Uniwersytet Wrocławski

Funkcje

Część druga

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2015

GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

Granica funkcji

- Funkcja $f\colon \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ ma **w punkcie** x_0 **granicę** g wtedy i tylko wtedy gdy **dla każdego ciągu** (x_n) **o wyrazach w dziedzinie** A **i różnych od** x_0**, zbieżnego do** x_0 zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Fakt ten zapisujemy następująco:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

Granica funkcji

"A jest podzbiorem $\mathbb{R}$"

- Funkcja $f: \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ ma **w punkcie x_0** **granicę** g wtedy i tylko wtedy gdy **dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach w dziedzinie A i różnych od x_0, zbieżnego do x_0** zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

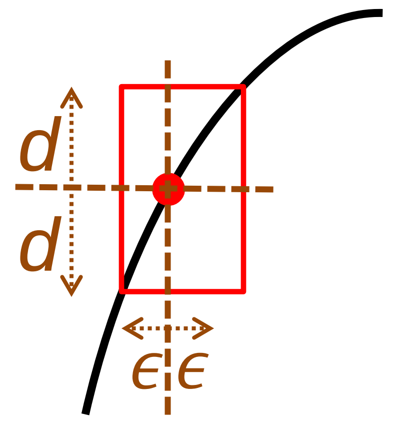
Fakt ten zapisujemy następująco:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

Granica funkcji

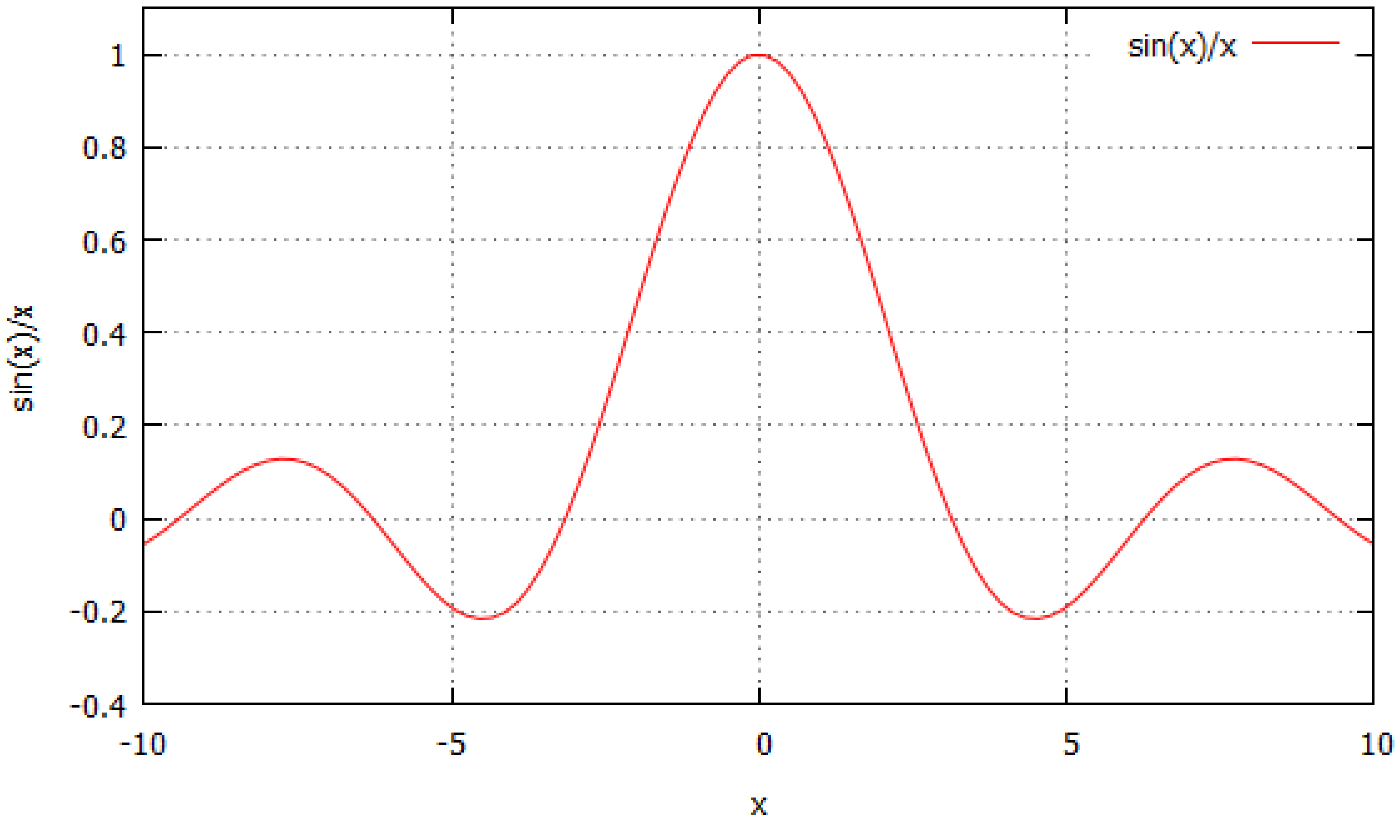
- Definicja nieformalna:

Funkcja rzeczywista f ma w punkcie x_0 granicę g wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $d > 0$ można znaleźć przedział $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ taki, że dla każdego x z tego przedziału, $x \neq x_0$, wartość $f(x)$ różni się od g o nie więcej niż d.



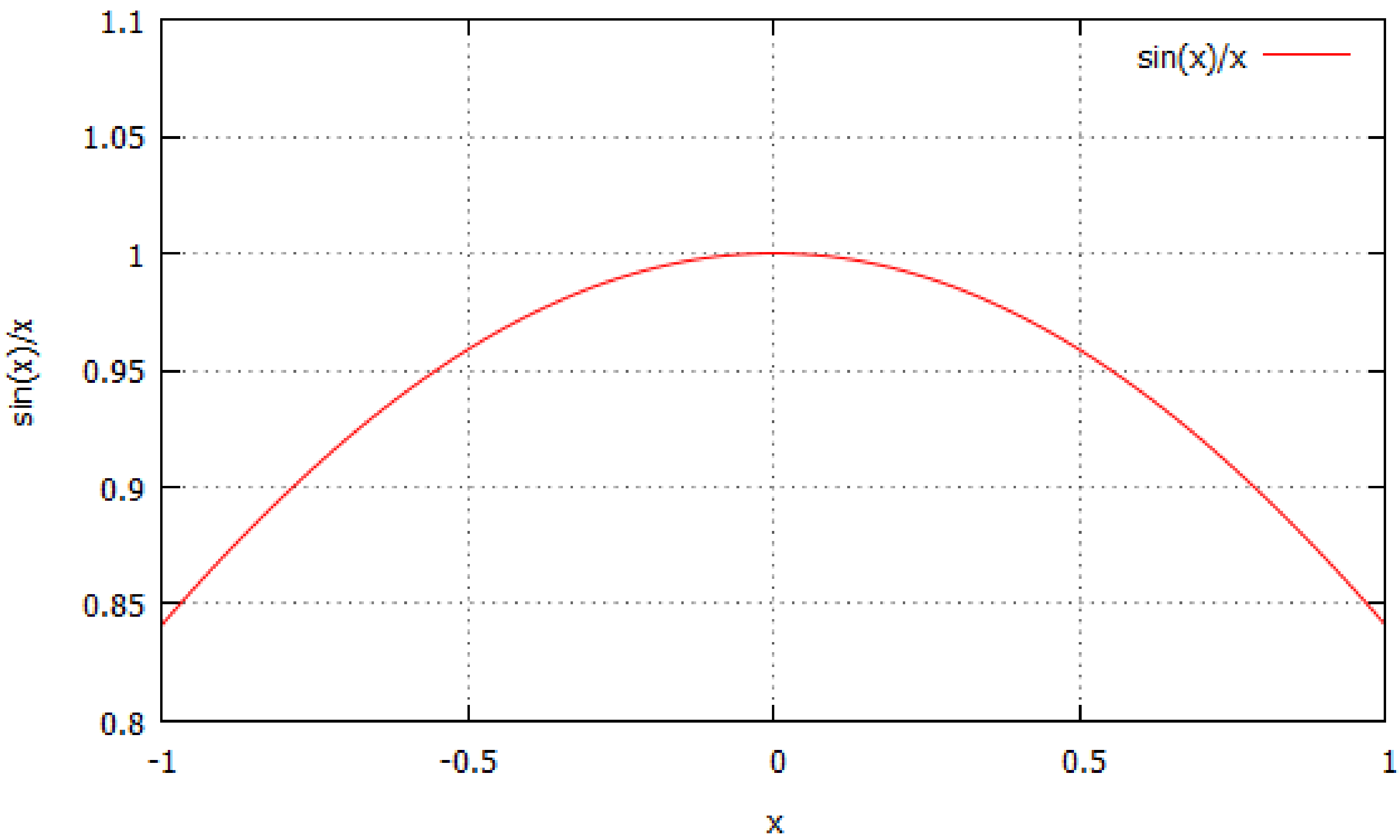
Przykład: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}, x \to 0$

- Jaka wartość dla $x = 0$?



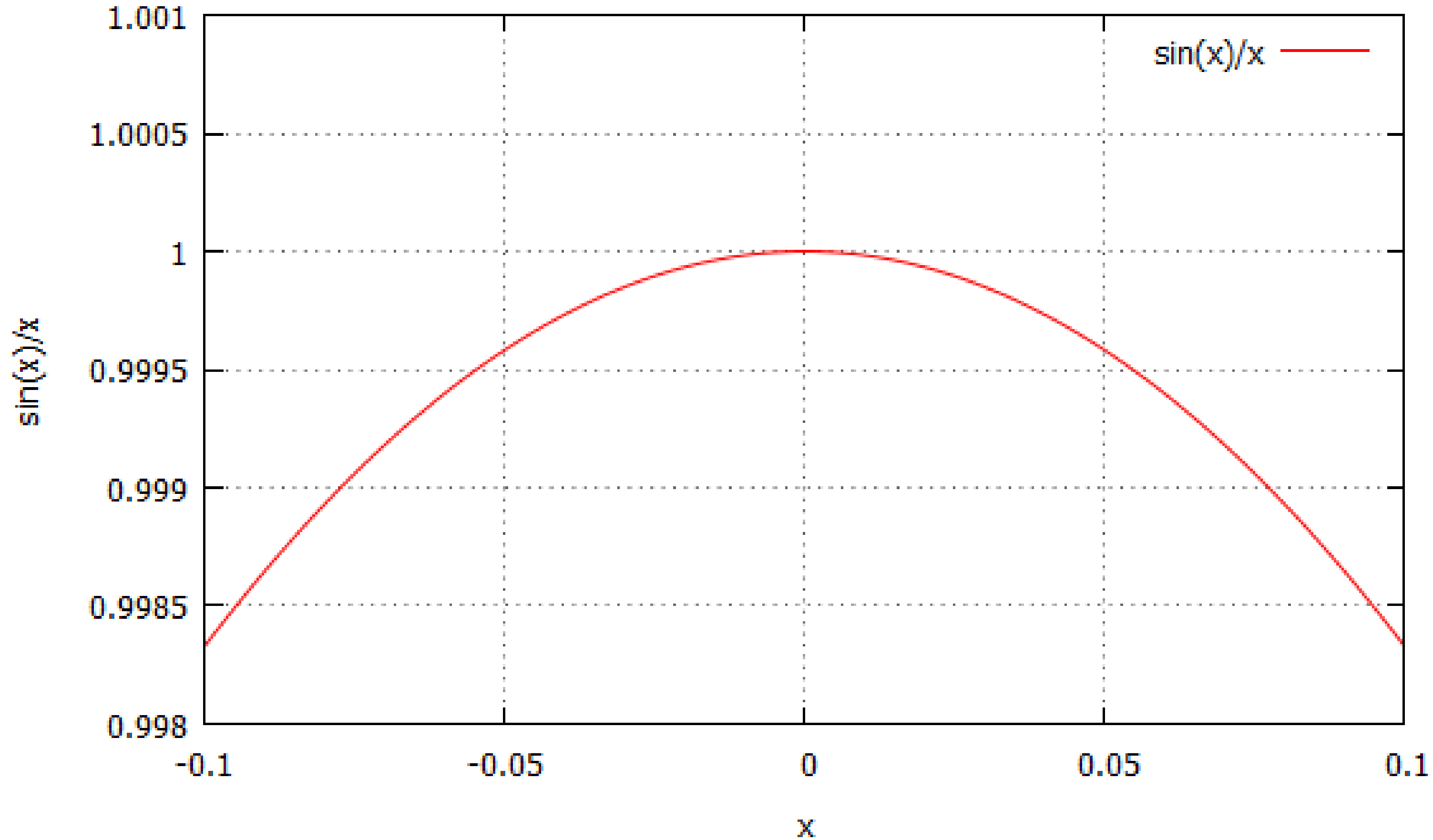
Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \to 0$

- Powiększamy okolice $x = 0$



Przykład: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}, x \to 0$

- Powiększamy okolice $x = 0$



Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \to 0$

- A może tabelka?

x	sin(x)	f(x)
1	**0.84147**	**0.84147**
0.1	**0.099833**	**0.99833**
0.01	**0.0099998**	**0.99998**
0.001	**0.00099999983**	**0.99999983**
0.0001	**0.00009999999983**	**0.9999999983**
…		
0	**0**	**1** (???)

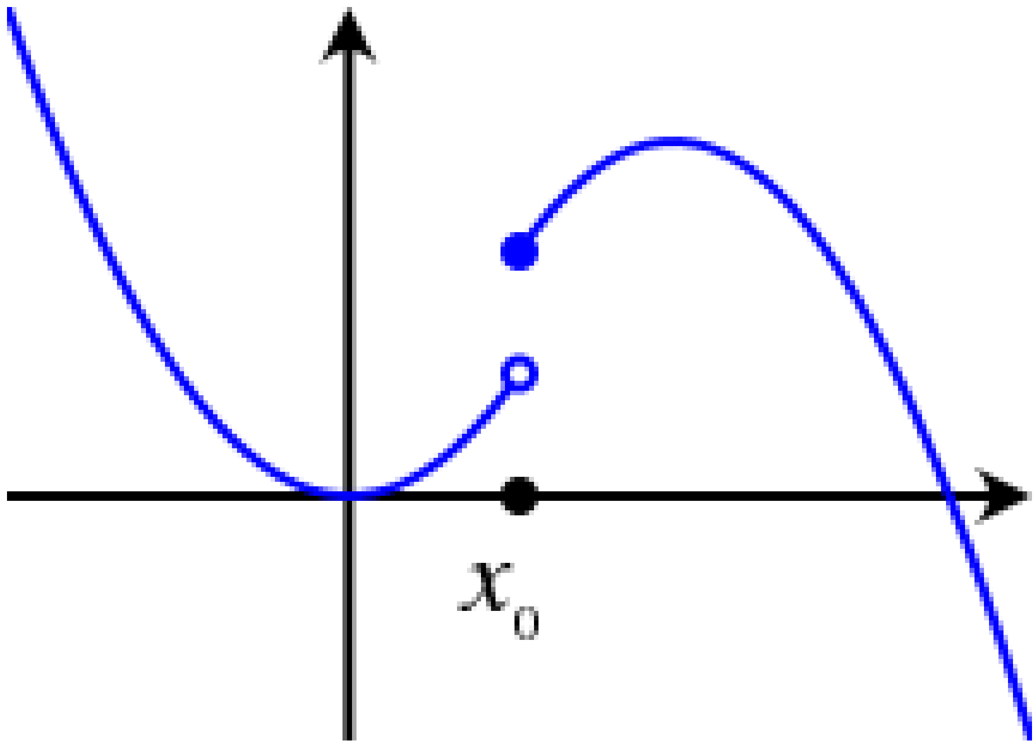
Przykład: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \to 0$

x	sin(x)	f(x)
1	0.84147	0.84147
0.1	0.099833	0.99833
0.01	0.0099998	0.99998
0.001	0.00099999983	0.99999983
0.0001	0.0000999999983	0.9999999983
…		
0	0	1 (???)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

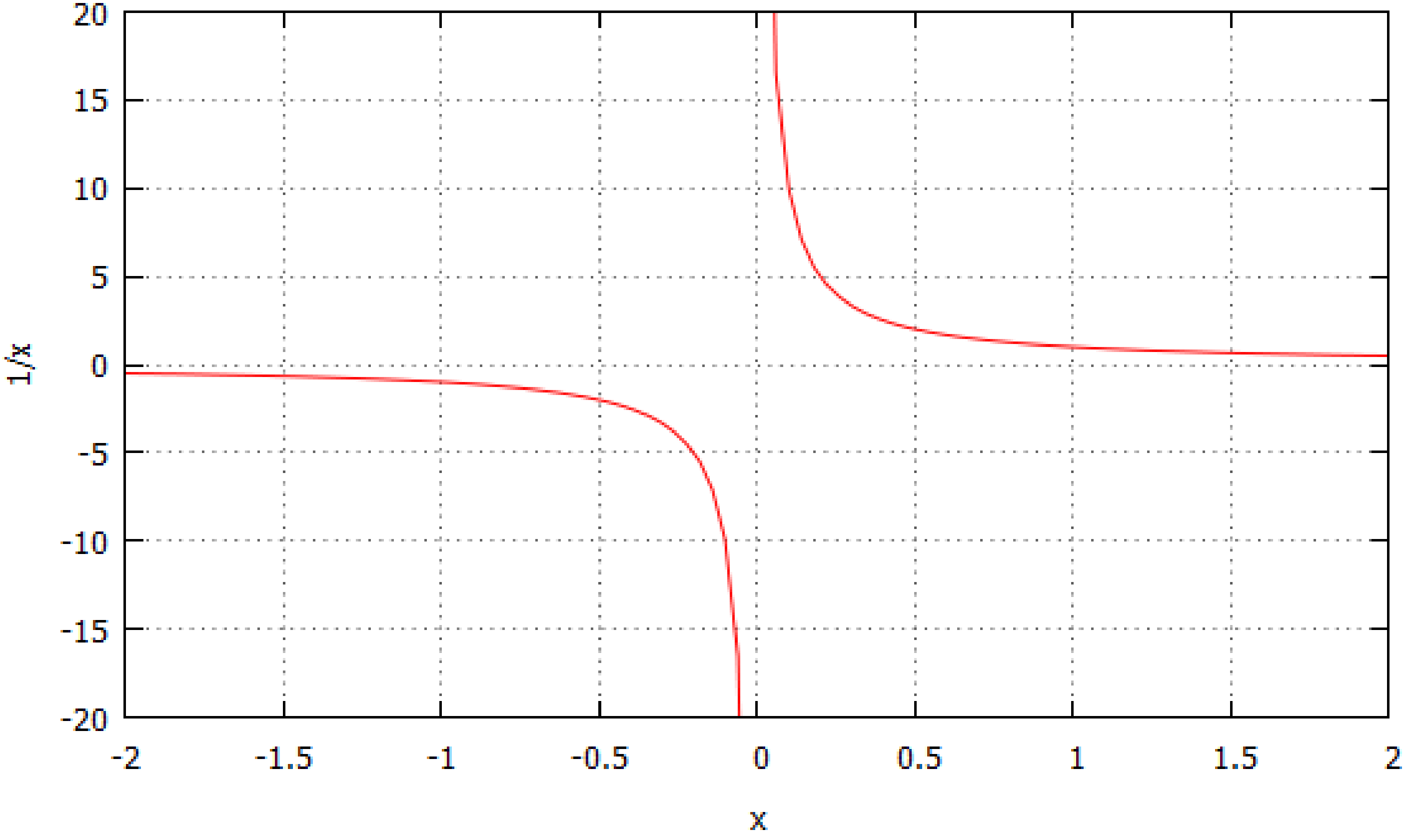
Przykłady

- Ta funkcja nie ma granicy w x_0



Przykłady

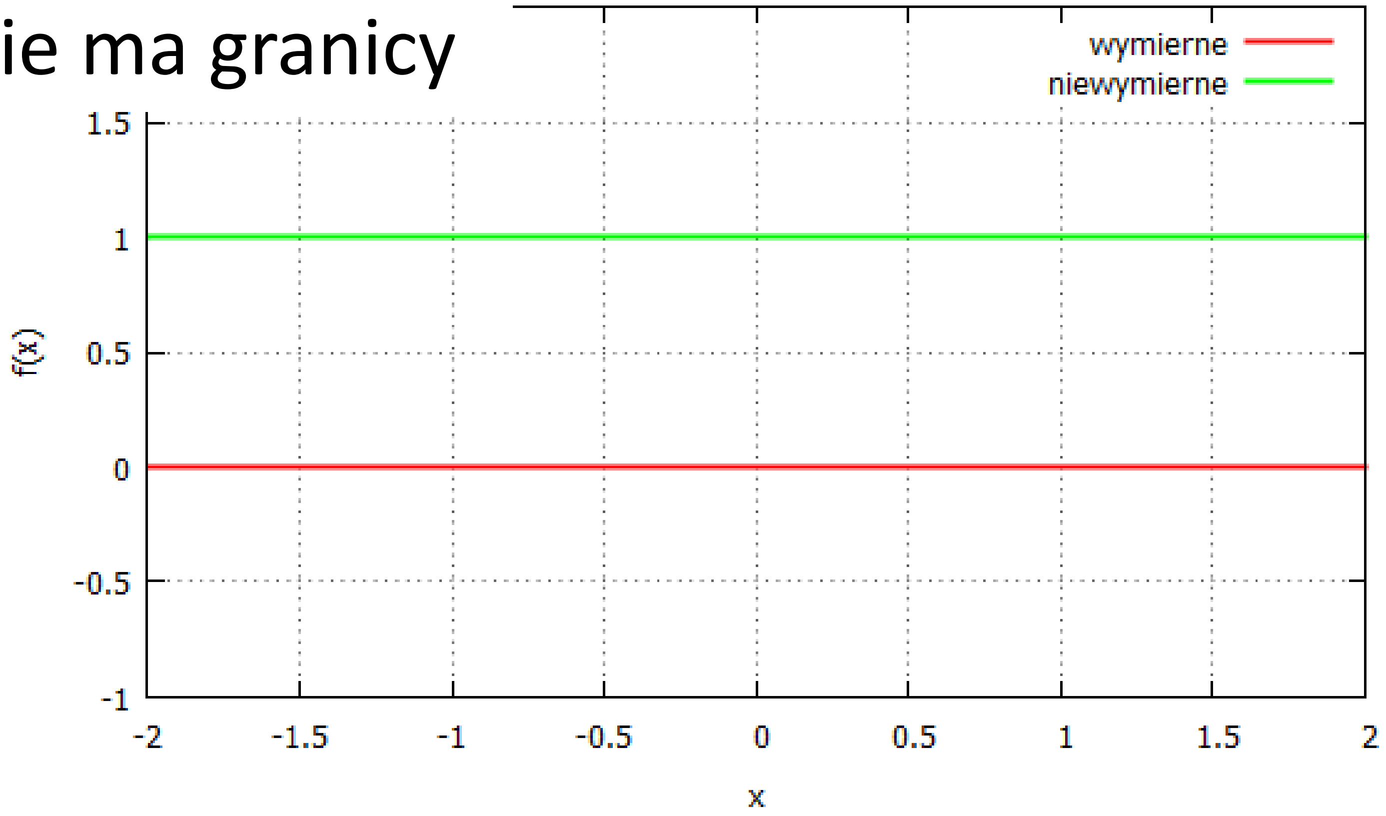
- $f(x) = \frac{1}{x}$ nie ma granicy w $x = 0$



Przykłady

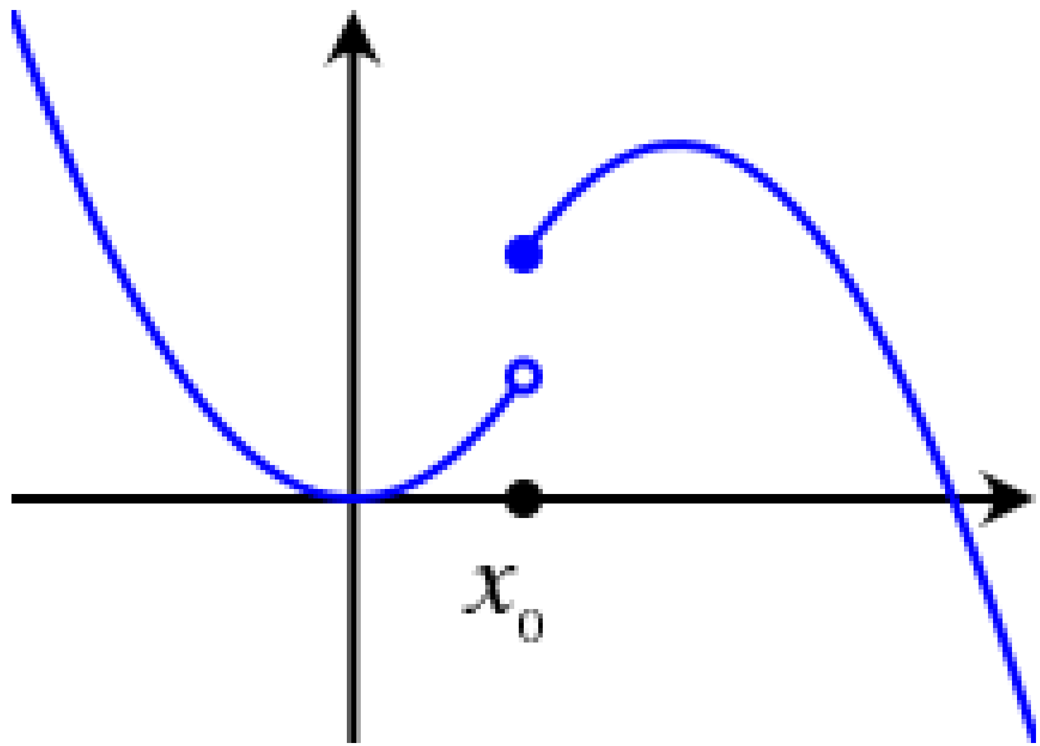
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ jest wymierne} \\ 1, & x \text{ jest niewymierne} \end{cases}$$

nigdzie nie ma granicy



Granica może być lewo- lub prawostronna

- Ta funkcja ma w x_0 granicę prawostronną równą $f(x_0)$ i granicę lewostronną $\neq f(x_0)$



Funkcja ciągła w punkcie

Funkcja f jest **ciągła w punkcie** x_0 jeżeli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

➡Trzy warunki:

1) f musi być określona (mieć wartość) w x_0;
2) f musi mieć granicę w x_0;
3) granica ta musi się równać $f(\mathrm{x}_0)$;

- (założyliśmy, że x_0 nie jest punktem izolowanym)

Funkcja ciągła

- Funkcja f jest **ciągła**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny

Funkcja ciągła na odcinku

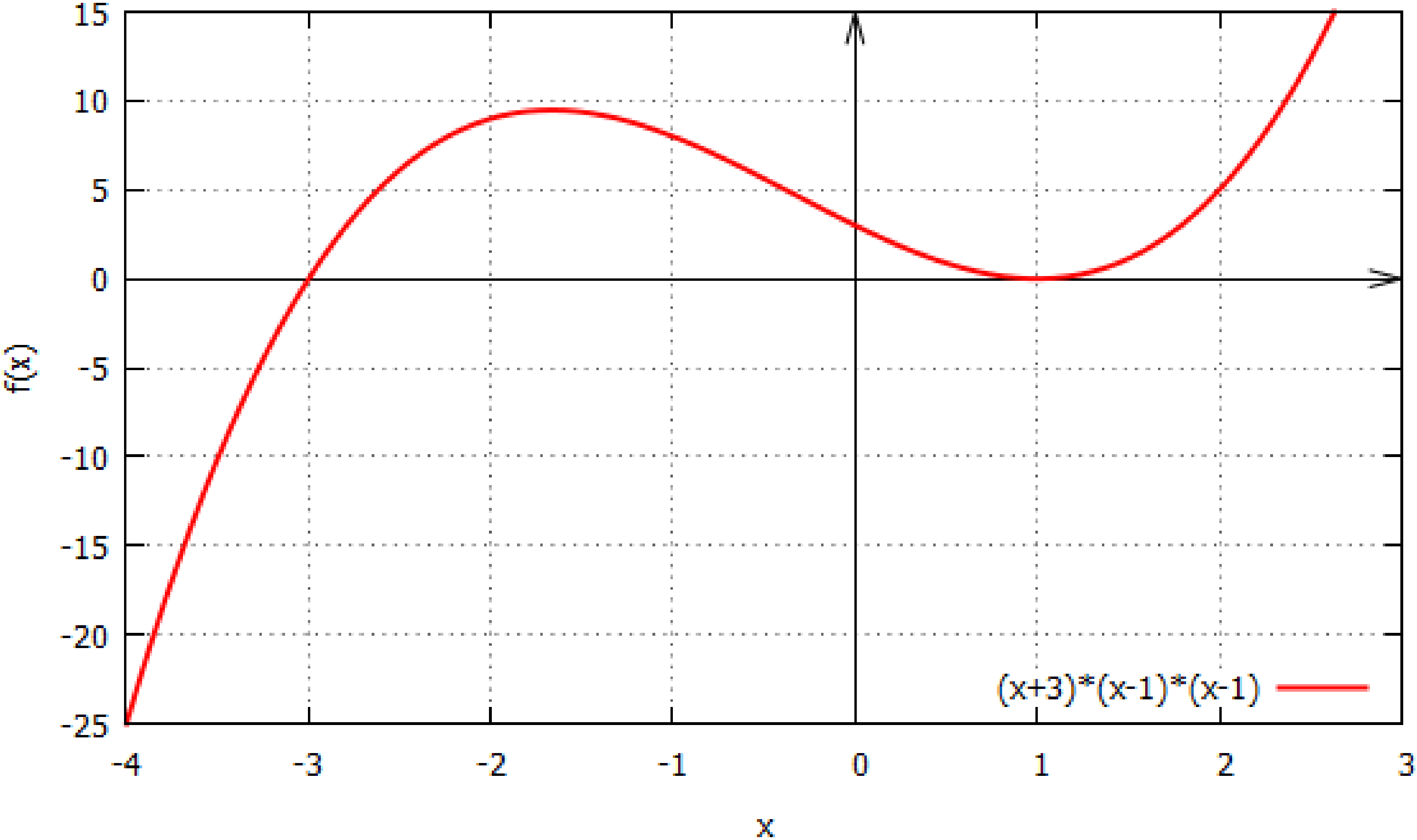
- Funkcja f jest **ciągła na odcinku domkniętym [a,b]**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie odcinka [a,b]
  - a więc musi mieć wartość dla każdego $x \in [a, b]$.

Funkcja ciągła - właściwości

- Suma, różnica, iloczyn, iloraz i złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą
(w swojej dziedzinie)
- Wszystkie **funkcje elementarne** są ciągłe
(w swojej dziedzinie)

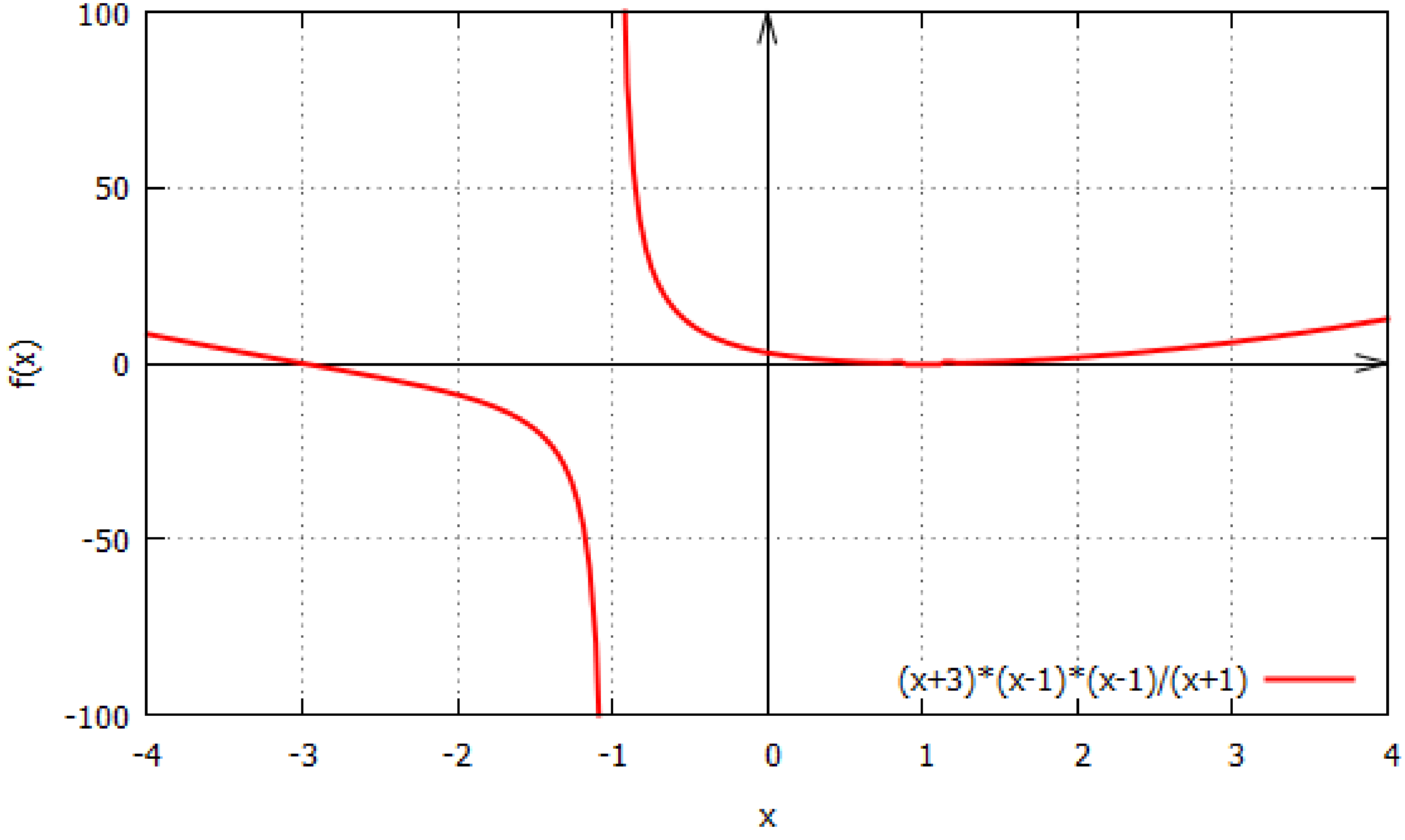
Przykłady

- Wielomiany są funkcjami ciągłymi



Przykłady

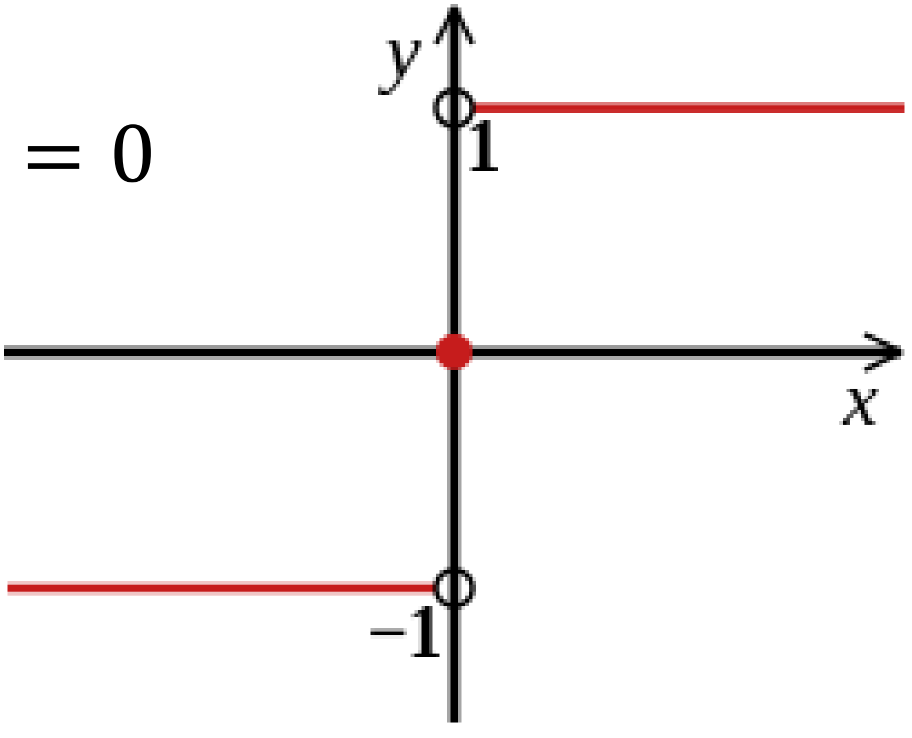
- Funkcje wymierne są funkcjami ciągłymi (!)



Przykłady

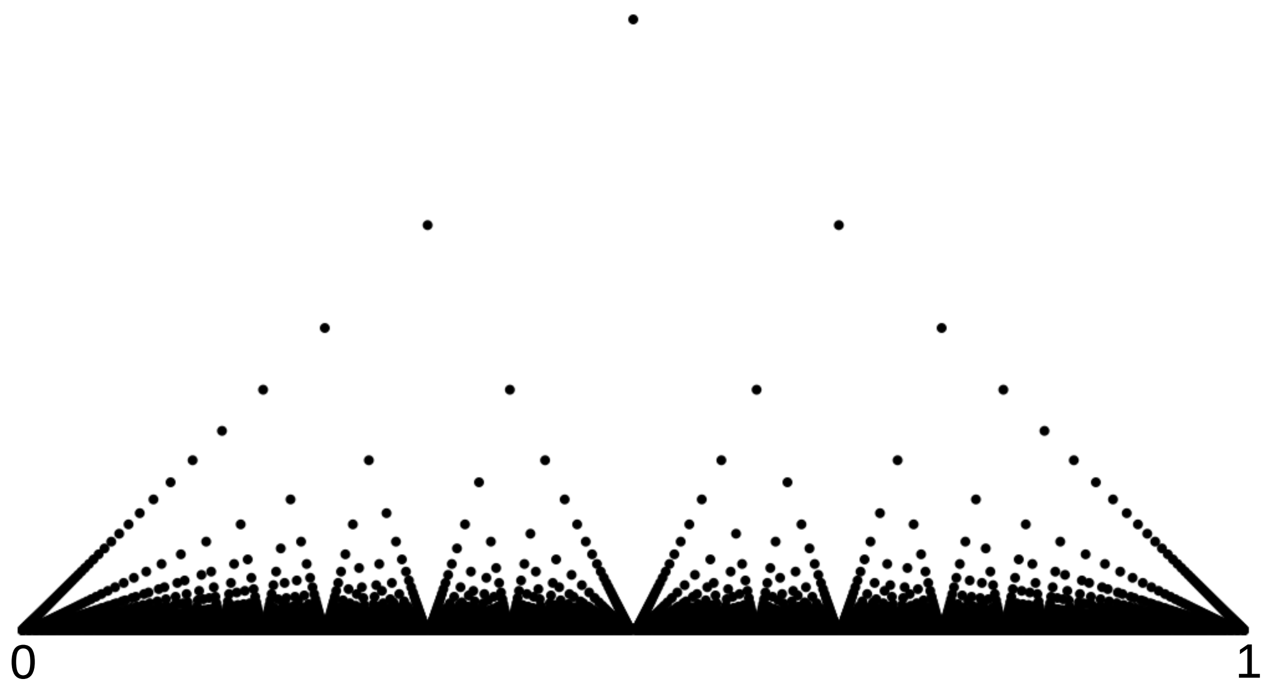
- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

- Funkcja nieciągła w $x = 0$



Przykłady

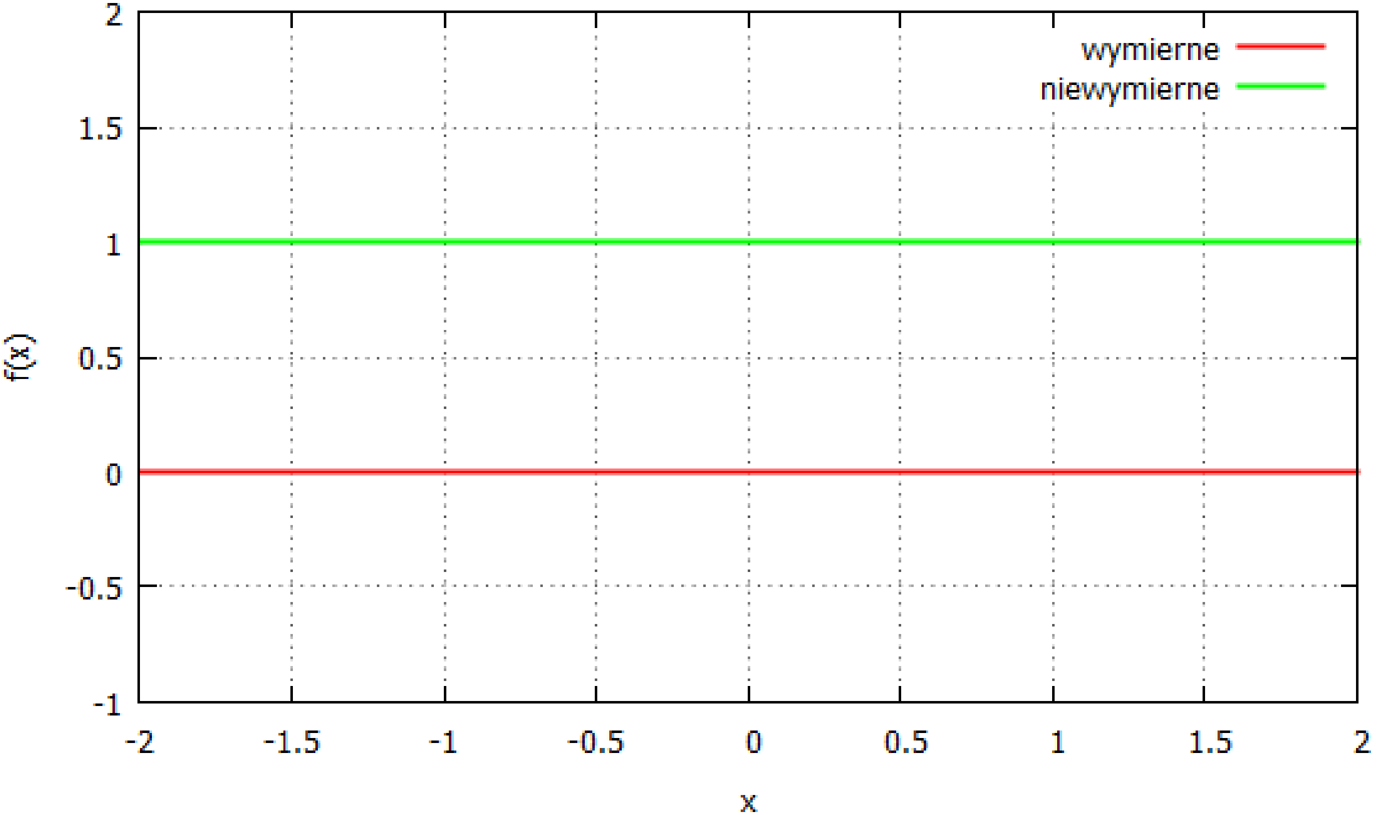
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{jeśli } x = \frac{p}{q} \text{ (nieskracalny)} \\ 0 & \text{jeśli } x \text{ jest niewymierne} \end{cases}$
- funkcja ciągła w każdym x niewym.



Przykłady

- $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ jest wymierne} \\ 1, & x \text{ jest niewymierne} \end{cases}$

nigdzie nie jest ciągła

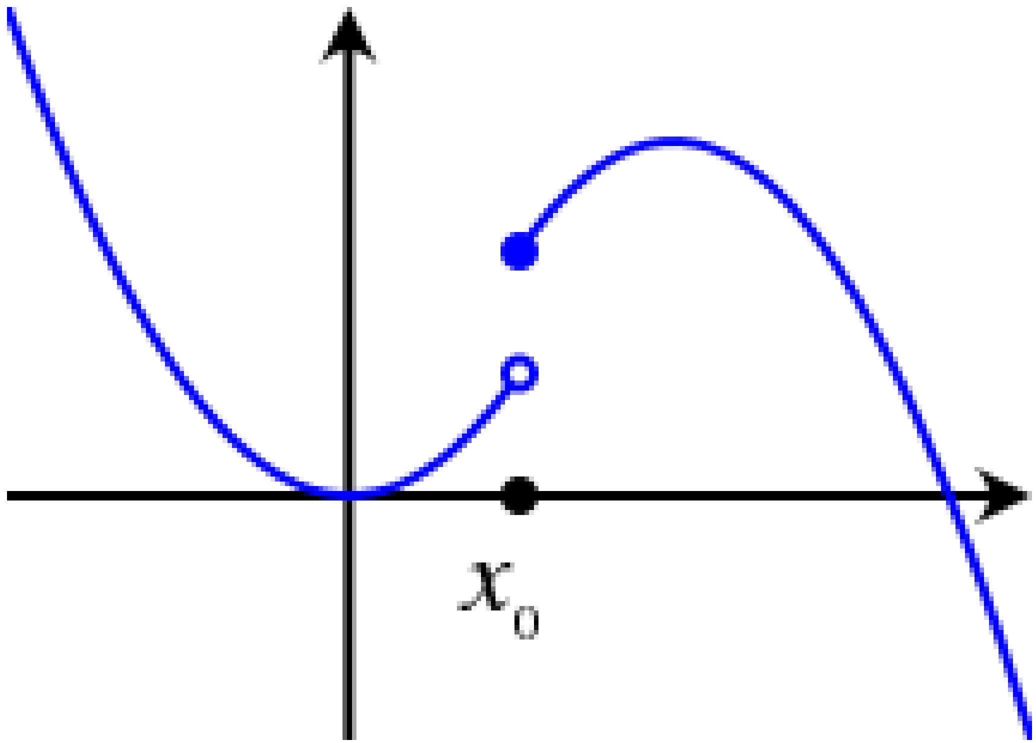


Dziwnie nieciągłe funkcje

- Zostawiamy matematykom

Ciągłość może być lewo- lub prawostronna

- Ta funkcja jest prawostronnie ciągła w x_0



Dlaczego funkcje ciągłe są ważne?

- Są powszechnie spotykane „w życiu”
  - skokowe zmiany zmiennej zależnej przy minimalnej („**infinitezymalnej**”) zmianie zmiennej niezależnej oznaczałyby katastrofę dla wielu działów inżynierii
- Mają „mocne” własności matematyczne
- Są stosunkowo proste do analizy

TWIERDZENIE WEIERSTRASSA

Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa

- Niech f będzie dowolną funkcją rzeczywistą ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$. Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje wielomian $W(x)$ taki, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi $|f(x) - W(x)| < \epsilon$.
- Innymi słowy, każdą funkcję ciągłą na odcinku możemy na tym odcinku przybliżyć (**aproksymować**) wielomianem z dowolną, z góry ustaloną dokładnością.

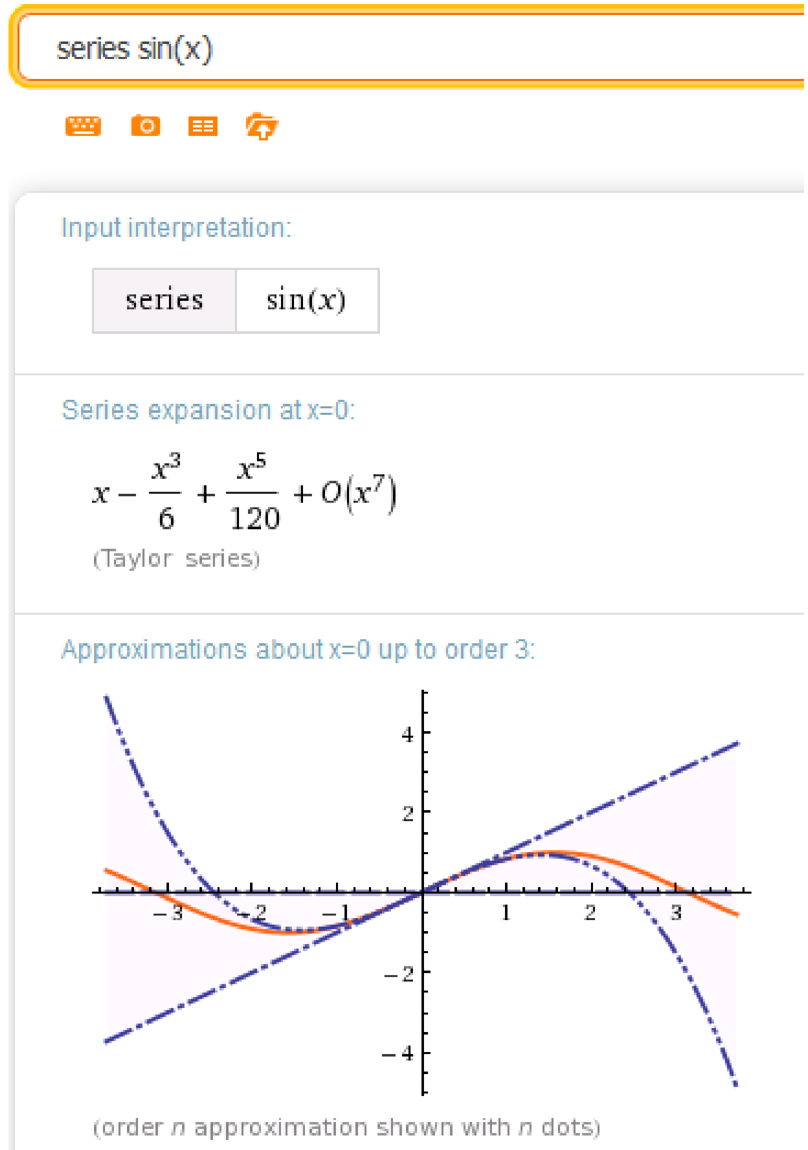
Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa

- To fundamentalne twierdzenie pozwala przybliżyć dowolną funkcje ciągłą pewnym wielomianem (lub: ciągiem wielomianów)
- Wielomianami łatwo się operuje – można je bez problemów dodawać, odejmować, mnożyć, różniczkować (*) i całkować (*)

(*) ale o tym porozmawiamy później

Przykład

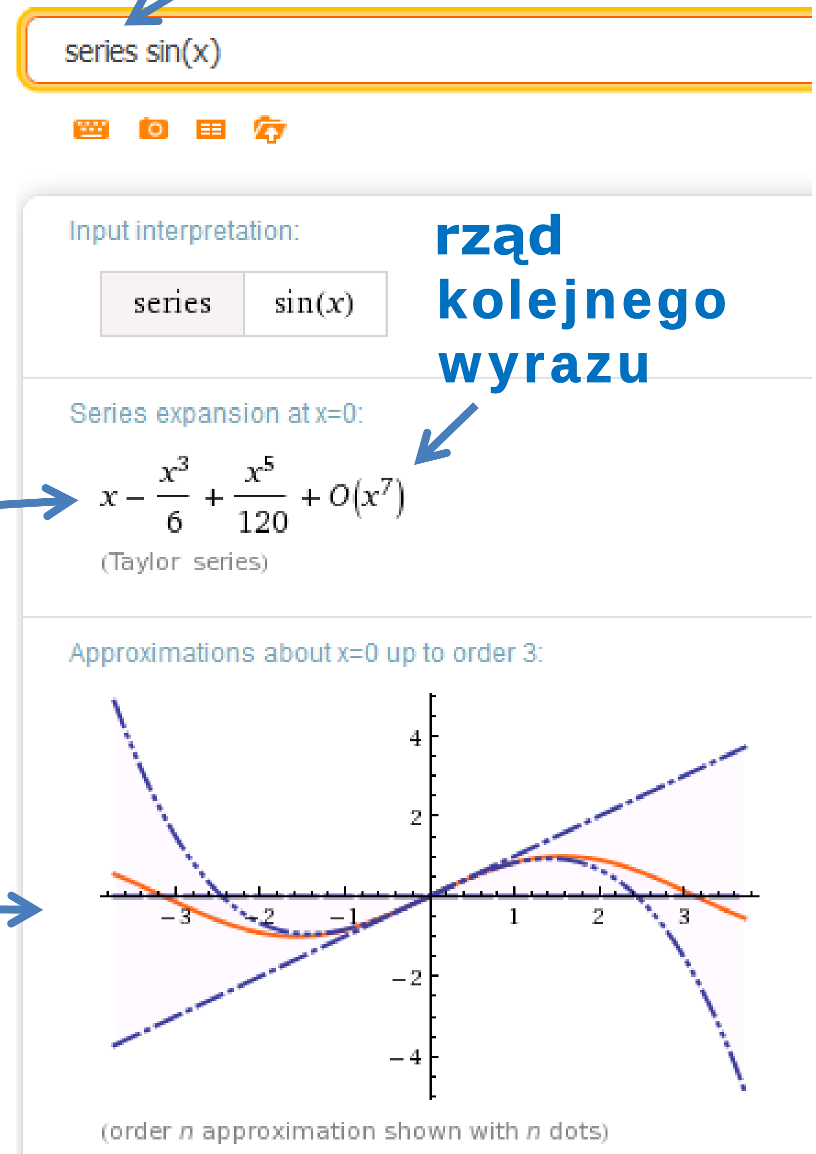
- $f(x) = \sin(x)$



Przykład

„series”

- $f(x) = \sin(x)$



rząd kolejnego wyrazu

Wielomiany aproksymacyjne (szereg)

Coraz lepsze przybliżenie w okolicach $x=0$

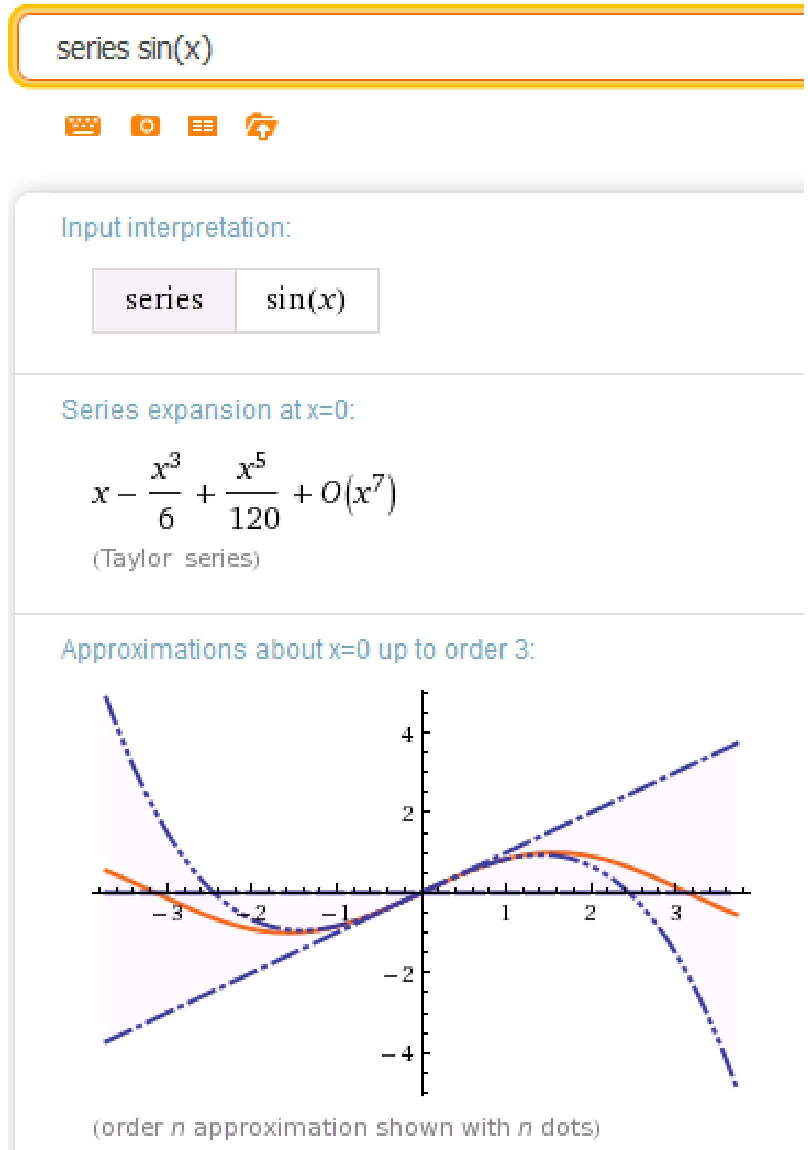
Przykład

- $f(x) = \sin(x)$

Wzór ogólny

Series representations:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!}$$



Przykład

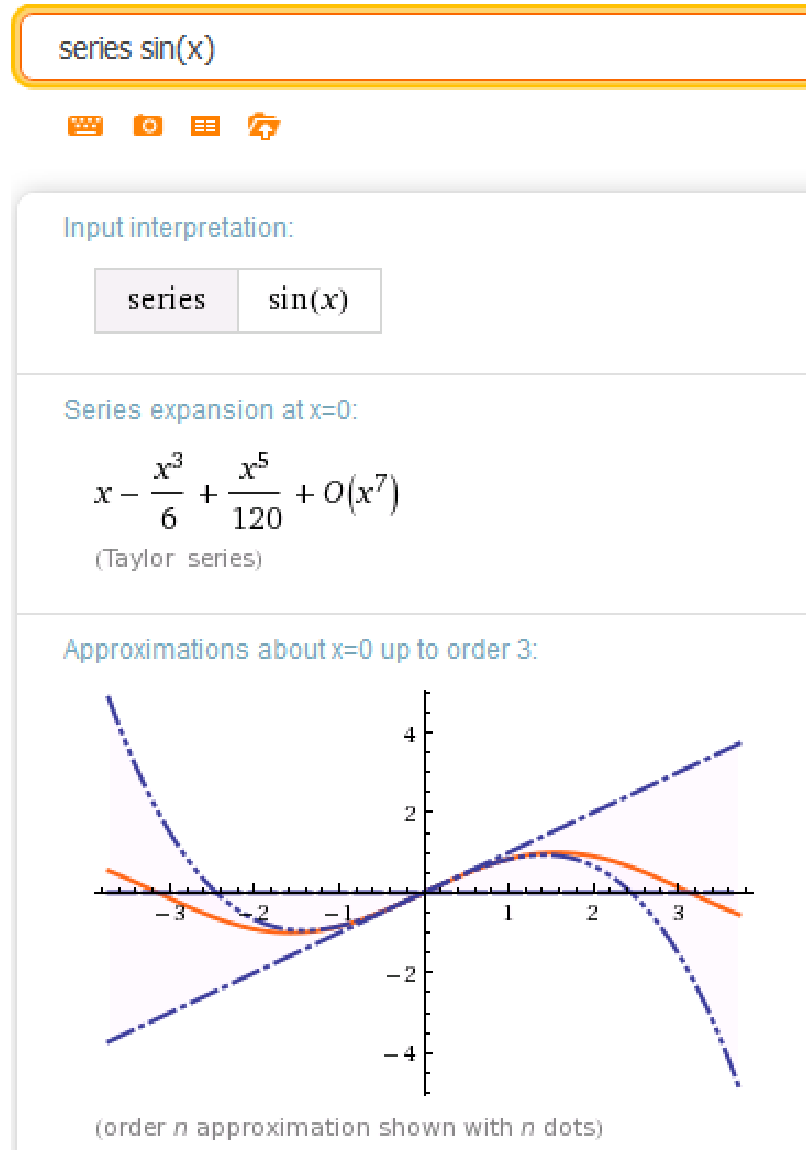
- $f(x) = \sin(x)$

Wzór ogólny:

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

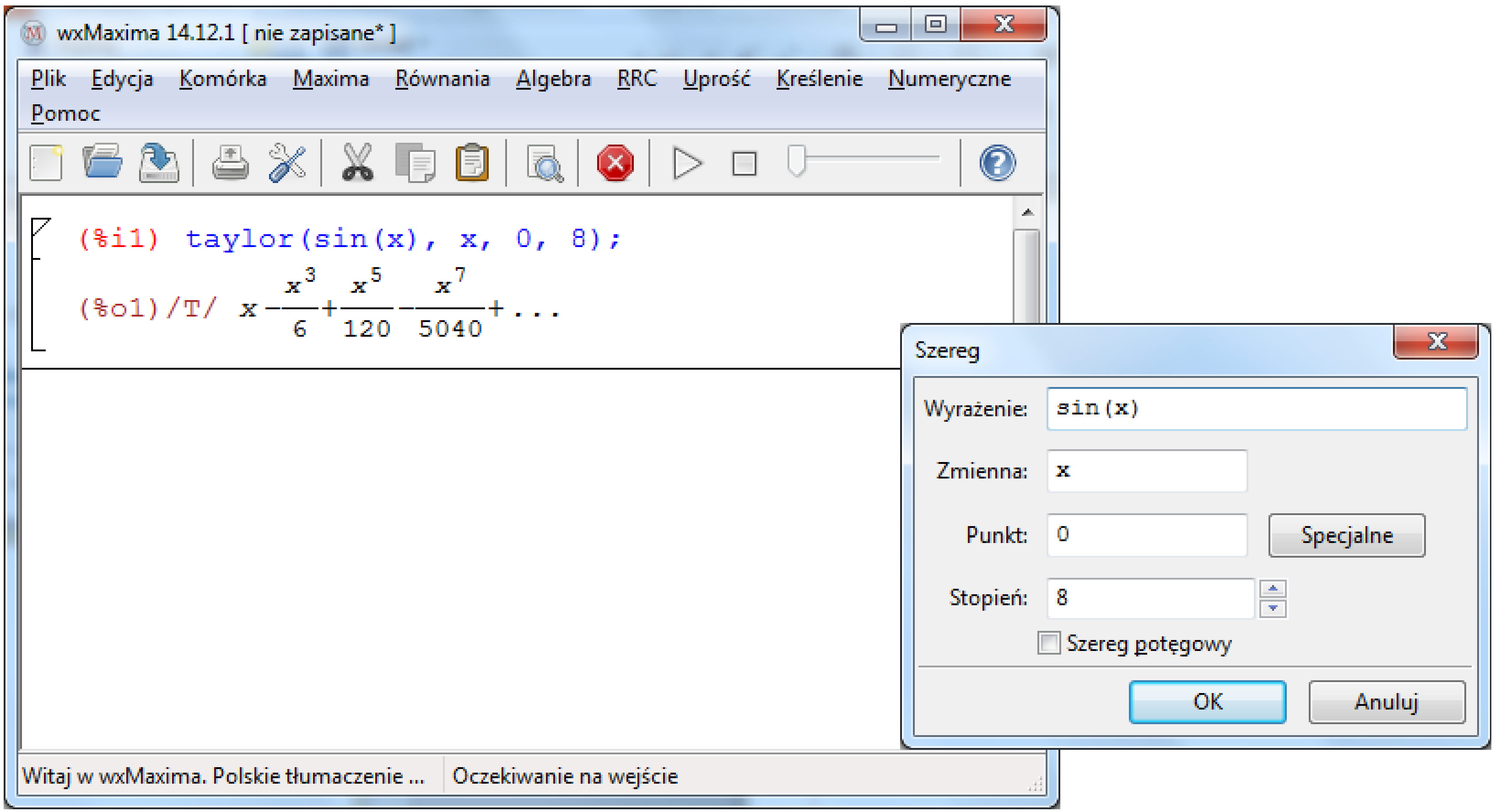
Series representations:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!}$$



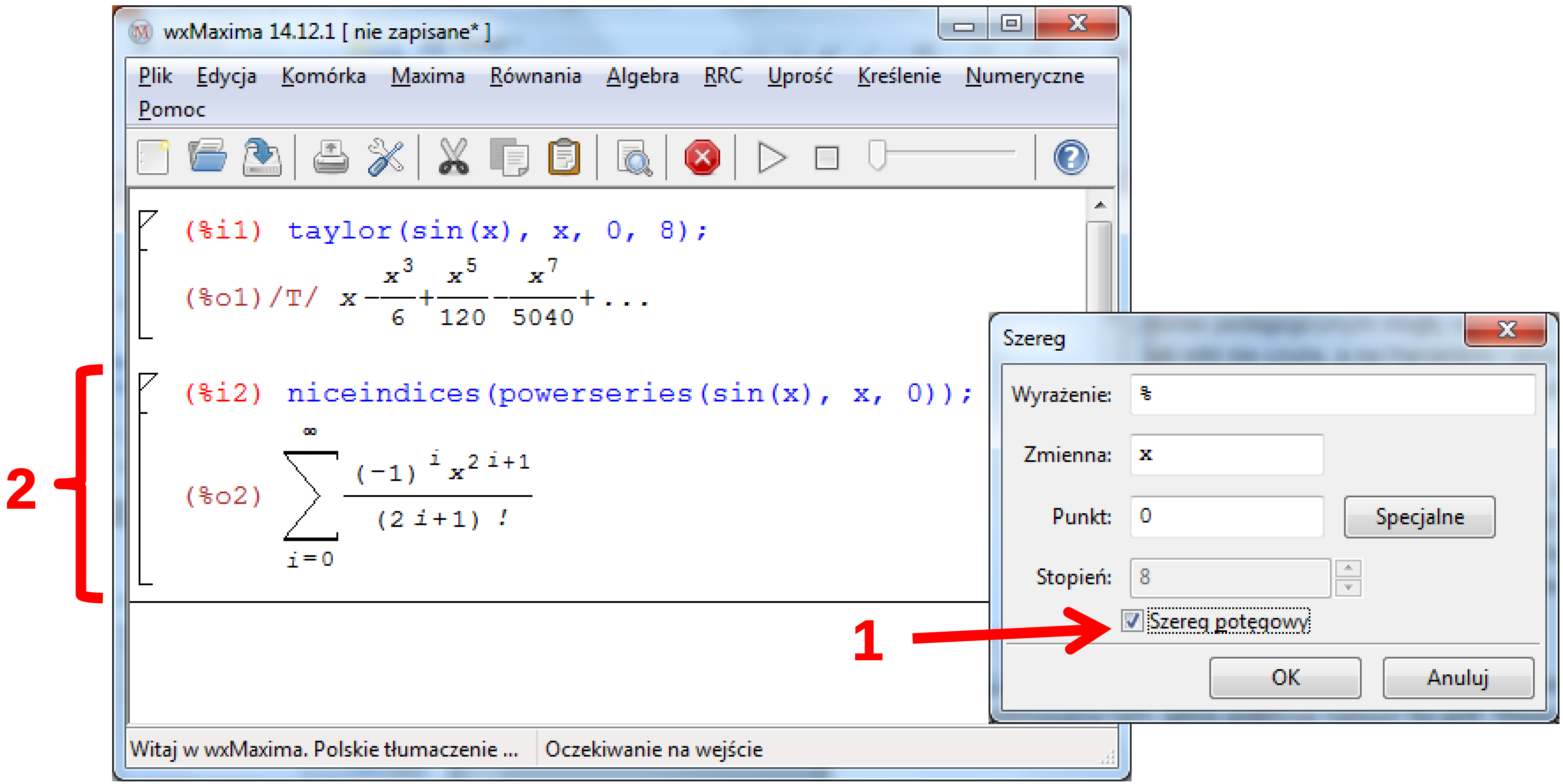
wxMaxima

- W menu wybierz: `RRC/Rozwiń w szereg`



wxMaxima

- Rozwinięcie algebraiczne (o ile istnieje):



ZAAWANSOWANE FUNKCJE ELEMENTARNE

Definicje funkcji elementarnych

- $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- $\cos(x) = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- $\mathrm{e}^x \equiv \mathbf{exp}(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

Definicje funkcji elementarnych

- $\ln(1+x) \equiv \log_e(1+x) =$
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$(|x| < 1)$$

lub:

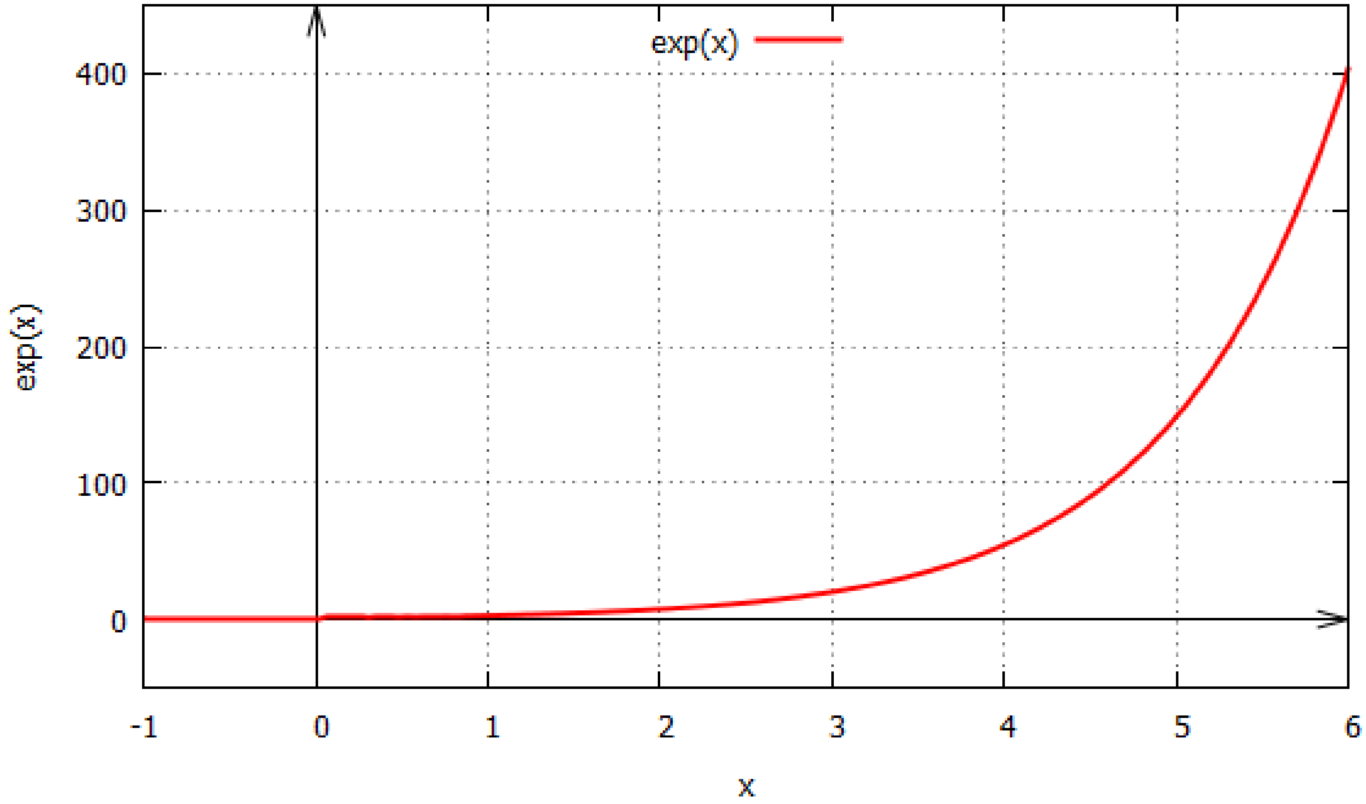
- $\ln(x) = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right]$
$$(x > 0)$$

Definicje funkcji elementarnych

- Skoro zdefiniowaliśmy $\ln(x)$ oraz $\exp(x)$, to:
- $a^x = e^{(\ln a)\cdot x} = \exp[x \cdot \ln(a)]$
- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
- $x^a = e^{(\ln x)\cdot a} = \exp[a \cdot \ln(x)]$

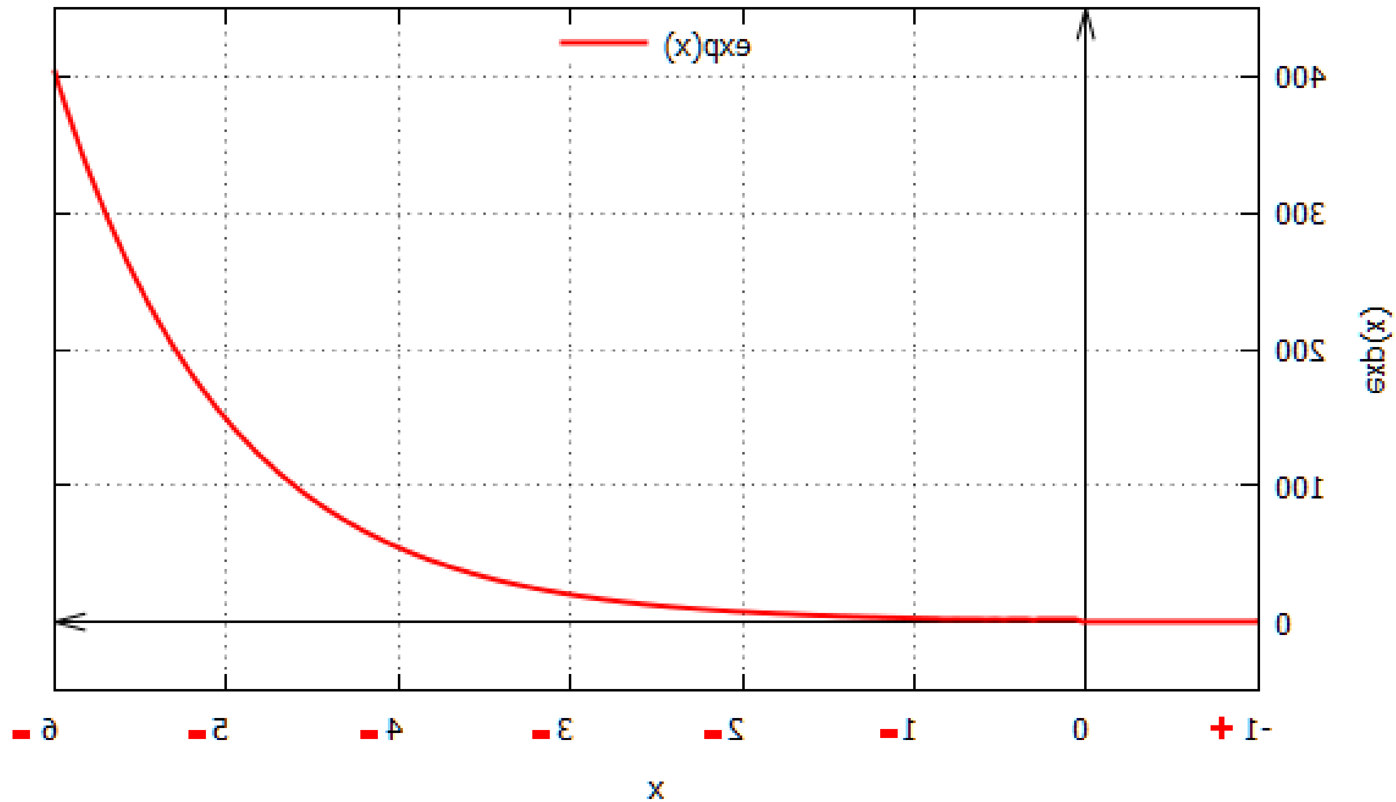
exp(x)

- $\exp(x)$ jest funkcją bardzo szybko rosnącą dla $x > 0$ i szybko malejącą gdy $x \to -\infty$



exp(-*x*)

- $\exp(-x)$ jest funkcją bardzo szybko ~~rosnącą~~ malejącą dla $x > 0$ i szybko ~~malejącą~~ rosnącą gdy $x \to -\infty$



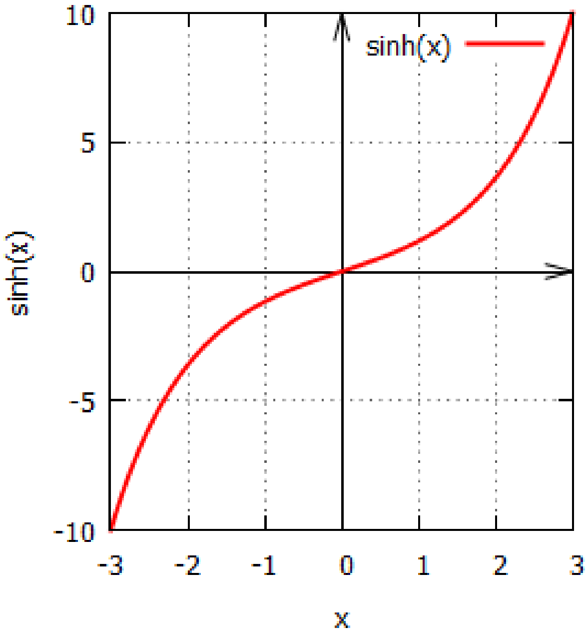
$\exp(ax)$ a b^x

- $\exp(ax) = \mathrm{e}^{ax} = (\mathrm{e}^{a})^{x} = b^{x}$, gdzie $b = \mathrm{e}^{a}$
- Przykład: $2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x = e^{(\ln 2)\cdot x}$
  $\approx e^{0.693147\, x} = \exp(0.693147\, x)$
- Czyli rodzina funkcji $y(x) = \exp(ax)$ jest tożsama funkcjom wykładniczym, $y(x) = \mathrm{b}^x$
- W praktyce zapis $\exp(ax)$ spotyka się częściej niż b^x

Funkcje hiperboliczne

- $\sinh(x) \equiv \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$

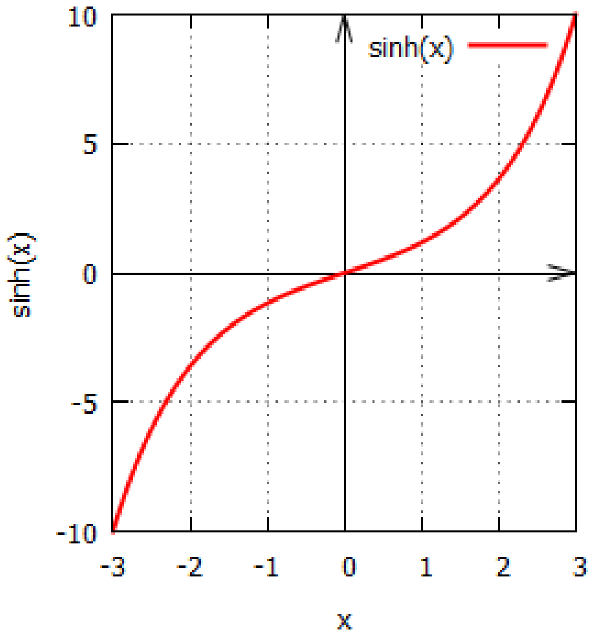
$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

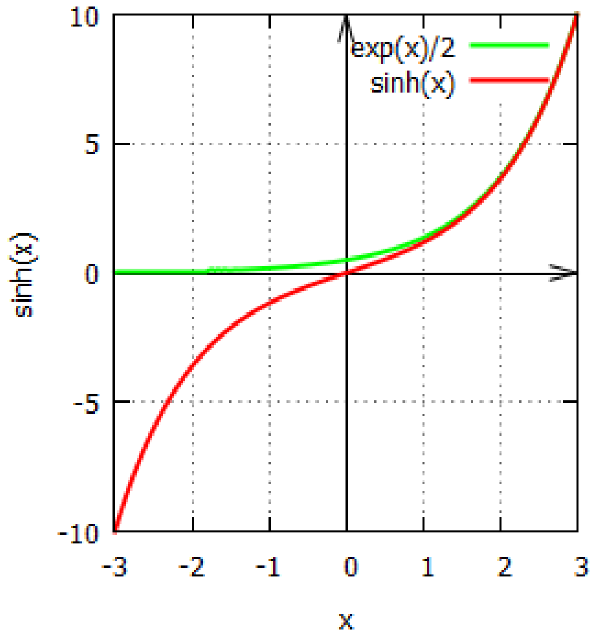


Funkcje hiperboliczne

- $\sinh(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$

$$= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$



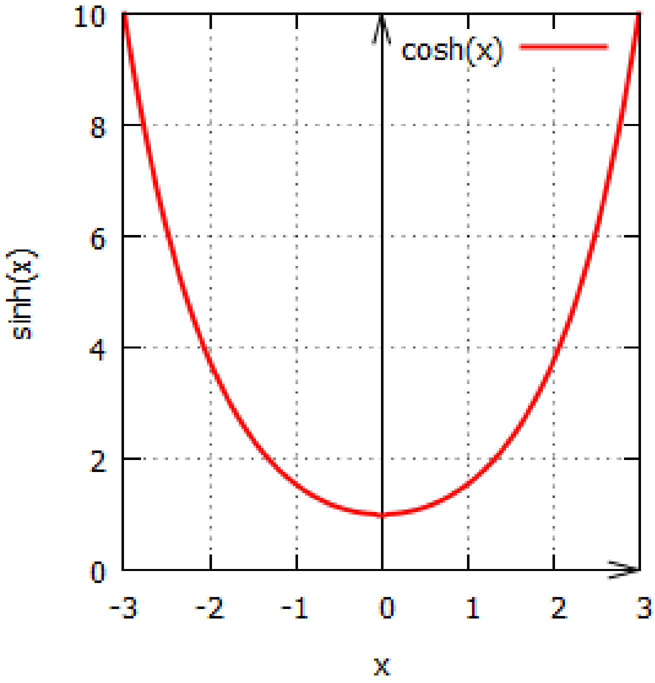


Funkcje hiperboliczne

- $\cosh(x) \equiv \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$

$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

(krzywa łańcuchowa)



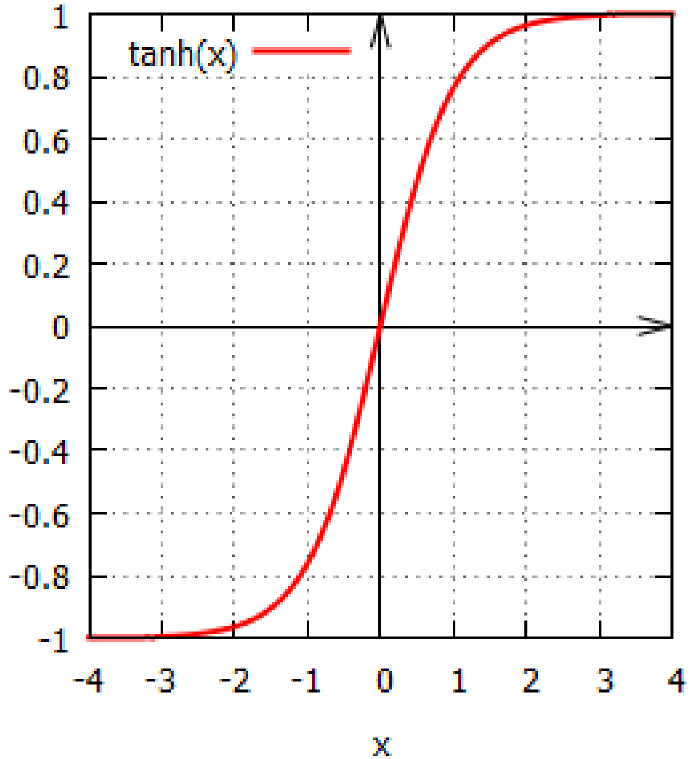
Funkcje hiperboliczne

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Funkcje hiperboliczne

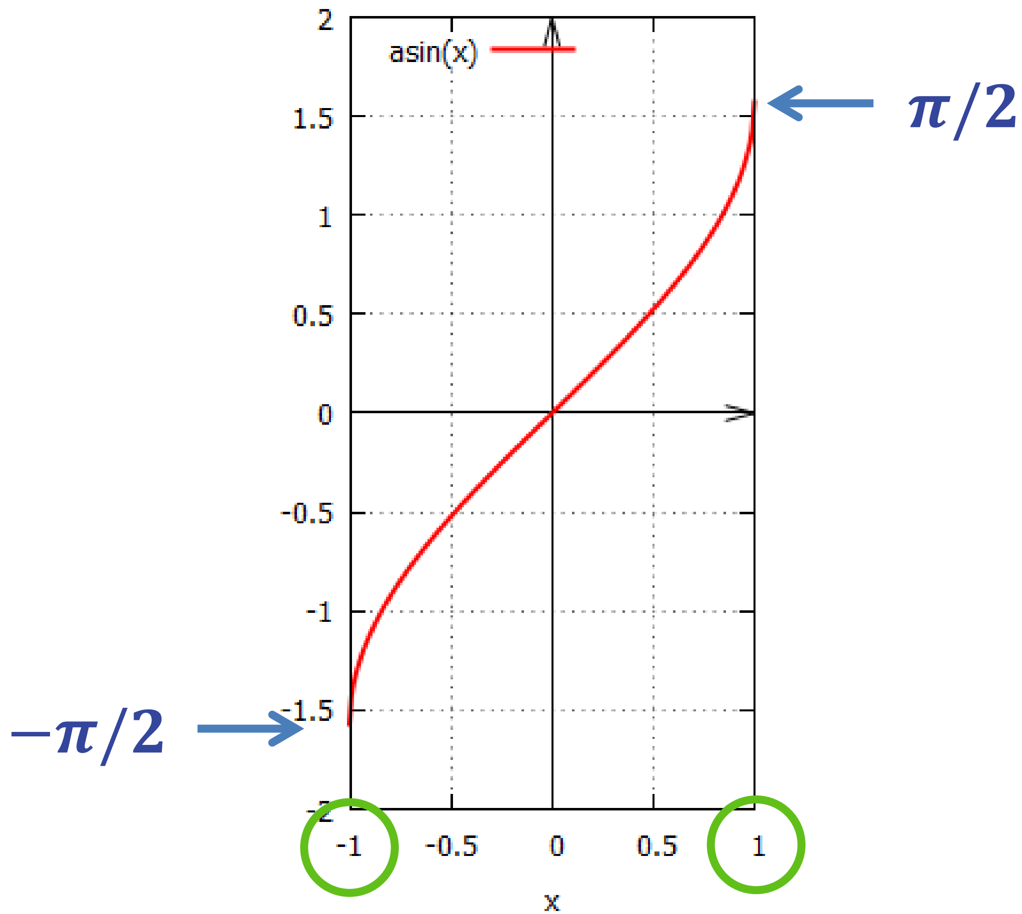
$$\mathrm{tgh}(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$$

PL EN



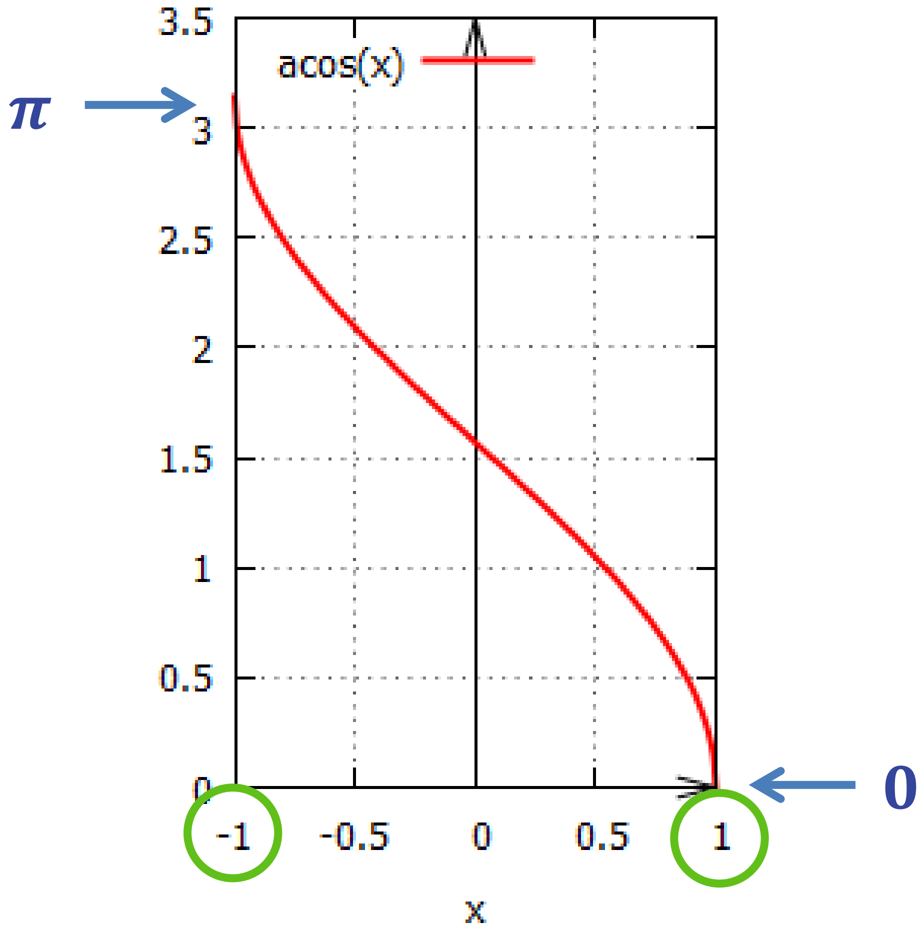
Funkcje kołowe

- $\mathrm{asin}(x) \equiv \mathrm{arc\,sin}\,(x) \equiv \sin^{-1}(x)$



Funkcje kołowe

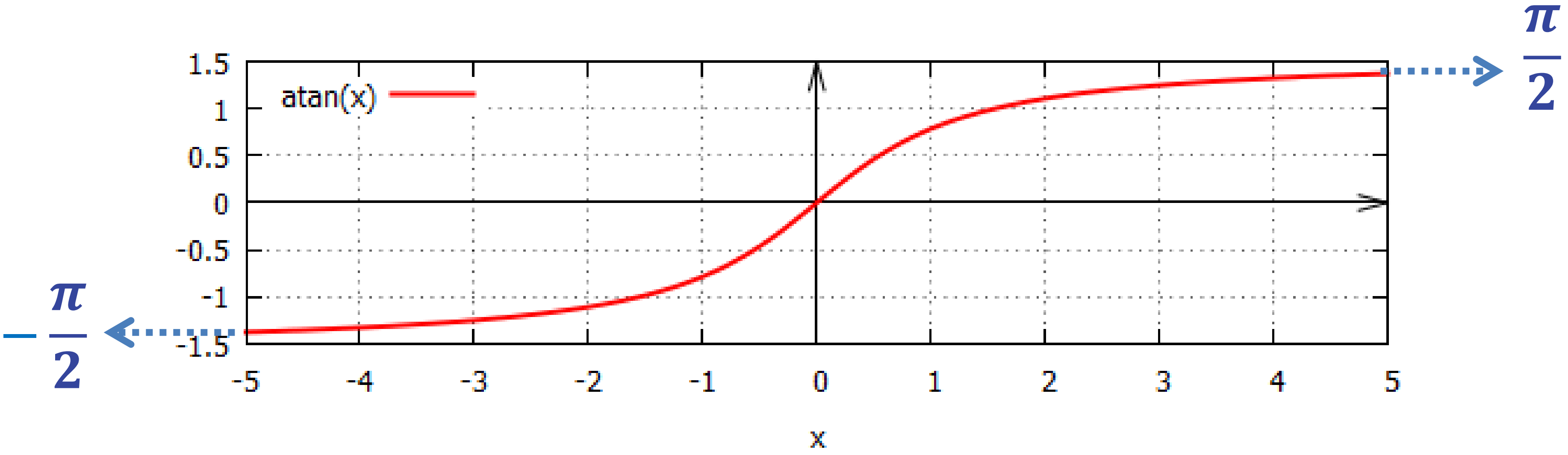
- $\operatorname{acos}(x) \equiv \operatorname{arc}\cos(x) \equiv \cos^{-1}(x)$



Funkcje kołowe

- $\operatorname{atan}(x) \equiv \operatorname{arc\,tg}(x) \equiv \tan^{-1}(x) \equiv \operatorname{tg}^{-1}(x)$

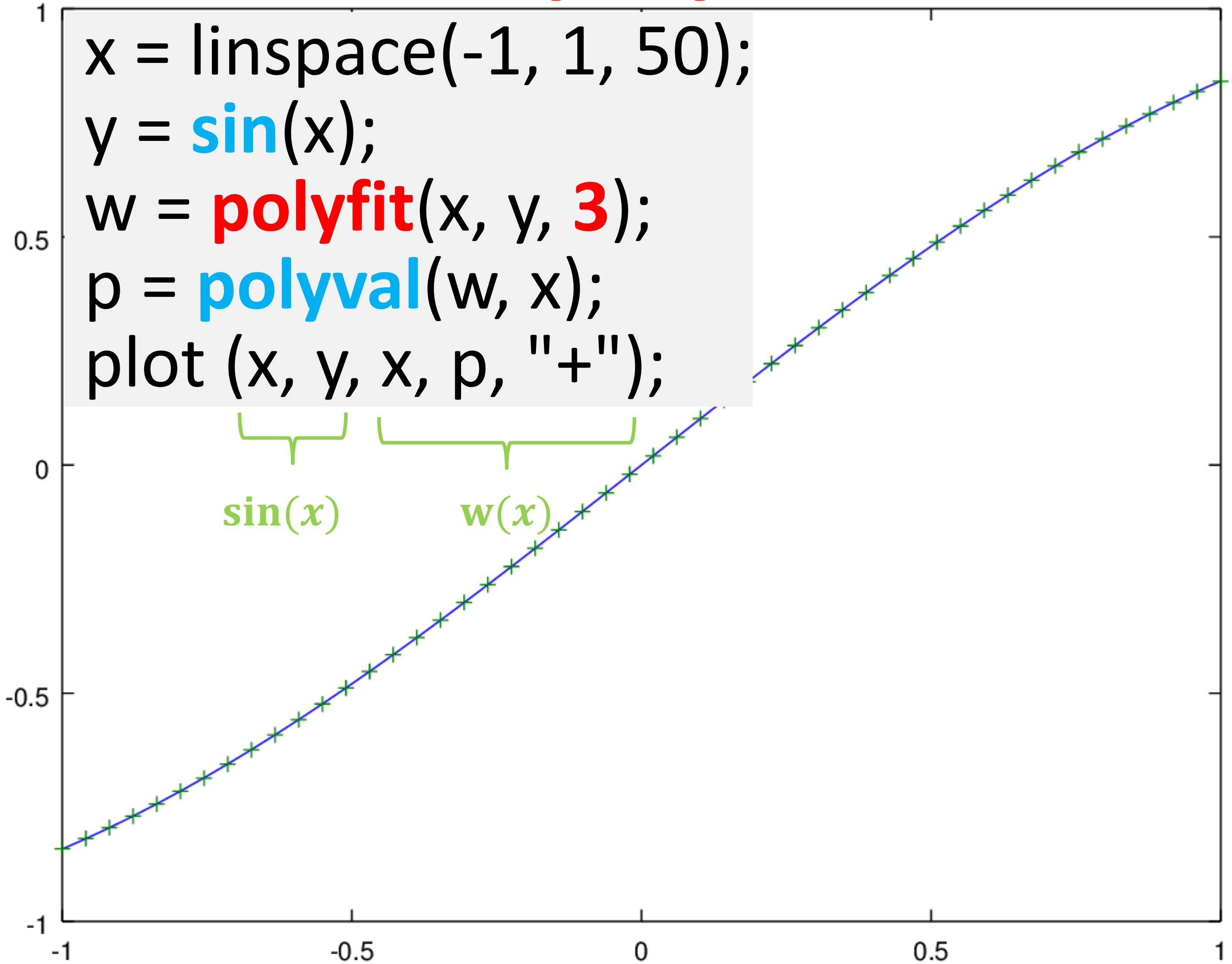
EN PL EN PL



APROKSYMACJA WIELOMIANOWA W OCTAVE

polyfit

```
x = linspace(-1, 1, 50);
y = sin(x);
w = polyfit(x, y, 3);
p = polyval(w, x);
plot (x, y, x, p, "+");
```



polyfit

- Polecenie **polyfit**(x, y, n) służy do **aproksymacji** funkcji $y(x)$ **wielomianem** stopnia n.
- Aproksymacja to **dopasowanie** funkcji (tu: wielomianu stopnia *n*) do zbioru danych (tu: $y(x)$).
- Wielomiany generowane poleceniem polyfit nie są tożsame wielomianom generowanym przez Wolfram Alpha, ale zbiegają do nich dla $n \to \infty$.
- Aproksymacja (polyfit) jest czynnością bardziej ogólną od rozkładu w szereg (Wolfram Alpha)

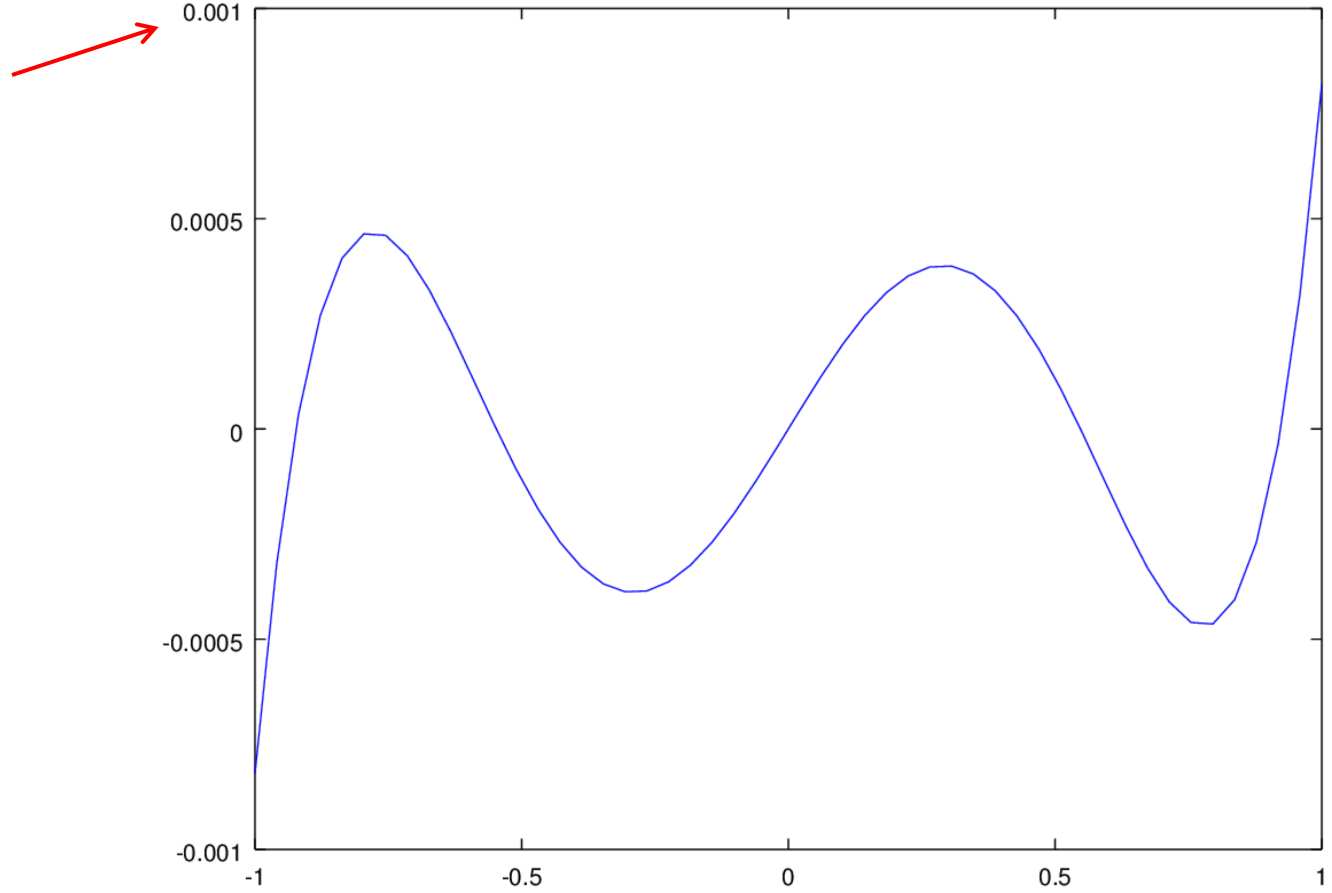
polyfit

- Polecenie **polyfit**(x, y, n) służy do **aproksymacji** funkcji $y(x)$ **wielomianem** stopnia n.
- Aproksymacja to **dopasowanie** funkcji (tu: wielomianu stopnia *n*) do zbioru danych (tu: $y(x)$).
- Wielomiany generowane poleceniem polyfit nie są tożsame wielomianom generowanym przez Wolfram Alpha, ale zbiegają do nich dla $n \to \infty$.
- Aproksymacja (polyfit) jest czynnością bardziej ogólną od rozkładu w szereg (Wolfram Alpha)

$$\underbrace{\text{poly}}_{\text{wielomian}}\underbrace{\text{fit}}_{\text{dopasuj}}$$

Dokładność aproksymacji

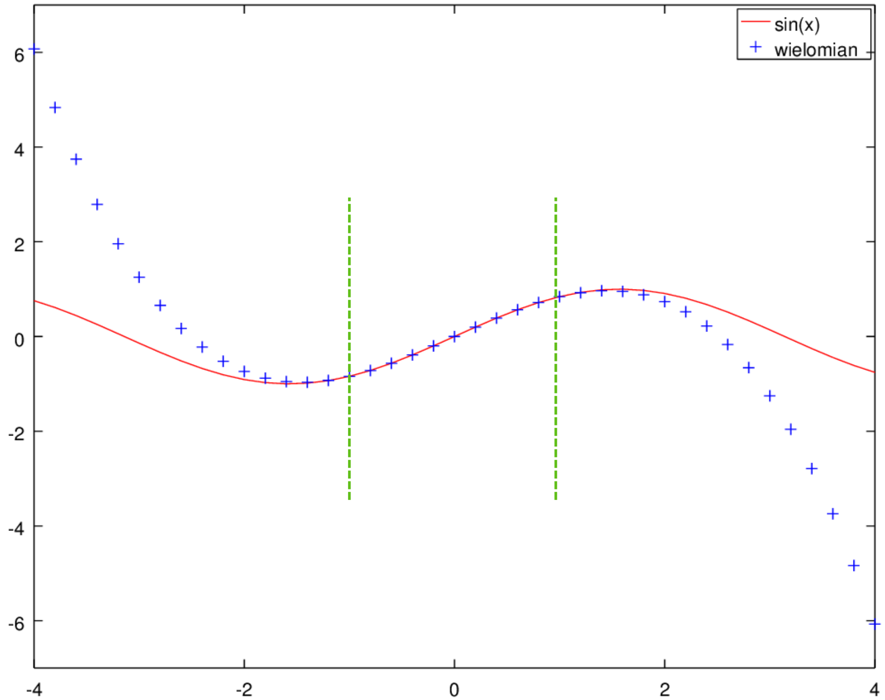
plot (x, y - polyval(w, x));



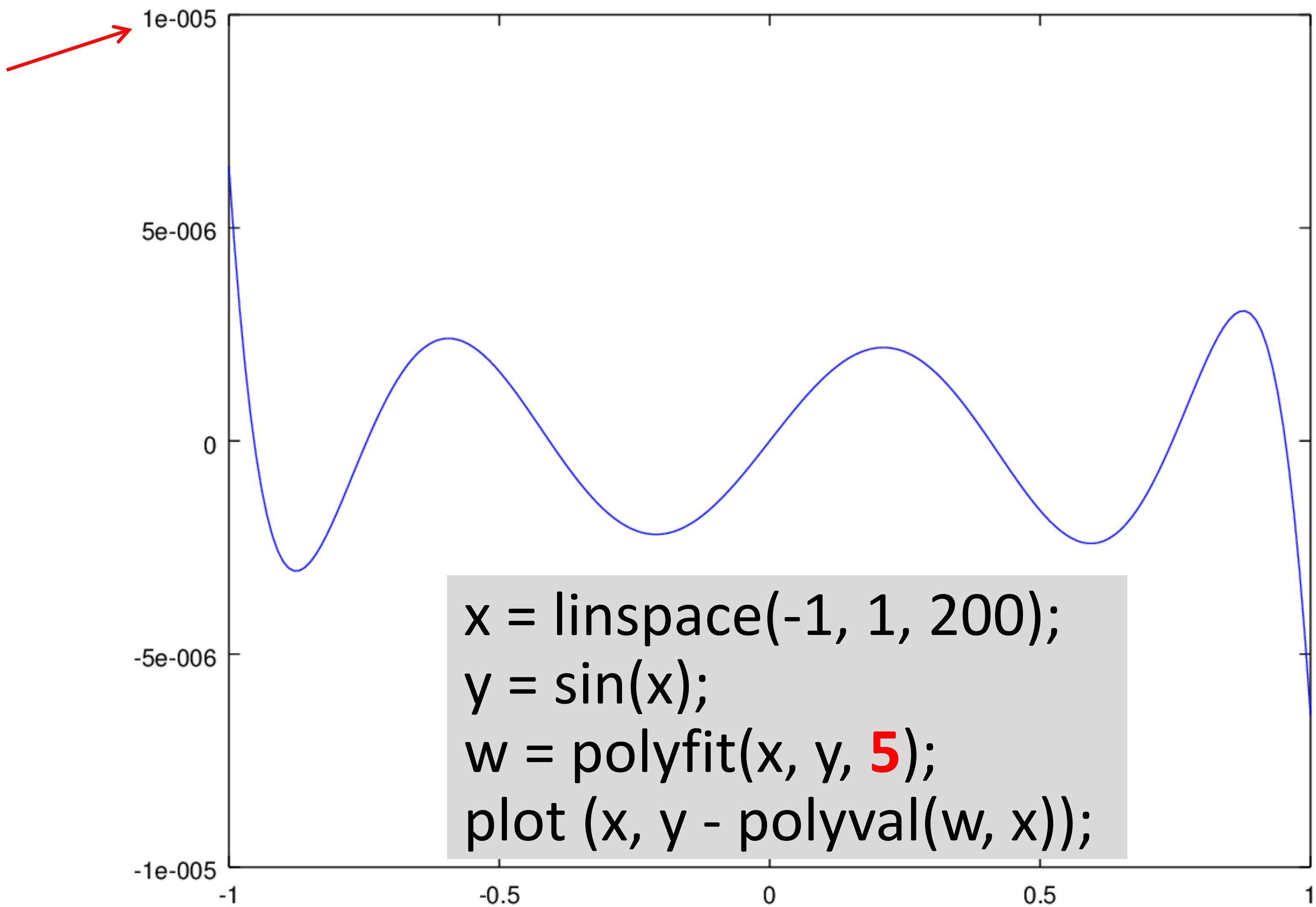
Dokładność aproksymacji

```
x0 = -4:0.2:4;
y0 = sin(x0);
plot (x0, y0,"r-;sin(x);", x0, polyval(w, x0));
```

- Poza przedziałem: brak zbieżności



Dokładność aproksymacji




```
x = linspace(-1, 1, 200);
y = sin(x);
w = polyfit(x, y, 5);
plot (x, y - polyval(w, x));
```

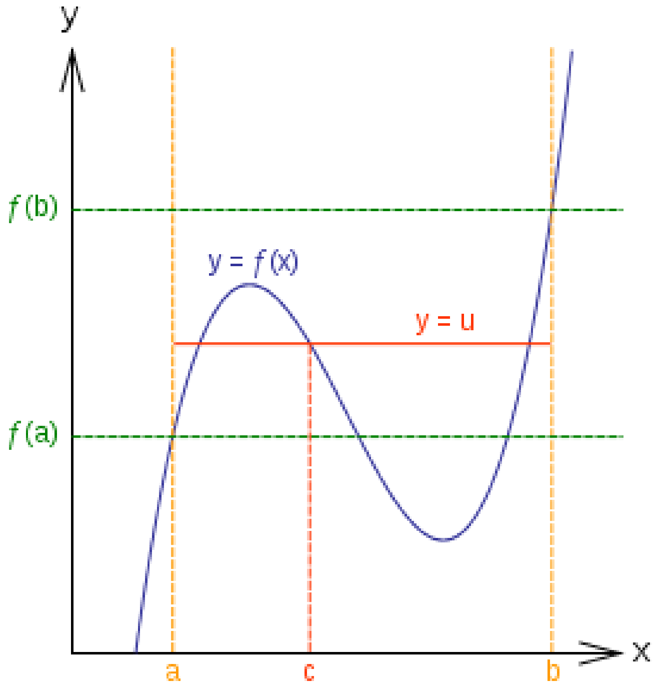
Stopień wielomianu aproksymacyjnego

- Do **aproksymacji danych** (zwłaszcza obarczonych **błędami pomiarowymi**) najczęściej używa się wielomianów stopnia 1,2 lub 3 (zależnie od celu aproksymacji).

WŁASNOŚĆ DARBOUX

Własność Darboux

- Każda funkcja **ciągła** na przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$



Ciekawostka

- Dla dowolnej skalarnej ciągłej wielkości fizycznej (temperatura, ciśnienie, wilgotność, etc.) i dla dowolnego koła wielkiego na Ziemi (np. równika, dowolnego południka) istnieją dwa przeciwległe punkty na tym kole, dla których dana wielkość skalarna ma dokładnie taką samą wartość.