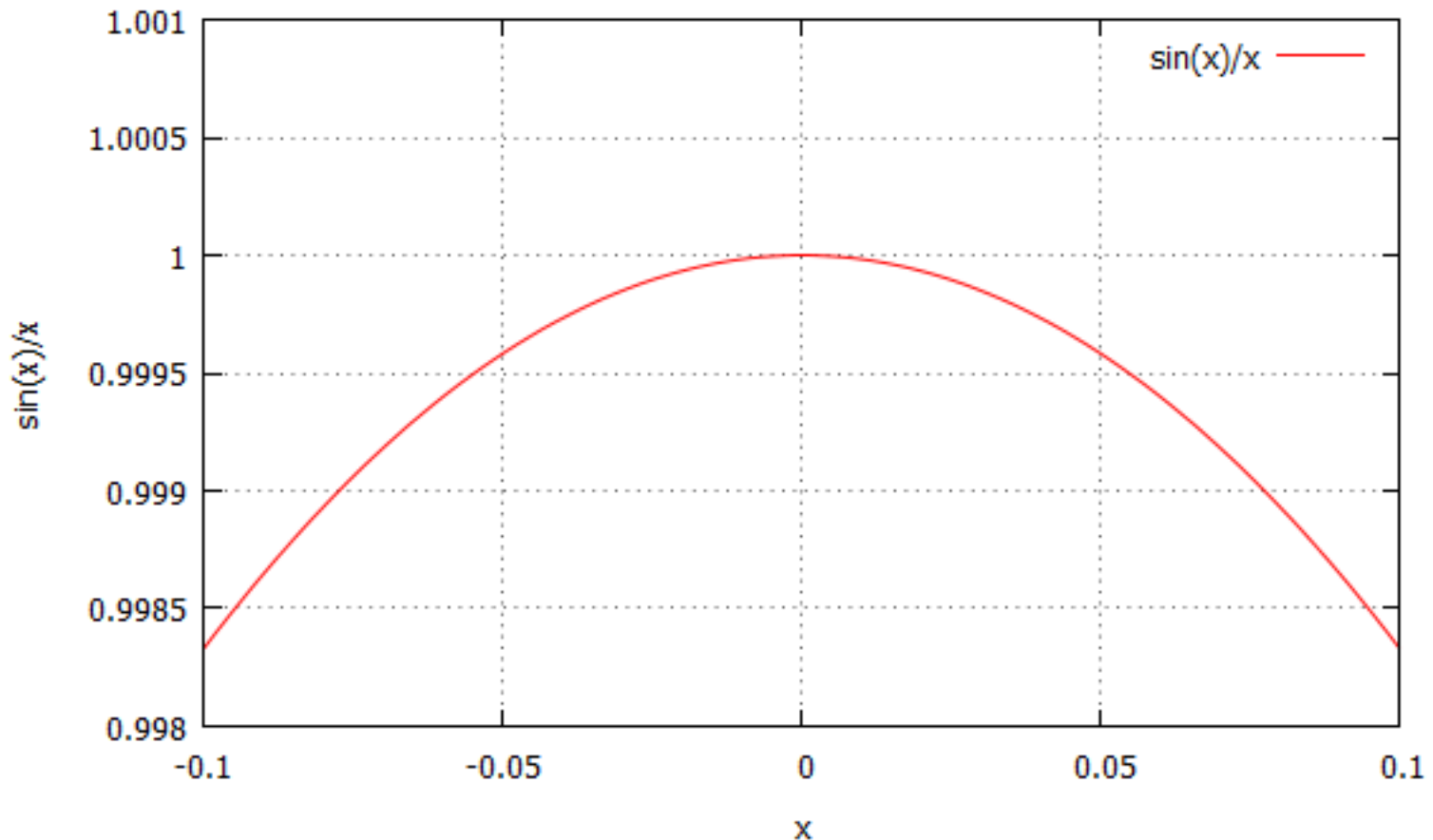
Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \rightarrow 0$

- Powiększamy okolice $x = 0$



Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \rightarrow 0$

- Powiększamy okolice $x = 0$



Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \rightarrow 0$

- A może tabelka?

x	sin(x)	f(x)
1	0.84147	0.84147
0.1	0.099833	0.99833
0.01	0.0099998	0.99998
0.001	0.00099999983	0.99999983
0.0001	0.00009999999983	0.9999999983
...		
0	0	1 (???)

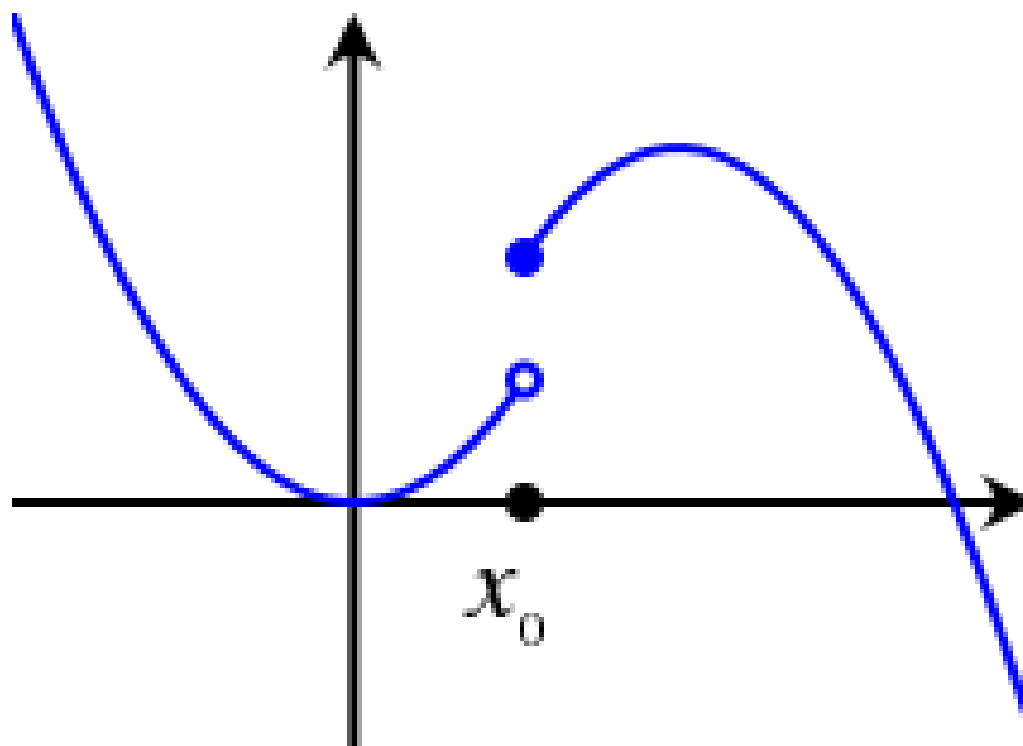
Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $x \rightarrow 0$

x	sin(x)	f(x)
1	0.84147	0.84147
0.1	0.099833	0.99833
0.01	0.0099998	0.99998
0.001	0.00099999983	0.99999983
0.0001	0.00009999999983	0.9999999983
...		
0	0	1 (???)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

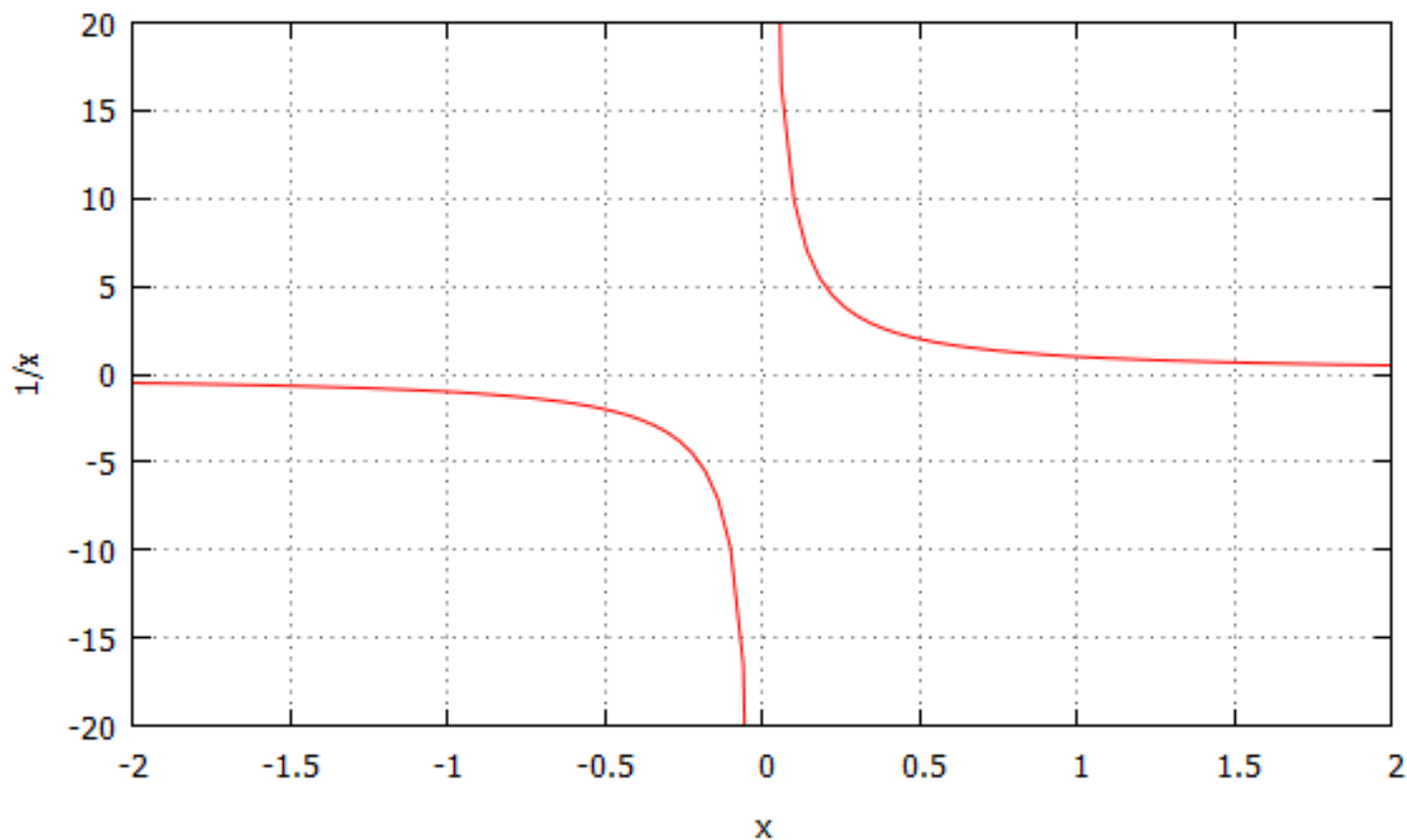
Przykłady

- Ta funkcja nie ma granicy w x_0



Przykłady

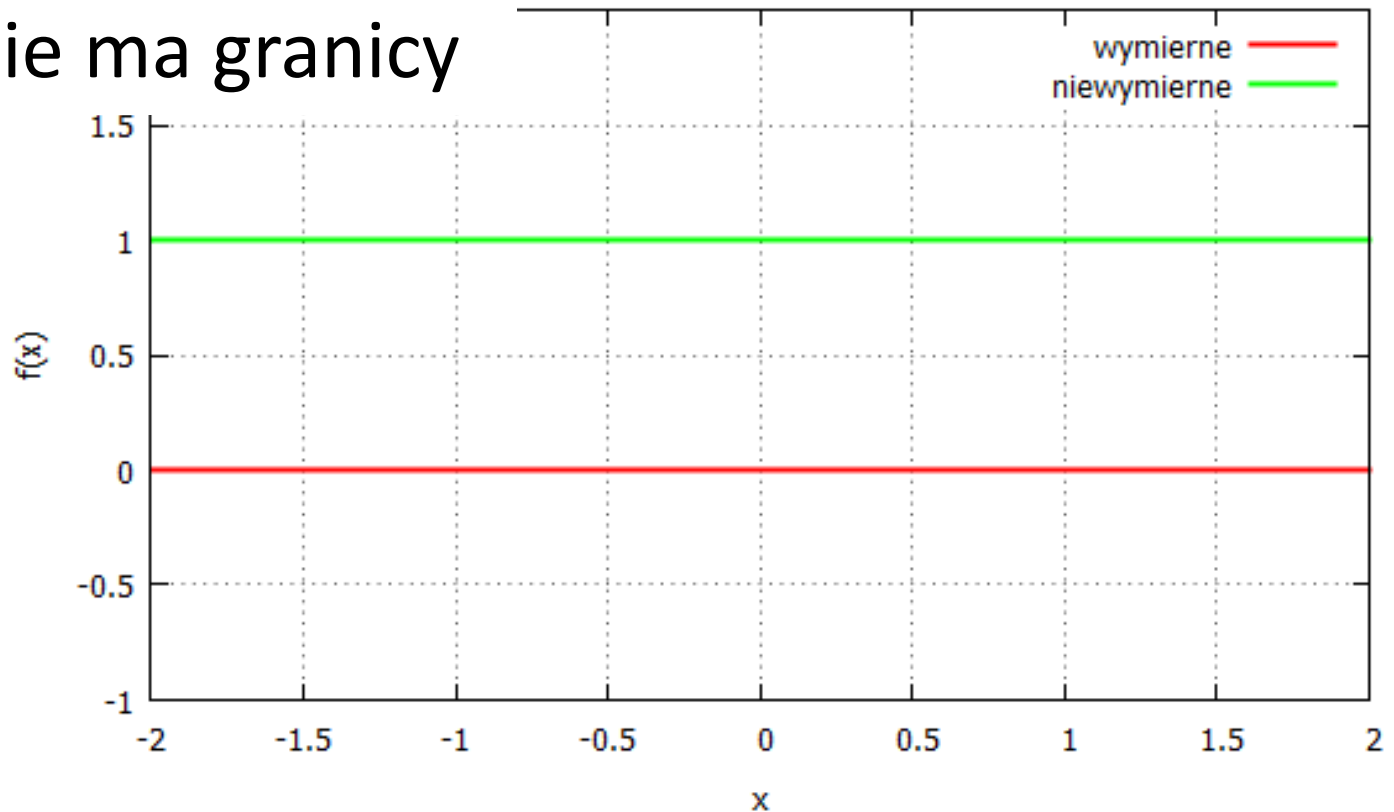
- $f(x) = \frac{1}{x}$ nie ma granicy w $x = 0$



Przykłady

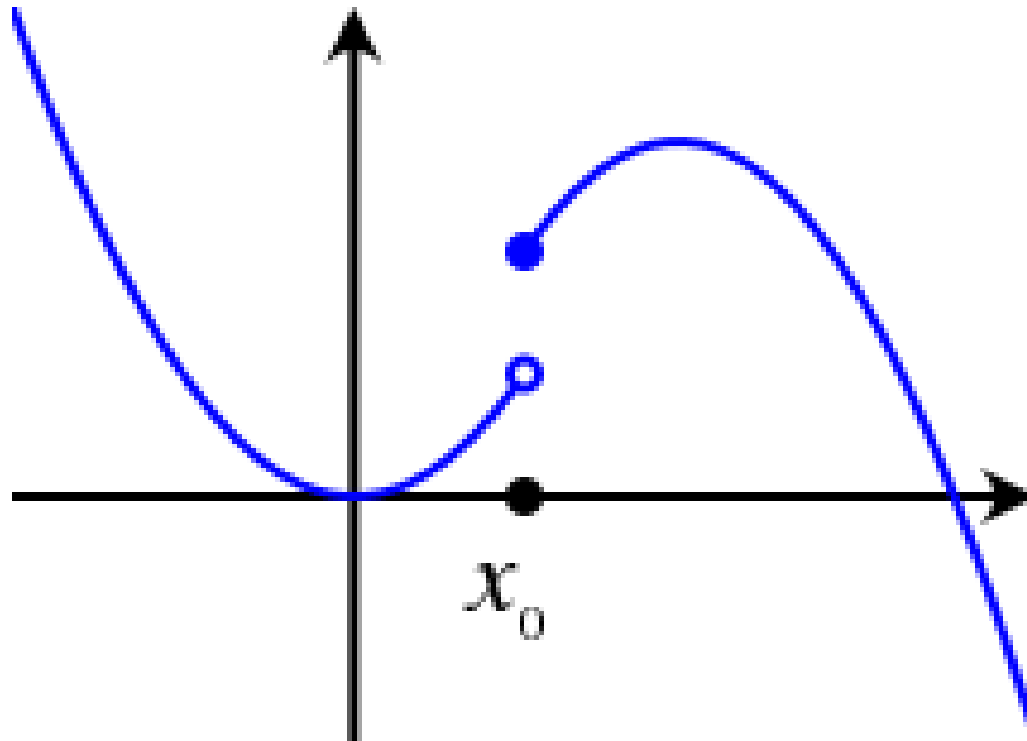
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ jest wymierne} \\ 1, & x \text{ jest niewymierne} \end{cases}$$

nigdzie nie ma granicy



Granica może być lewo- lub prawostronna

- Ta funkcja ma w x_0 granicę prawostronną równą $f(x_0)$ i granicę lewostronną $\neq f(x_0)$



Funkcja ciągła w punkcie

Funkcja f jest **ciągła w punkcie** x_0 jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

➡ Trzy warunki:

- 1) f musi być określona (mieć wartość) w x_0 ;
 - 2) f musi mieć granicę w x_0 ;
 - 3) granica ta musi się równać $f(x_0)$;
- (założyliśmy, że x_0 nie jest punktem izolowanym)

Funkcja ciągła

- Funkcja f jest **ciągła**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny

Funkcja ciągła na odcinku

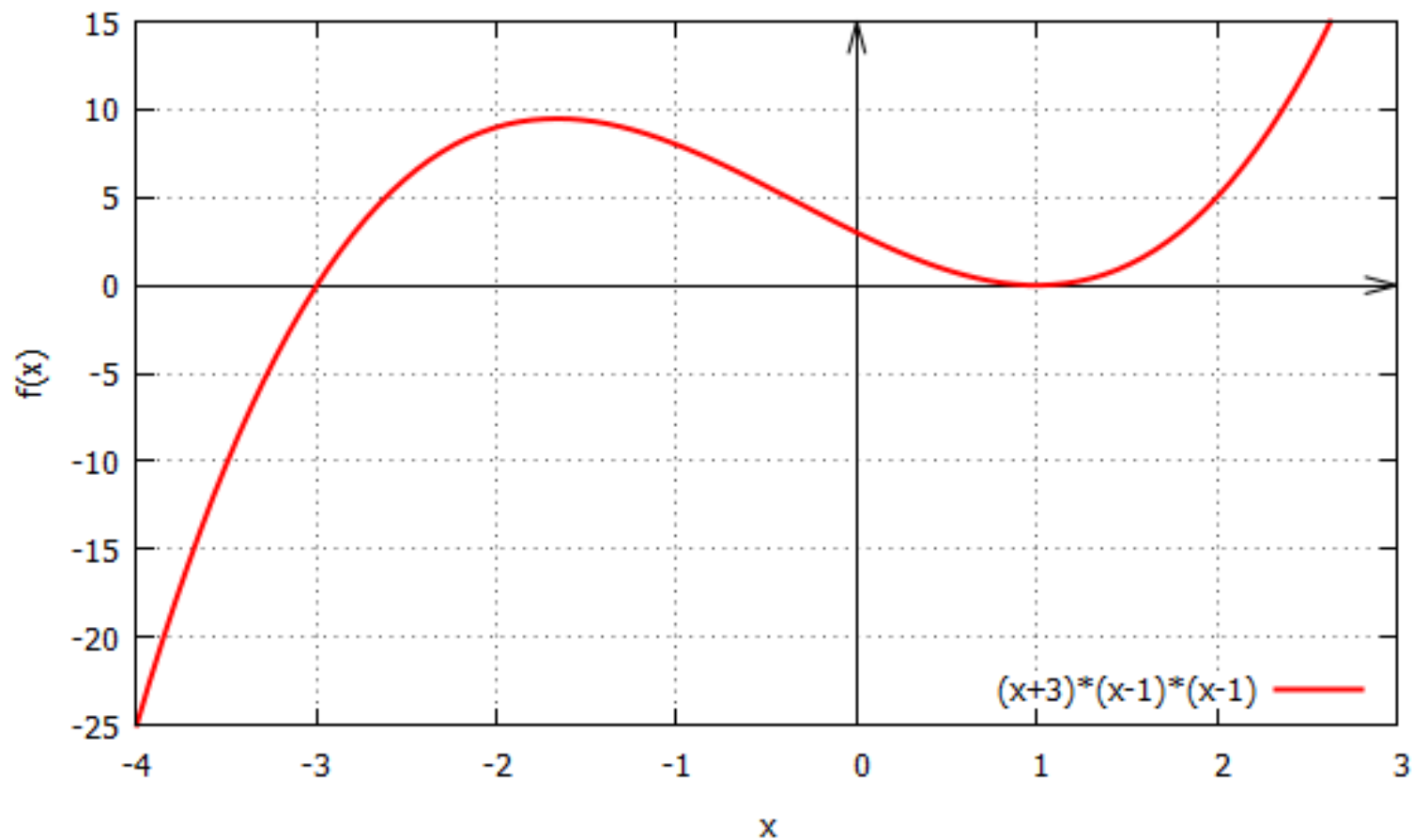
- Funkcja f jest **ciągła na odcinku domkniętym $[a,b]$** , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie odcinka $[a,b]$
 - a więc musi mieć wartość dla każdego $x \in [a, b]$.

Funkcja ciągła - właściwości

- Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą (w swojej dziedzinie)
- Wszystkie **funkcje elementarne** są ciągłe (w swojej dziedzinie)

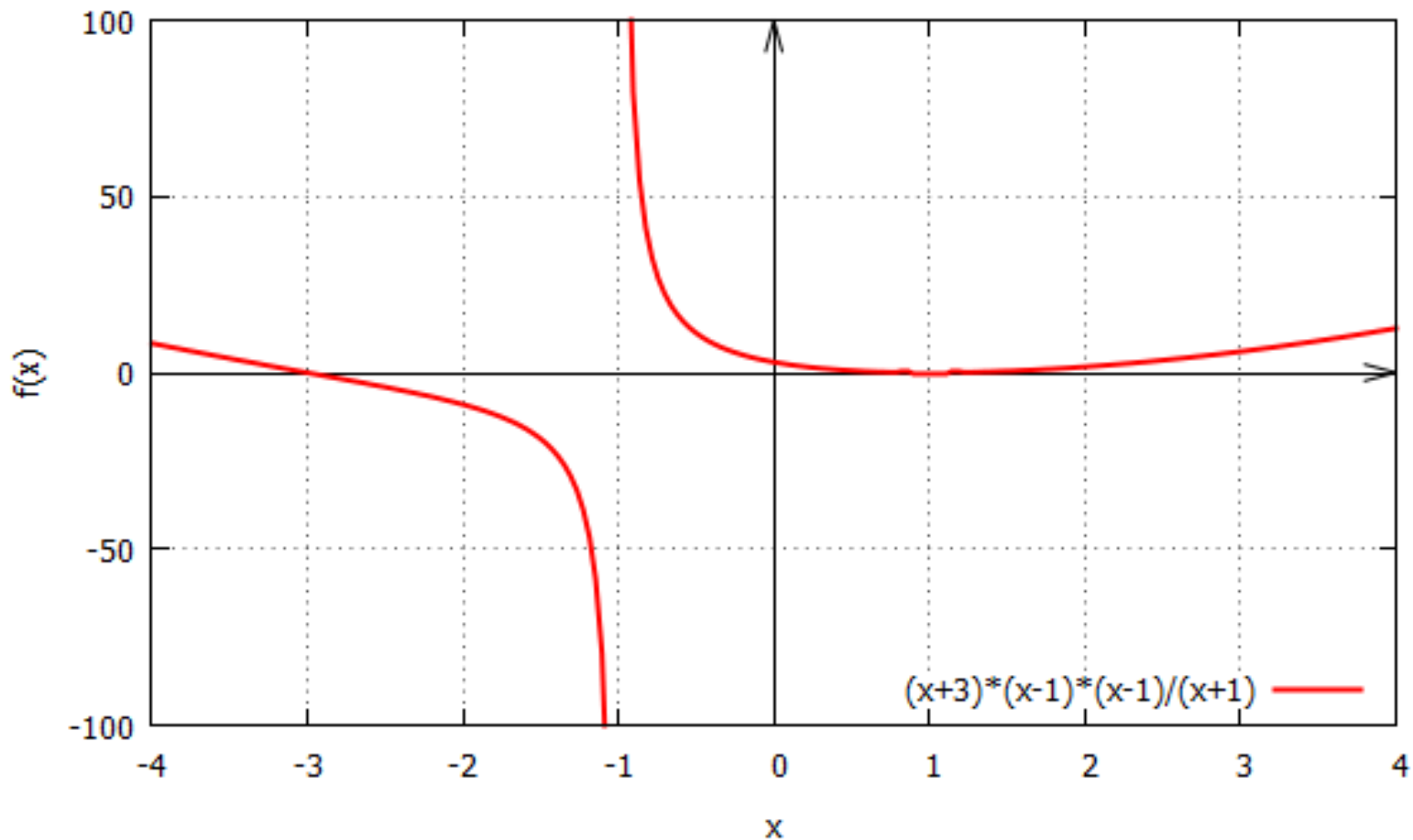
Przykłady

- Wielomiany są funkcjami ciągłymi



Przykłady

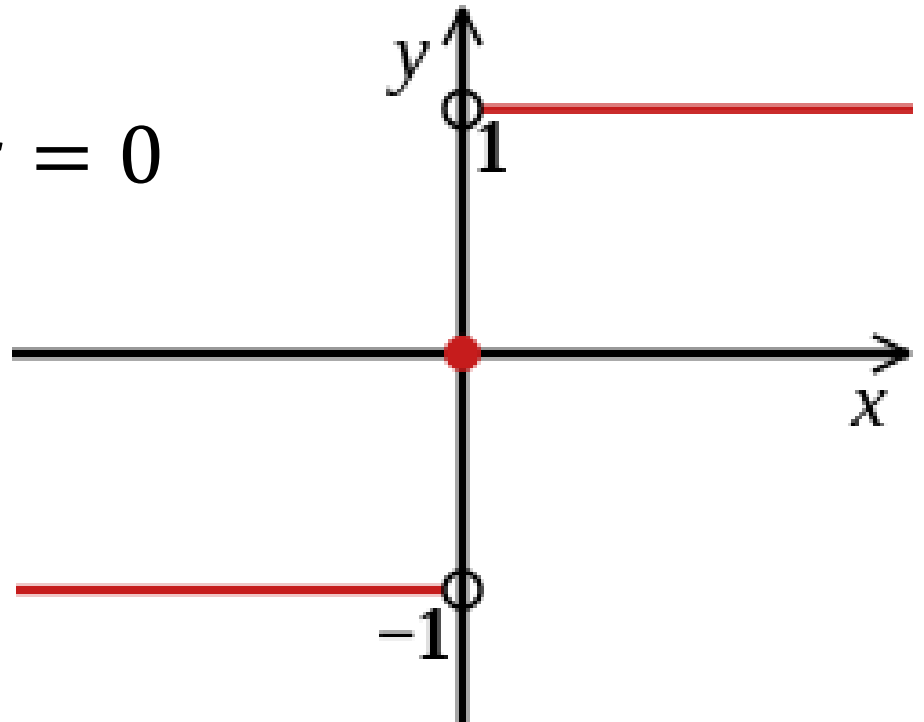
- Funkcje wymierne są funkcjami ciągłymi (!)



Przykłady

- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

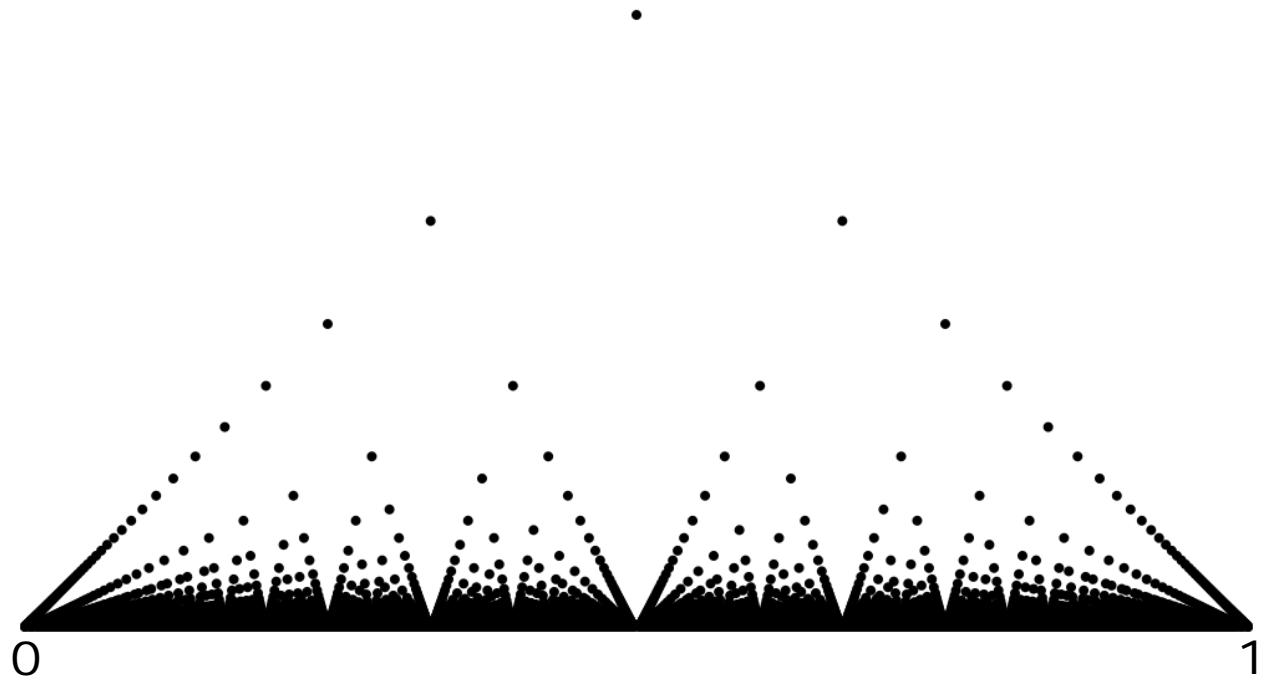
- Funkcja nieciągła w $x = 0$



Przykłady

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{jeśli } x = \frac{p}{q} \text{ (nieskracalny)} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ jest niewymierne} \end{cases}$

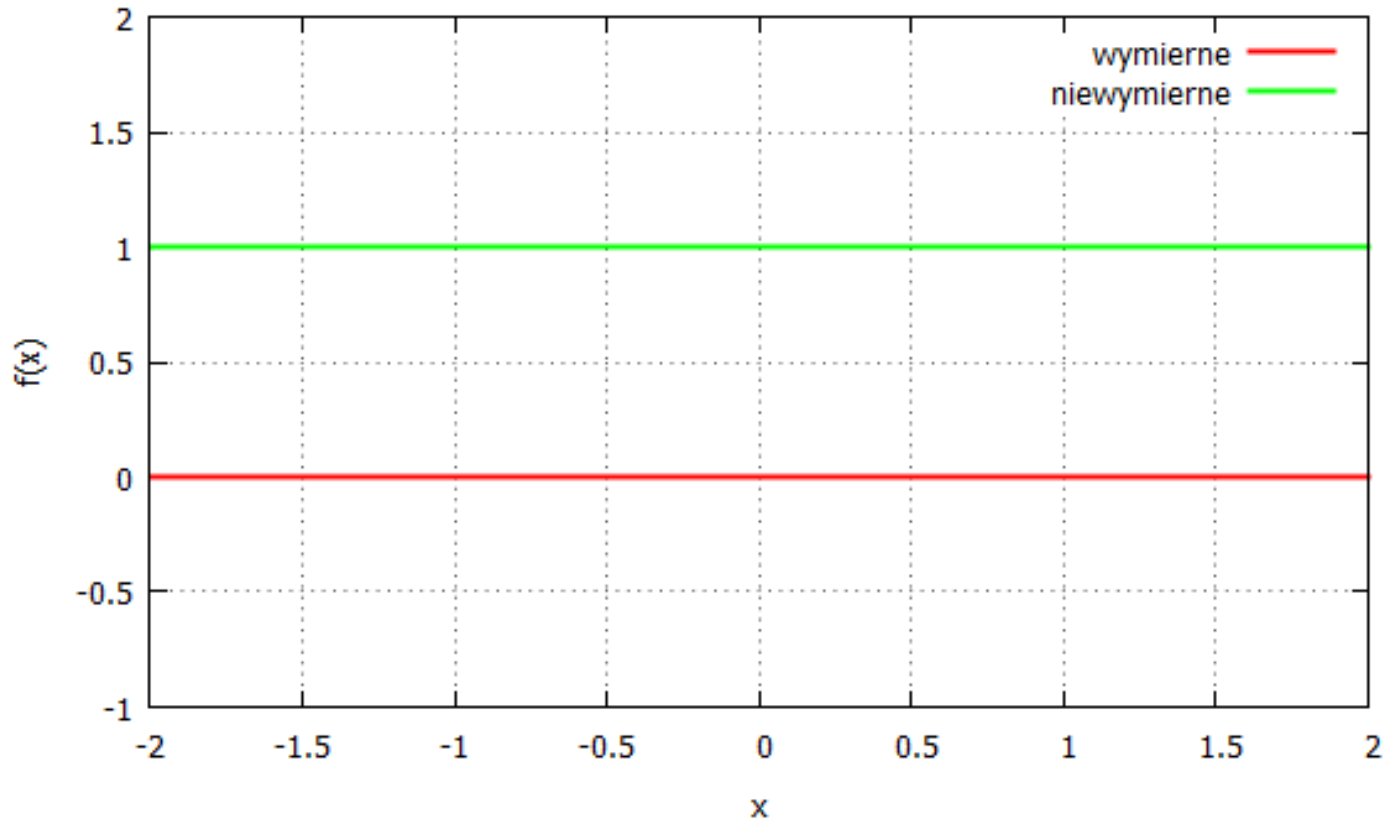
- funkcja
ciągła
w każdym
 x niewym.



Przykłady

- $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ jest wymierne} \\ 1, & x \text{ jest niewymierne} \end{cases}$

nigdzie
nie jest
ciągła

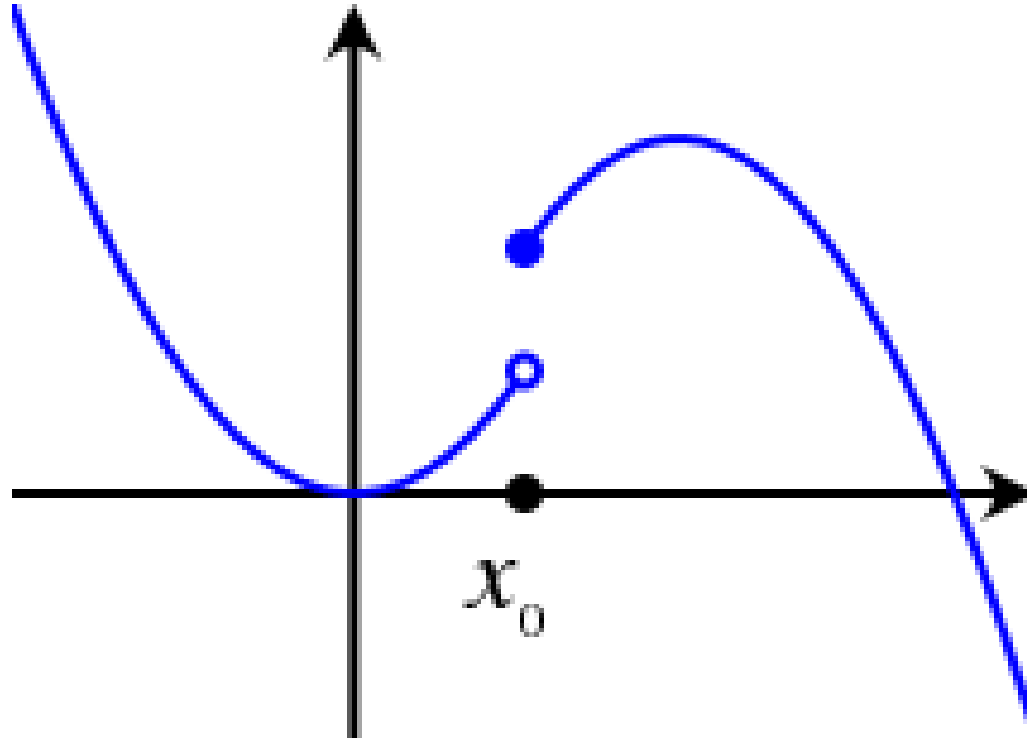


Dziwnie nieciągłe funkcje

- Zostawiamy matematykom

Ciągłość może być lewo- lub prawostronna

- Ta funkcja jest prawostronnie ciągła w x_0



Dlaczego funkcje ciągłe są ważne?

- Są powszechnie spotykane „w życiu”
 - skokowe zmiany zmiennej zależnej przy minimalnej („**infinitesimalnej**”) zmianie zmiennej niezależnej oznaczałyby katastrofę dla wielu działów inżynierii
- Mają „mocne” własności matematyczne
- Są stosunkowo proste do analizy

TWIERDZENIE WEIERSTRASSA

Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa

- Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$. Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje wielomian $W(x)$ taki, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi $|f(x) - W(x)| < \epsilon$.
- Innymi słowy, każdą funkcję ciągłą na odcinku możemy na tym odcinku przybliżyć (**aproksymować**) wielomianem z dowolną, z góry ustaloną dokładnością.

Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa

- To fundamentalne twierdzenie pozwala przybliżyć dowolną funkcję ciągłą pewnym wielomianem (lub: ciągiem wielomianów)
- Wielomianami łatwo się operuje – można je bez problemów dodawać, odejmować, mnożyć, różniczkować (*) i całkować (*)

(*) ale o tym porozmawiamy później

Przykład

- $f(x) = \sin(x)$

series sin(x)



Input interpretation:

series

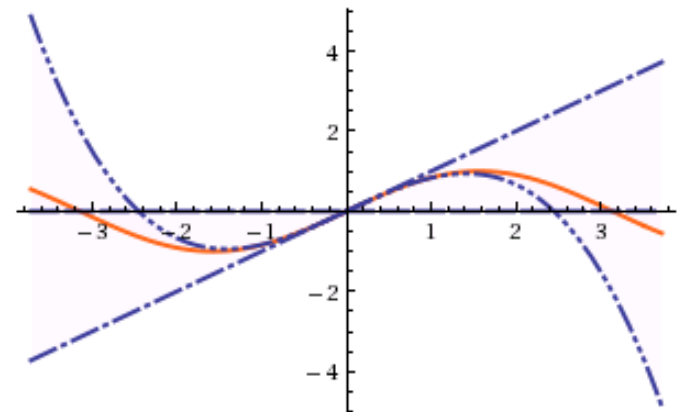
sin(x)

Series expansion at x=0:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$

(Taylor series)

Approximations about x=0 up to order 3:



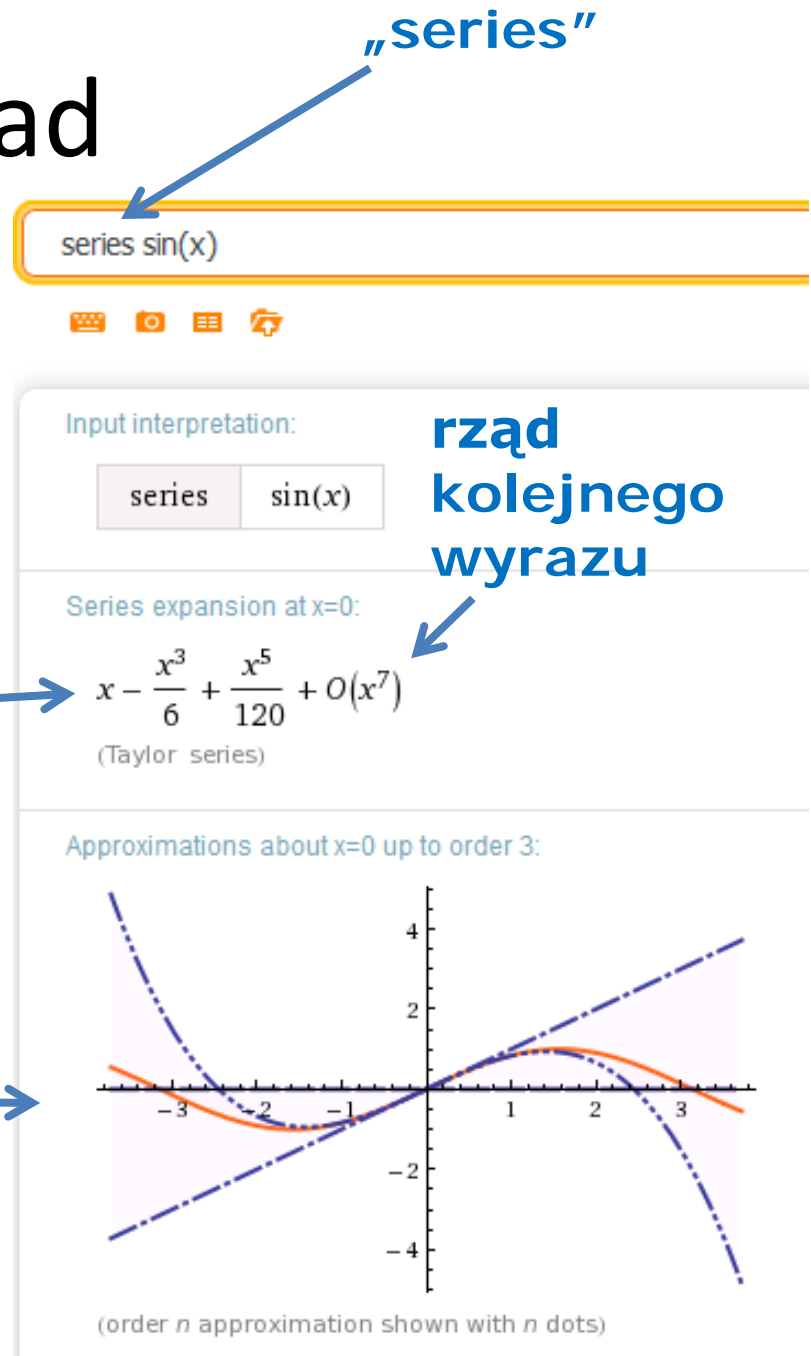
(order n approximation shown with n dots)

Przykład

- $f(x) = \sin(x)$

Wielomiany
aproxymacyjne
(szereg)

Coraz lepsze
przybliżenie
w okolicach $x=0$



Przykład

- $f(x) = \sin(x)$

Wzór ogólny

Series representations:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!}$$

The screenshot shows a software interface for calculating the series expansion of $\sin(x)$. At the top, a search bar contains the text "series sin(x)". Below the search bar are several icons: a keyboard, a camera, a list, and a share icon. The main content area is divided into three sections:

- Input interpretation:** This section shows two input fields: "series" and "sin(x)".
- Series expansion at x=0:** This section displays the Taylor series expansion of $\sin(x)$ at $x=0$:
$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$
Below the expansion, it is noted as "(Taylor series)".
- Approximations about x=0 up to order 3:** This section contains a graph. The x-axis ranges from -3 to 3, and the y-axis ranges from -4 to 4. The graph shows the function $\sin(x)$ (solid blue line) and its approximations up to order 3. The approximations are shown as dashed lines: a solid blue line for the linear approximation (order 1), a dashed blue line for the cubic approximation (order 3), and a dotted blue line for the fifth-order approximation (order 5). The area between the function and the approximations is shaded in light purple.

At the bottom of the graph, it is noted: "(order n approximation shown with n dots)".

Przykład

- $f(x) = \sin(x)$

Wzór ogólny:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Series representations:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!}$$

series sin(x)



Input interpretation:

series

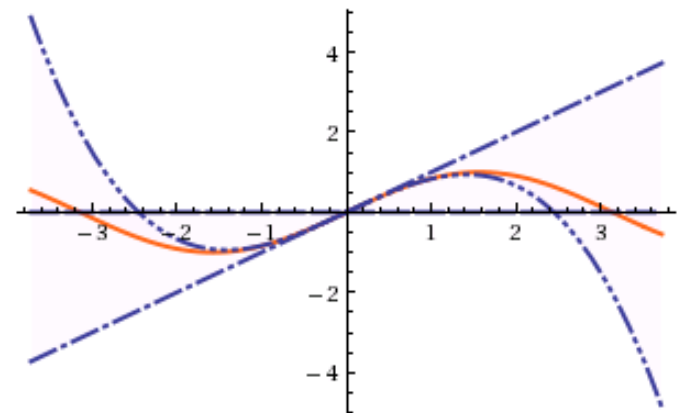
sin(x)

Series expansion at x=0:

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$$

(Taylor series)

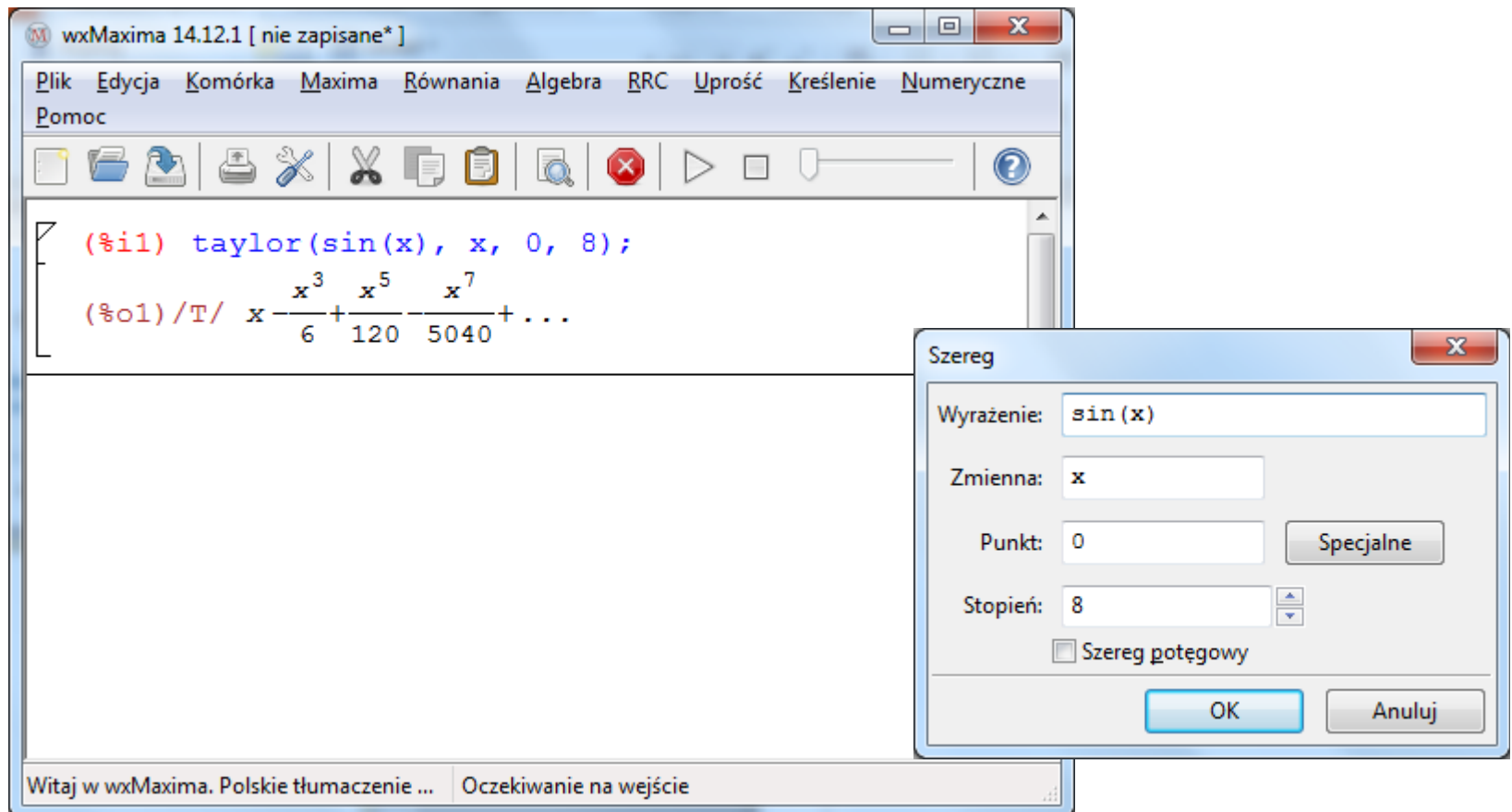
Approximations about x=0 up to order 3:



(order n approximation shown with n dots)

wxMaxima

- W menu wybierz: RRC/Rozwiń w szereg



wxMaxima

- Rozwinięcie algebraiczne (o ile istnieje):

The screenshot shows the wxMaxima 14.12.1 interface. The main window contains the following code and output:

```
(%i1) taylor(sin(x), x, 0, 8);
```

(%o1) /T/ $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$

```
(%i2) niceindices(powerseries(sin(x), x, 0));
```

(%o2)
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

A red bracket labeled '2' is on the left side of the code and output. A red arrow labeled '1' points from the 'Szereg potęgowy' checkbox in the dialog box to the code.

The dialog box 'Szereg' has the following fields and options:

- Wyrażenie: %
- Zmienna: x
- Punkt: 0 (Specjalne button)
- Stopień: 8
- Szereg potęgowy
- OK, Anuluj buttons

The status bar at the bottom reads: Witaj w wxMaxima. Polskie tłumaczenie ... Oczekiwanie na wejście

ZAAWANSOWANE FUNKCJE ELEMENTARNE

Definicje funkcji elementarnych

- $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$
- $\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- $e^x \equiv \mathbf{\exp}(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Definicje funkcji elementarnych

- $\ln(1 + x) \equiv \log_e(1 + x) =$
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

 $(|x| < 1)$

lub:

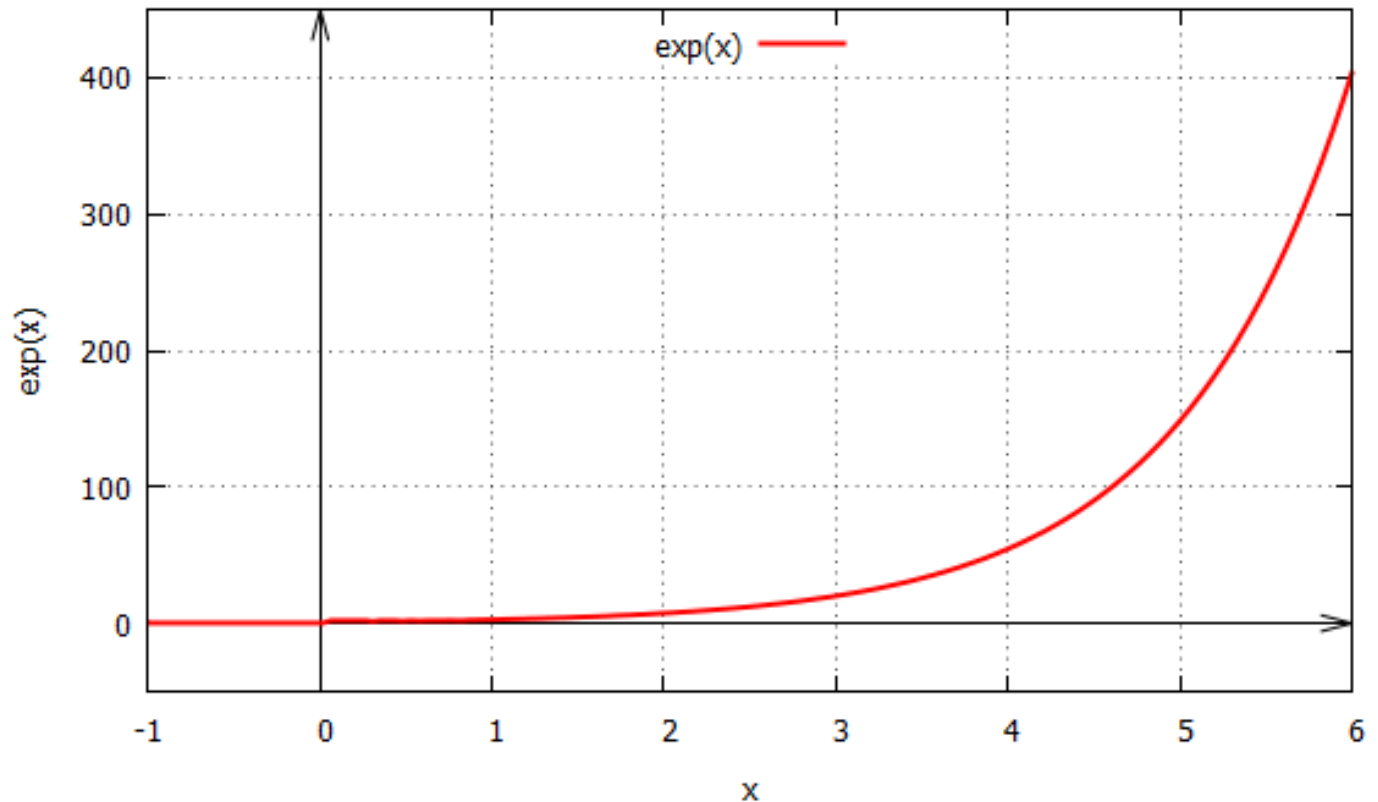
- $\ln(x) = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]$
 $(x > 0)$

Definicje funkcji elementarnych

- Skoro zdefiniowaliśmy $\ln(x)$ oraz $\exp(x)$, to:
- $a^x = e^{(\ln a) \cdot x} = \exp[x \cdot \ln(a)]$
- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $x^a = e^{(\ln x) \cdot a} = \exp[a \cdot \ln(x)]$

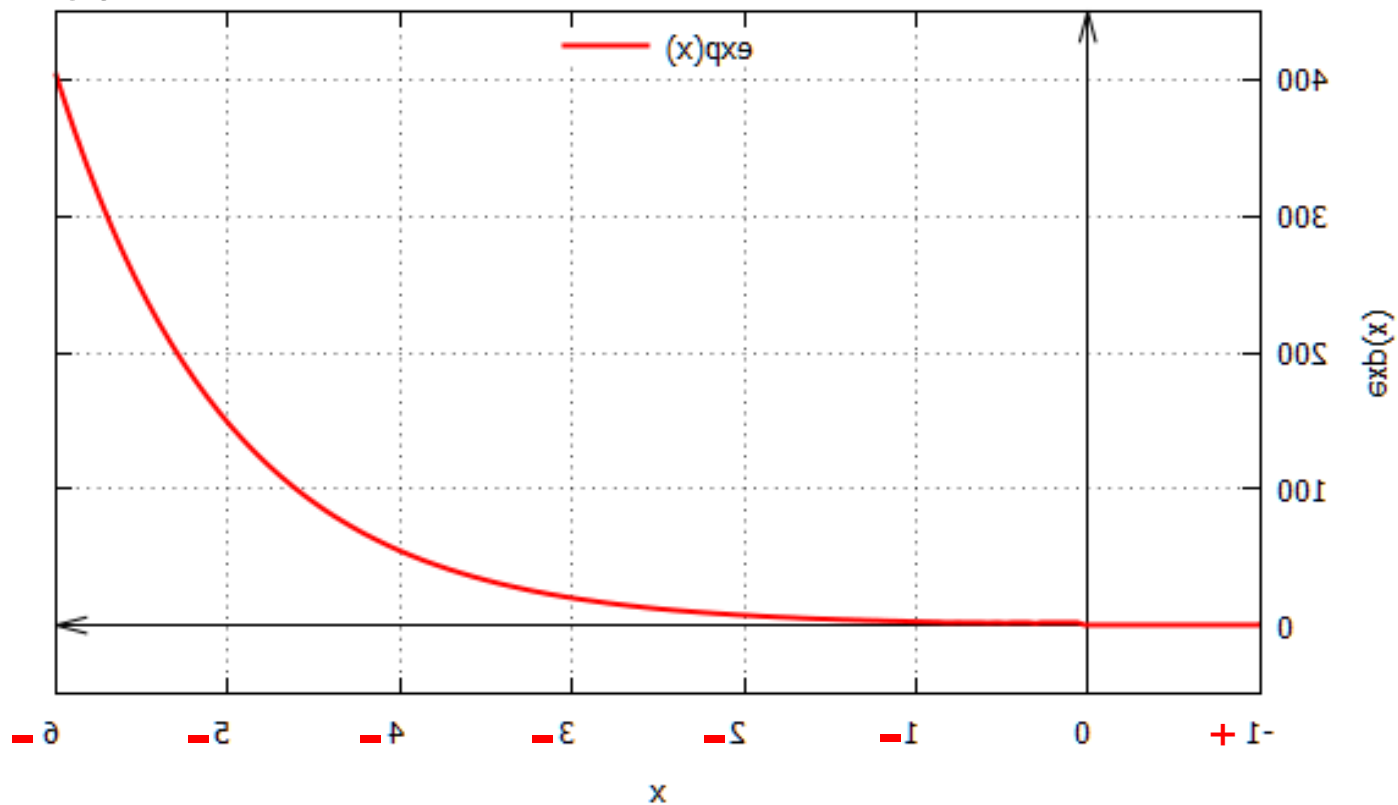
$\exp(x)$

- $\exp(x)$ jest funkcją bardzo szybko rosnącą dla $x > 0$ i szybko malejącą gdy $x \rightarrow -\infty$



$\exp(-x)$

- $\exp(-x)$ jest funkcją bardzo szybko ~~rosnącą~~ malejącą dla $x > 0$ i szybko ~~malejącą~~ rosnącą gdy $x \rightarrow -\infty$



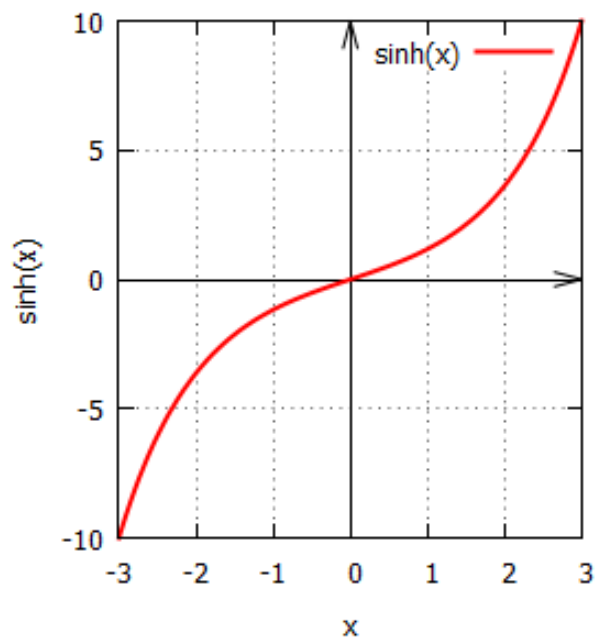
$\exp(ax)$ a b^x

- $\exp(ax) = e^{ax} = (e^a)^x = b^x$, gdzie $b = e^a$
- Przykład: $2^x = (e^{\ln 2})^x = e^{(\ln 2) \cdot x}$
 $\approx e^{0.693147 x} = \exp(0.693147 x)$
- Czyli rodzina funkcji $y(x) = \exp(ax)$ jest tożsama funkcjom wykładniczym, $y(x) = b^x$
- W praktyce zapis $\exp(ax)$ spotyka się częściej niż b^x

Funkcje hiperboliczne

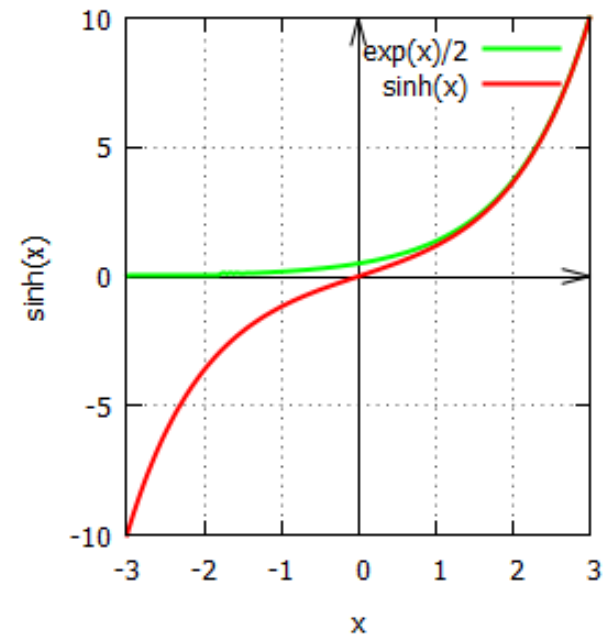
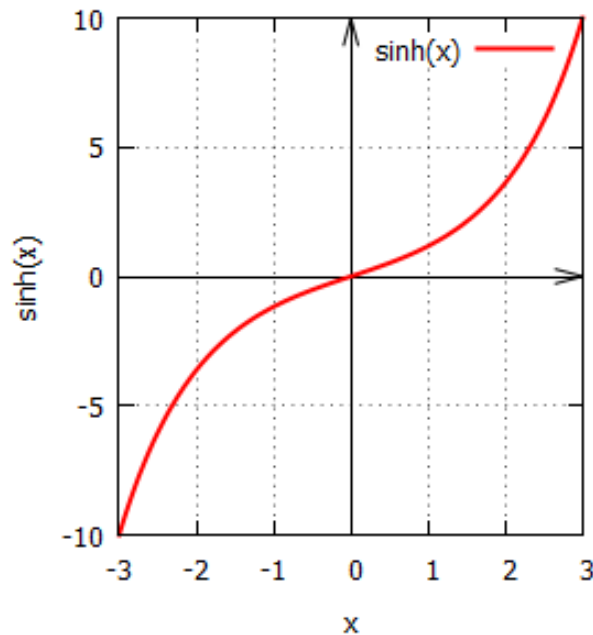
- $\sinh(x) \equiv \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$

$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$



Funkcje hiperboliczne

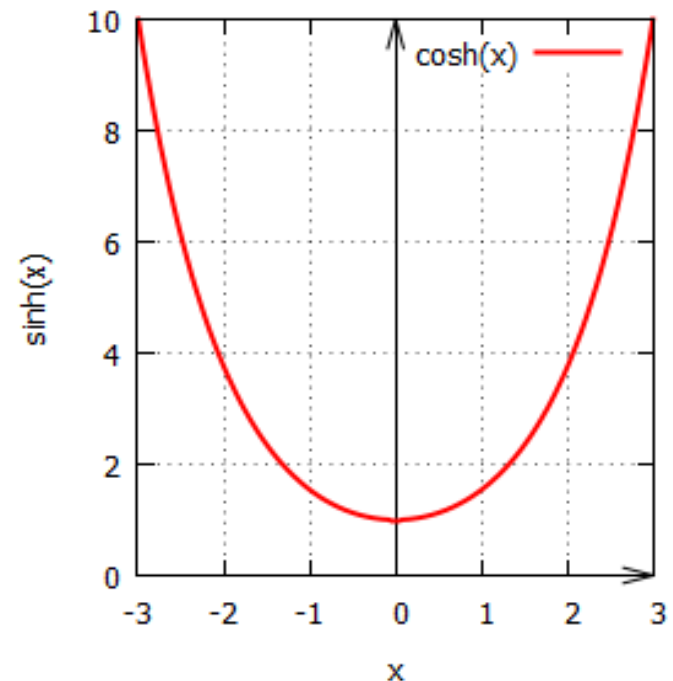
- $$\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$
$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$



Funkcje hiperboliczne

- $\cosh(x) \equiv \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$
 $= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

(krzywa łańcuchowa)



Funkcje hiperboliczne

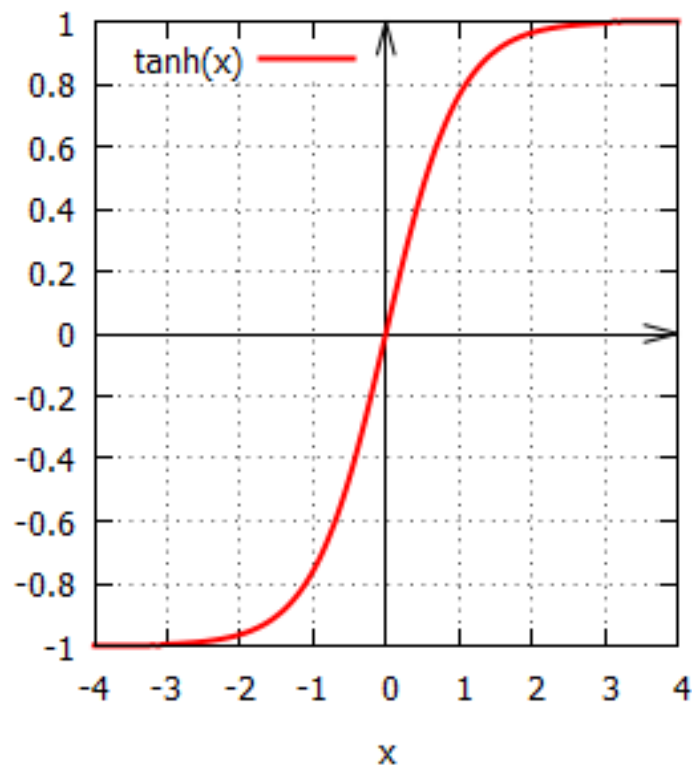
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Funkcje hiperboliczne

$$\operatorname{tgh}(x) = \operatorname{tanh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

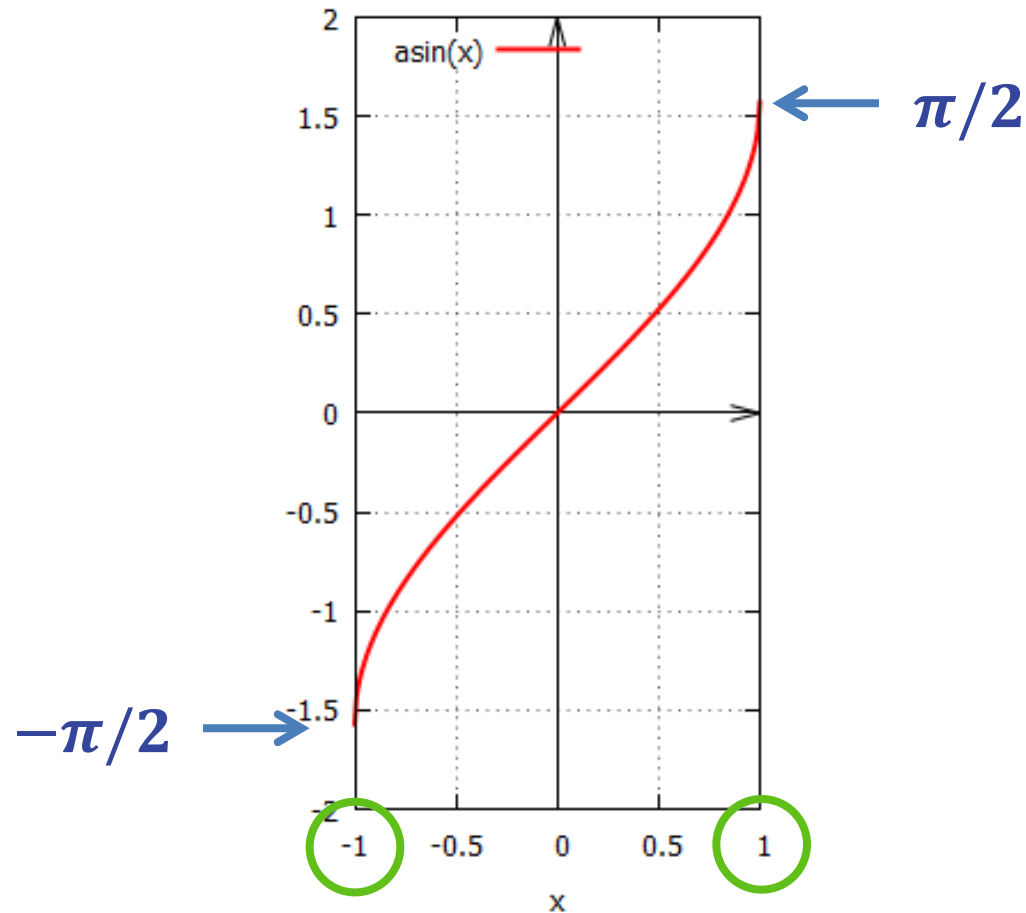
PL

EN



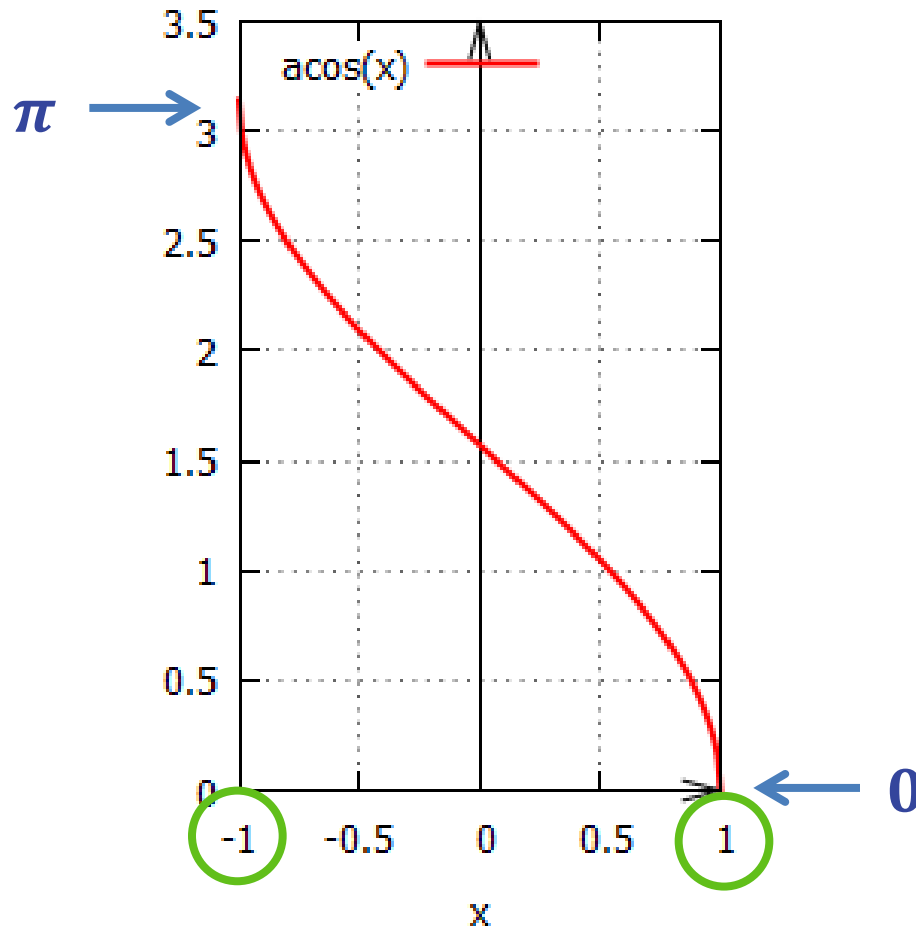
Funkcje kołowe

- $\text{asin}(x) \equiv \text{arc sin}(x) \equiv \sin^{-1}(x)$



Funkcje kołowe

- $\arccos(x) \equiv \arccos(x) \equiv \cos^{-1}(x)$



Funkcje kołowe

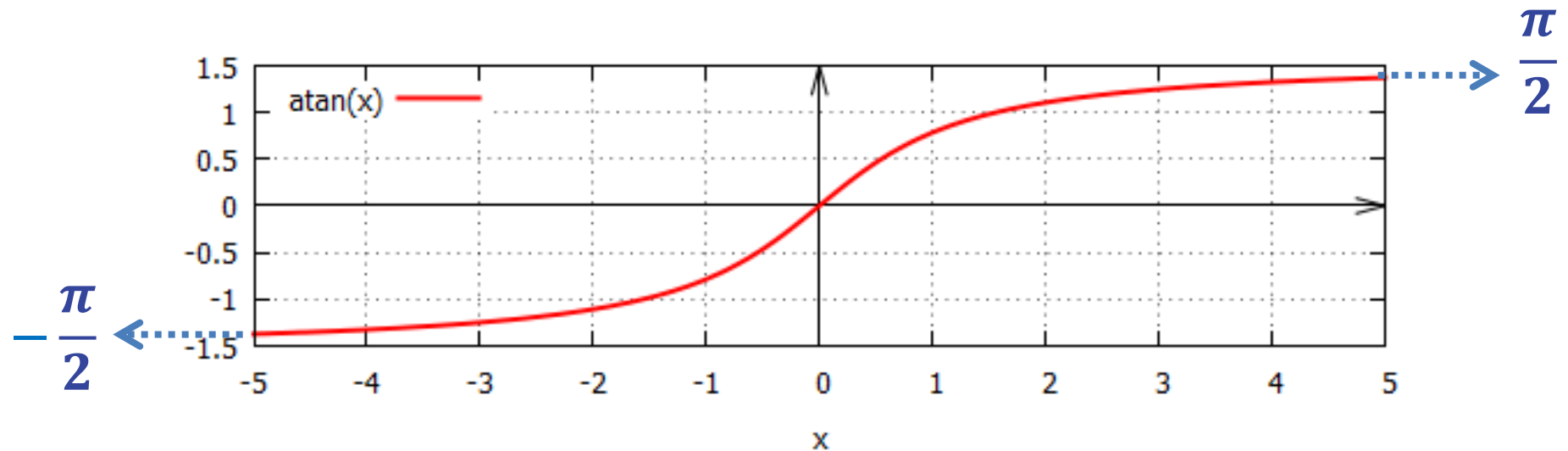
- $\text{atan}(x) \equiv \text{arc tg}(x) \equiv \tan^{-1}(x) \equiv \text{tg}^{-1}(x)$

EN

PL

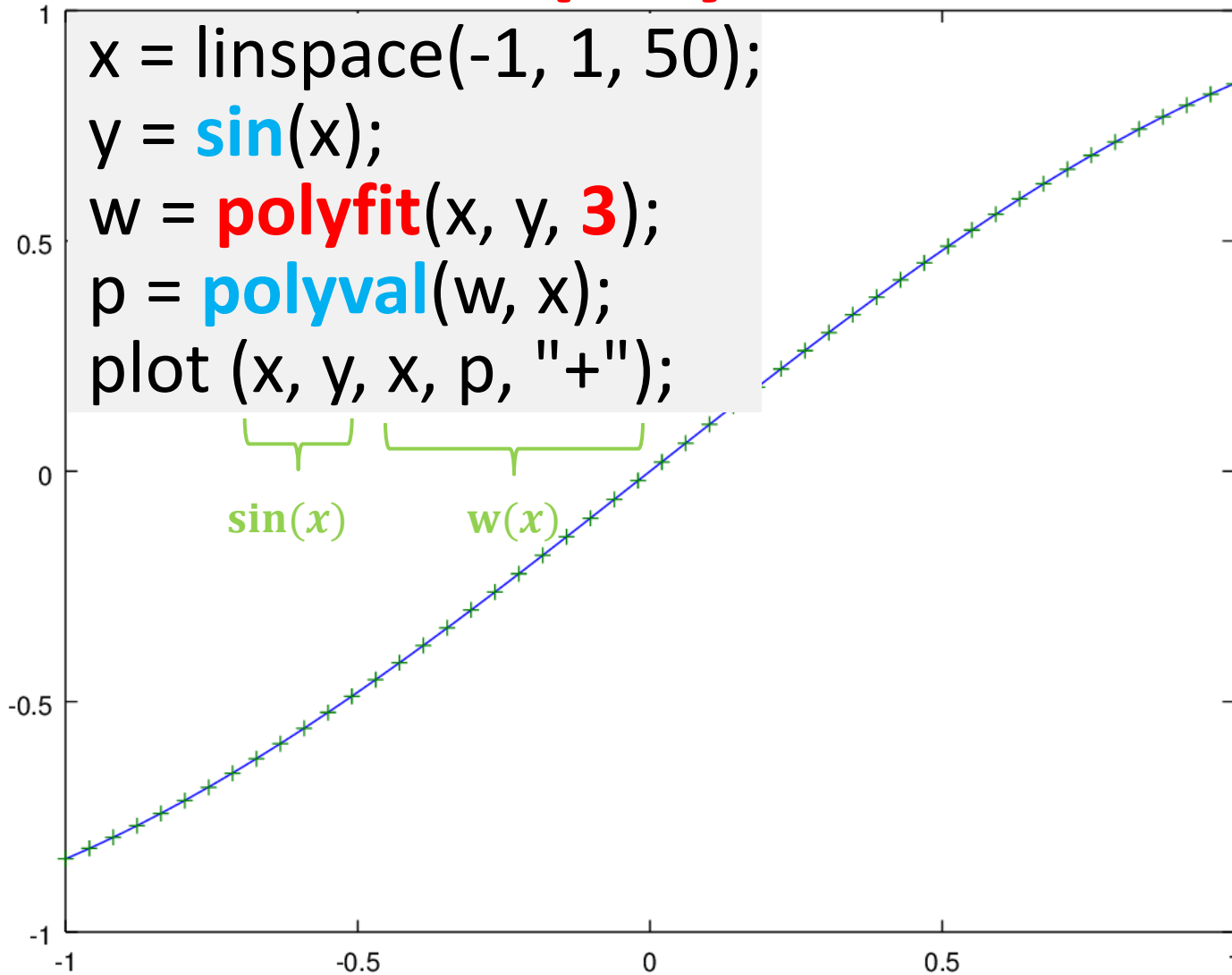
EN

PL



APROKSYMACJA WIELOMIANOWA W OCTAVE

polyfit



polyfit

- Polecenie **polyfit**(x , y , n) służy do **aproksymacji** funkcji $y(x)$ **wielomianem** stopnia n .
- Aproksymacja to **dopasowanie** funkcji (tu: wielomianu stopnia n) do zbioru danych (tu: $y(x)$).
- Wielomiany generowane poleceniem polyfit nie są tożsame wielomianom generowanym przez Wolfram Alpha, ale zbiegają do nich dla $n \rightarrow \infty$.
- Aproksymacja (polyfit) jest czynnością bardziej ogólną od rozkładu w szereg (Wolfram Alpha)

polyfit

- Polecenie **polyfit**(x , y , n) służy do **aproksymacji** funkcji $y(x)$ **wielomianem** stopnia n .
- Aproksymacja to **dopasowanie** funkcji (tu: wielomianu stopnia n) do zbioru danych (tu: $y(x)$).
- Wielomiany generowane poleceniem polyfit nie są tożsame wielomianom generowanym przez Wolfram Alpha, ale zbiegają do nich dla $n \rightarrow \infty$.
- Aproksymacja (polyfit) jest czynnością bardziej ogólną od rozkładu w szereg (Wolfram Alpha)

polyfit

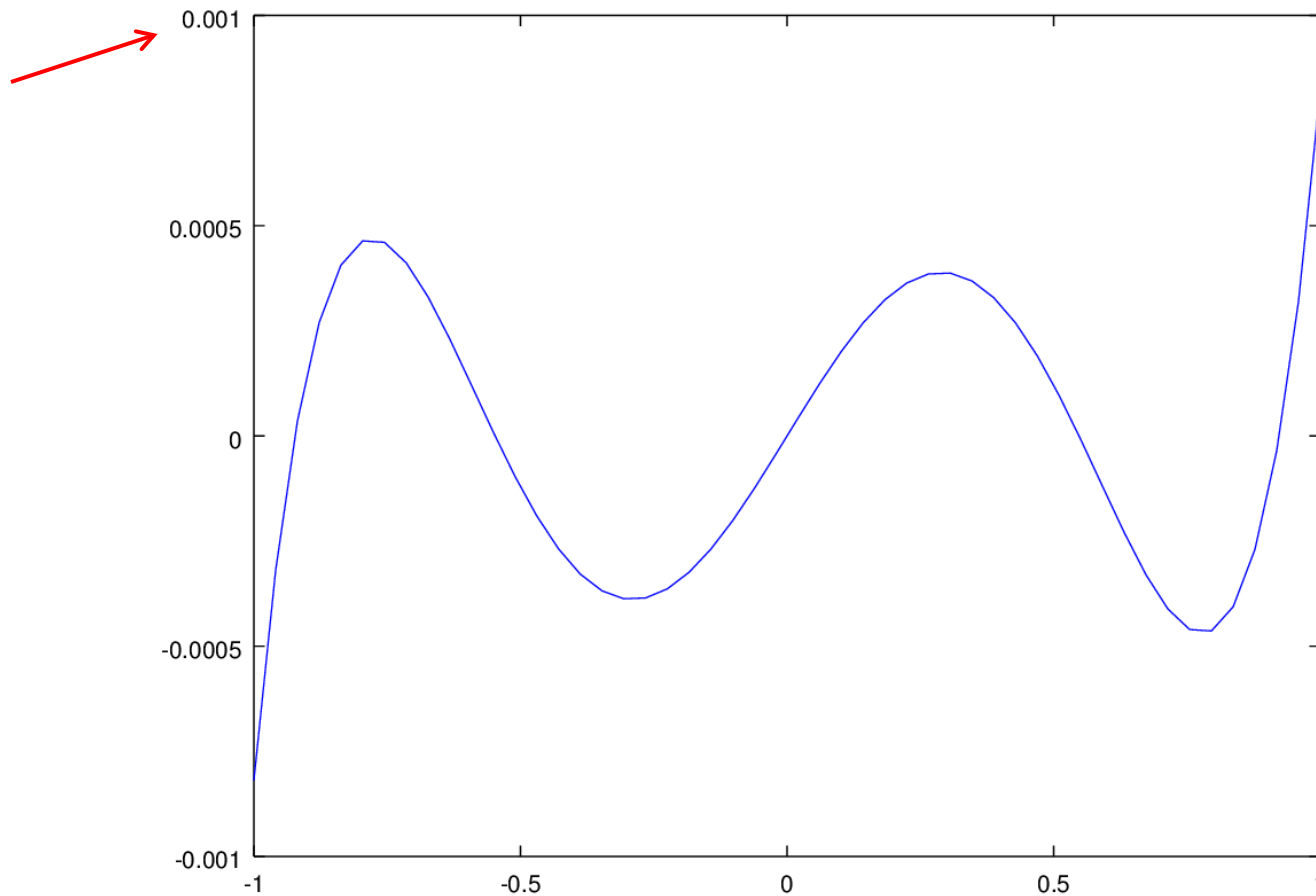


wielomian

dopasuj

Dokładność aproksymacji

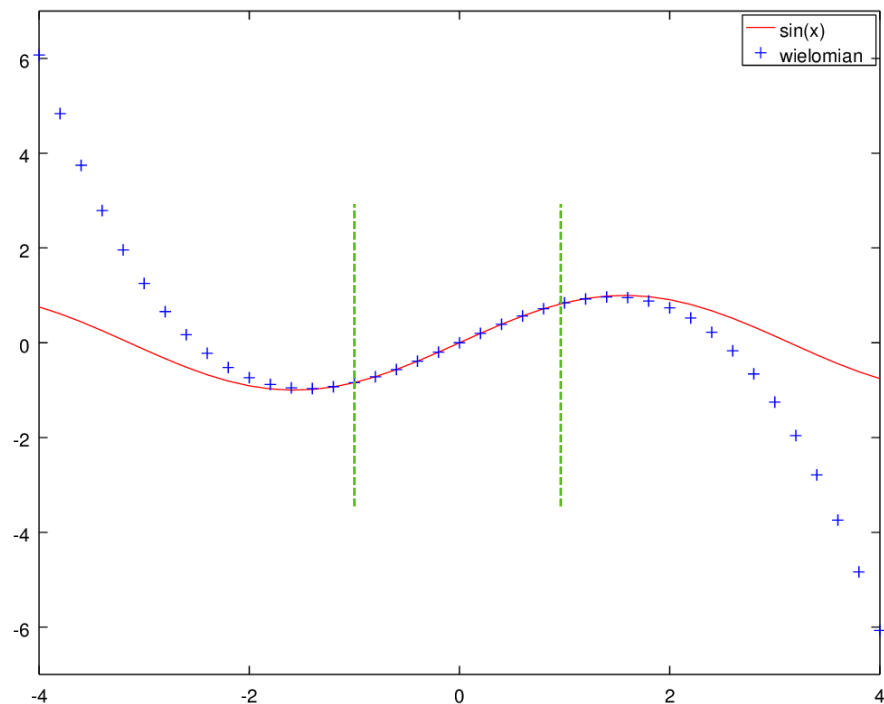
plot (x, y - polyval(w, x));



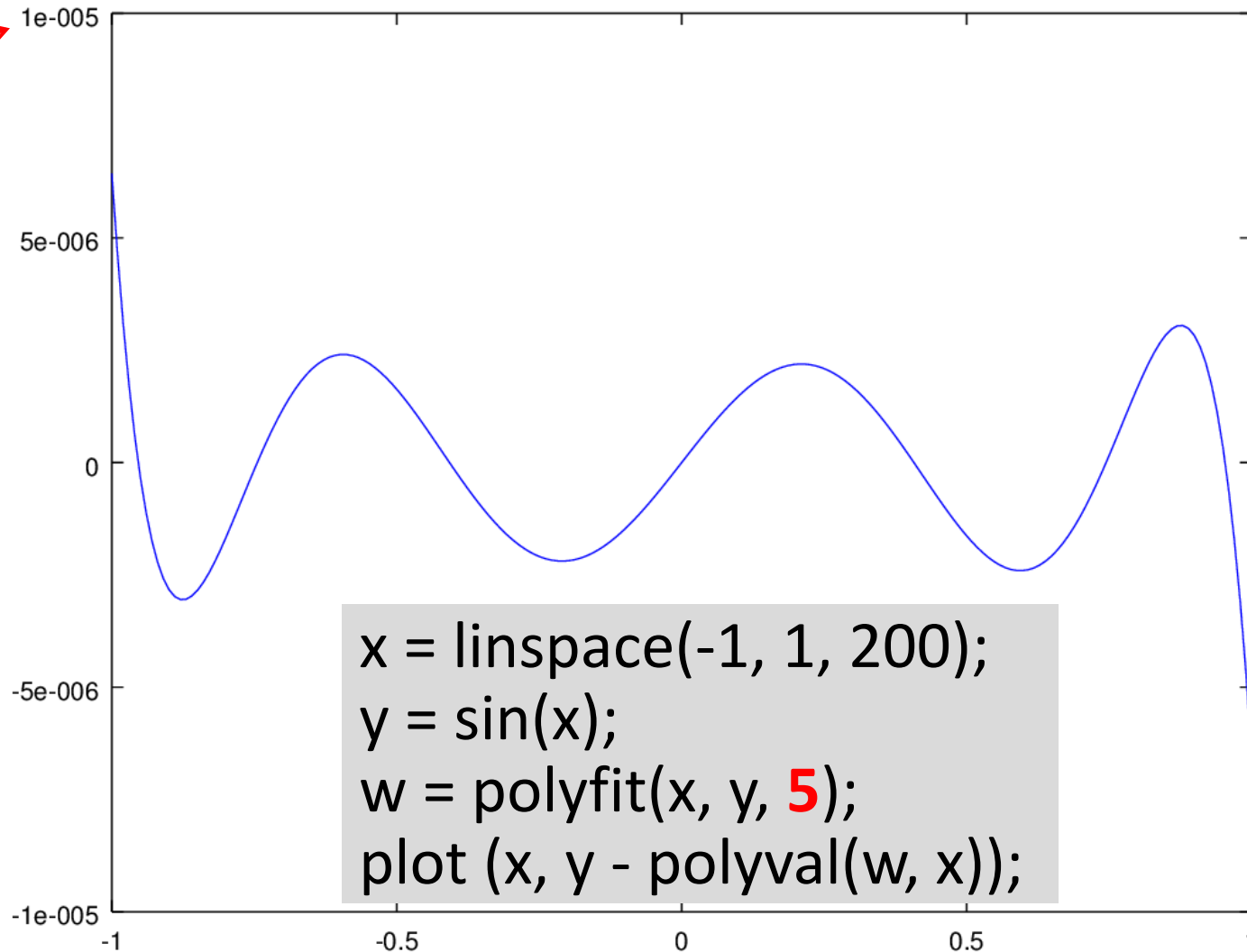
Dokładność aproksymacji

```
x0 = -4:0.2:4;  
y0 = sin(x0);  
plot (x0, y0, "r-;sin(x);", x0, polyval(w, x0));
```

- Poza przedziałem:
brak zbieżności



Dokładność aproksymacji



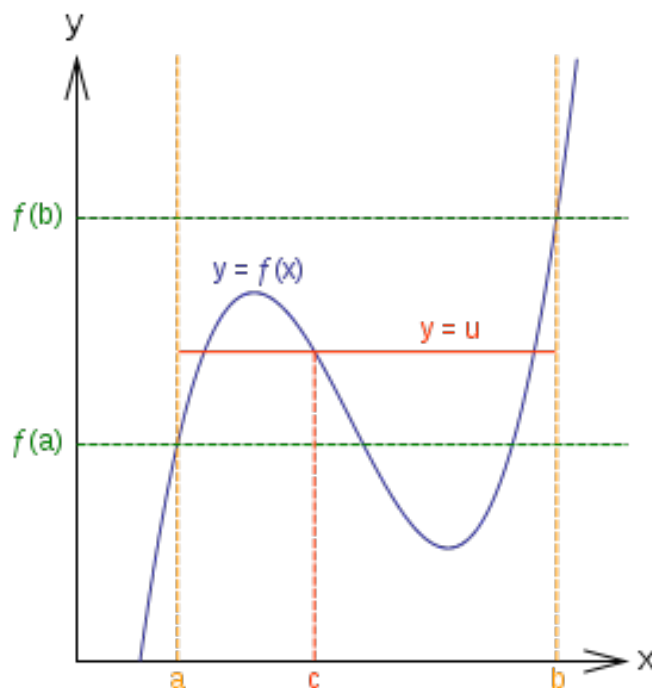
Stopień wielomianu aproksymacyjnego

- Do **aproksymacji danych** (zwłaszcza obarczonych **błędami pomiarowymi**) najczęściej używa się wielomianów stopnia 1,2 lub 3 (zależnie od celu aproksymacji).

WŁASNOŚĆ DARBOUX

Własność Darboux

- Każda funkcja **ciągła** na **przedziale domkniętym** $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$



Ciekawostka

- Dla dowolnej skalarnej ciągłej wielkości fizycznej (temperatura, ciśnienie, wilgotność, etc.) i dla dowolnego koła wielkiego na Ziemi (np. równika, dowolnego południka) istnieją dwa przeciwległe punkty na tym kole, dla których dana wielkość skalarna ma dokładnie taką samą wartość.