Uniwersytet Wrocławski

Pochodne

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

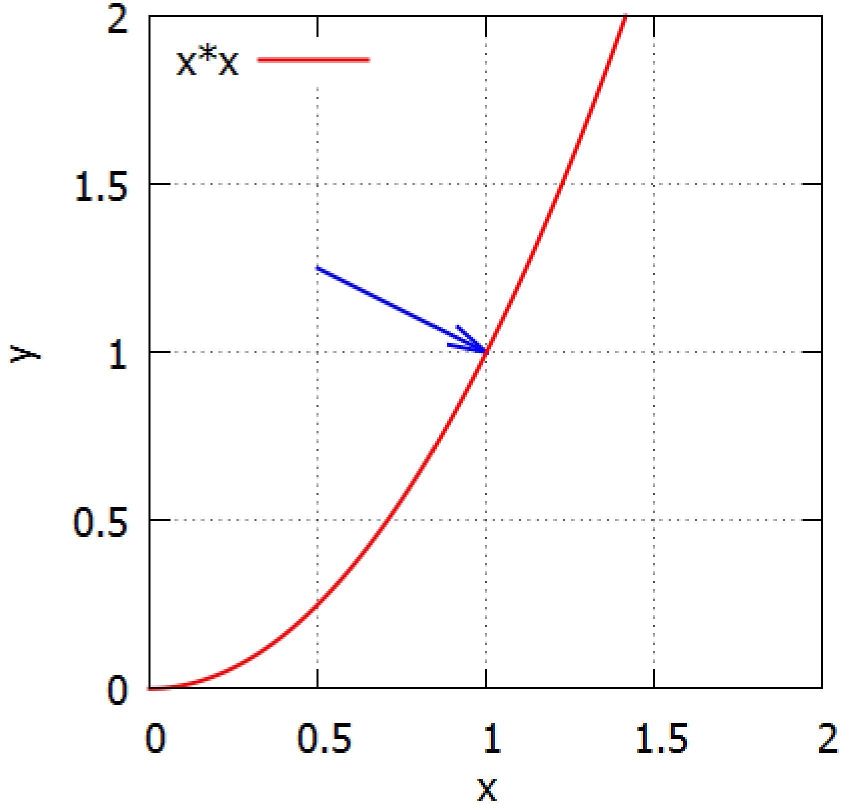
Wrocław, 2015

MOTYWACJA

Rozpatrzmy gładką funkcję…

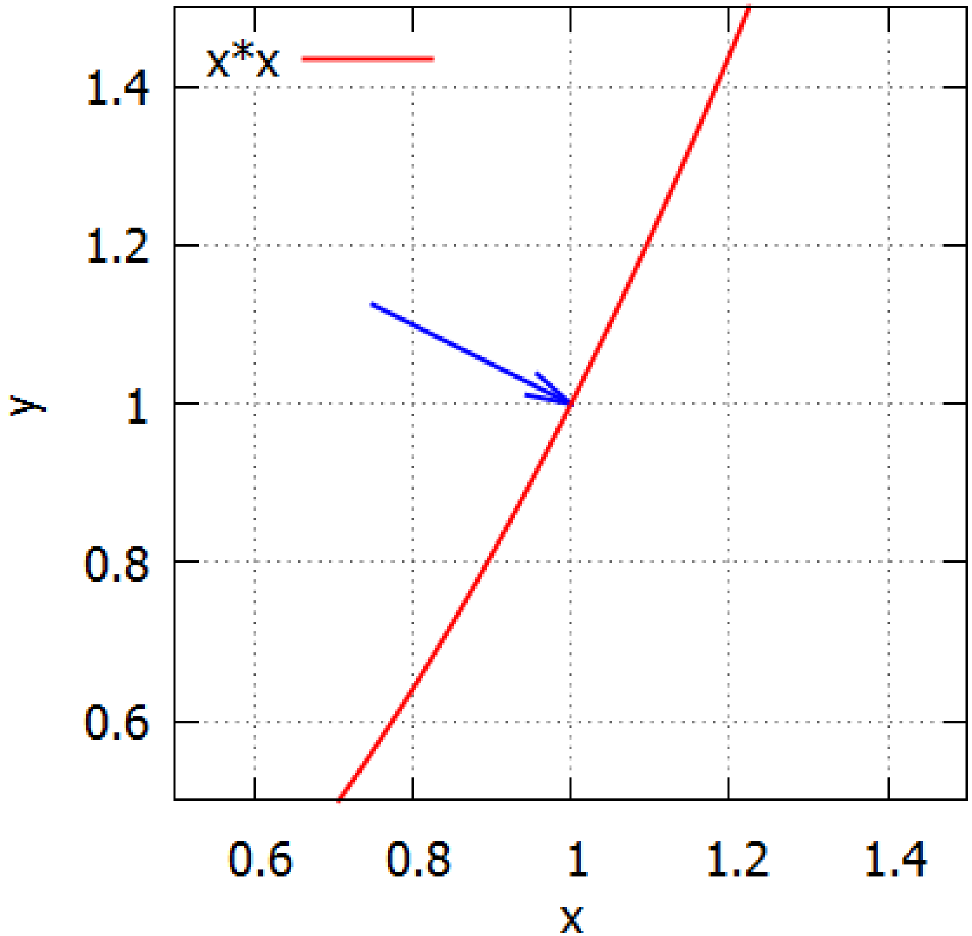
- np. $y(x) = x^2$ w okolicach punktu (1,1)

$$x_0 = 1, y_0 = f(x_0) = 1$$



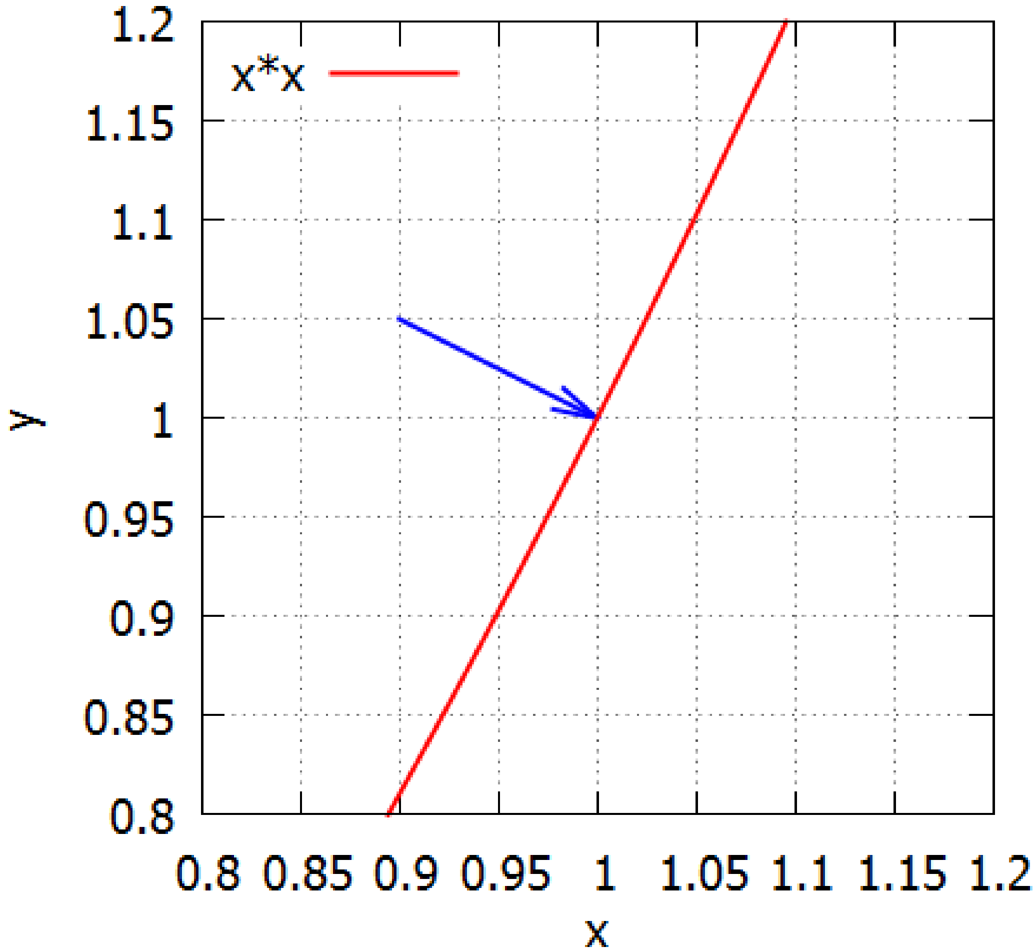
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 2 razy:



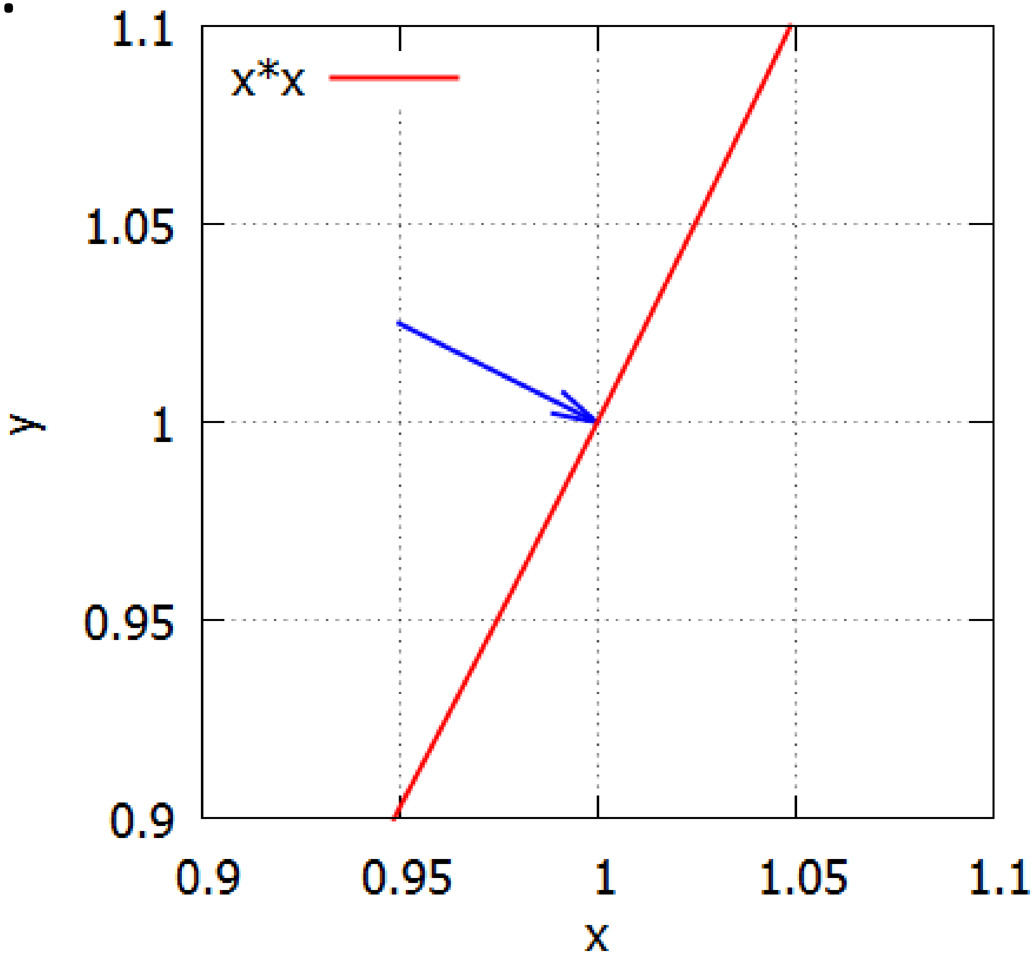
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 5 razy:



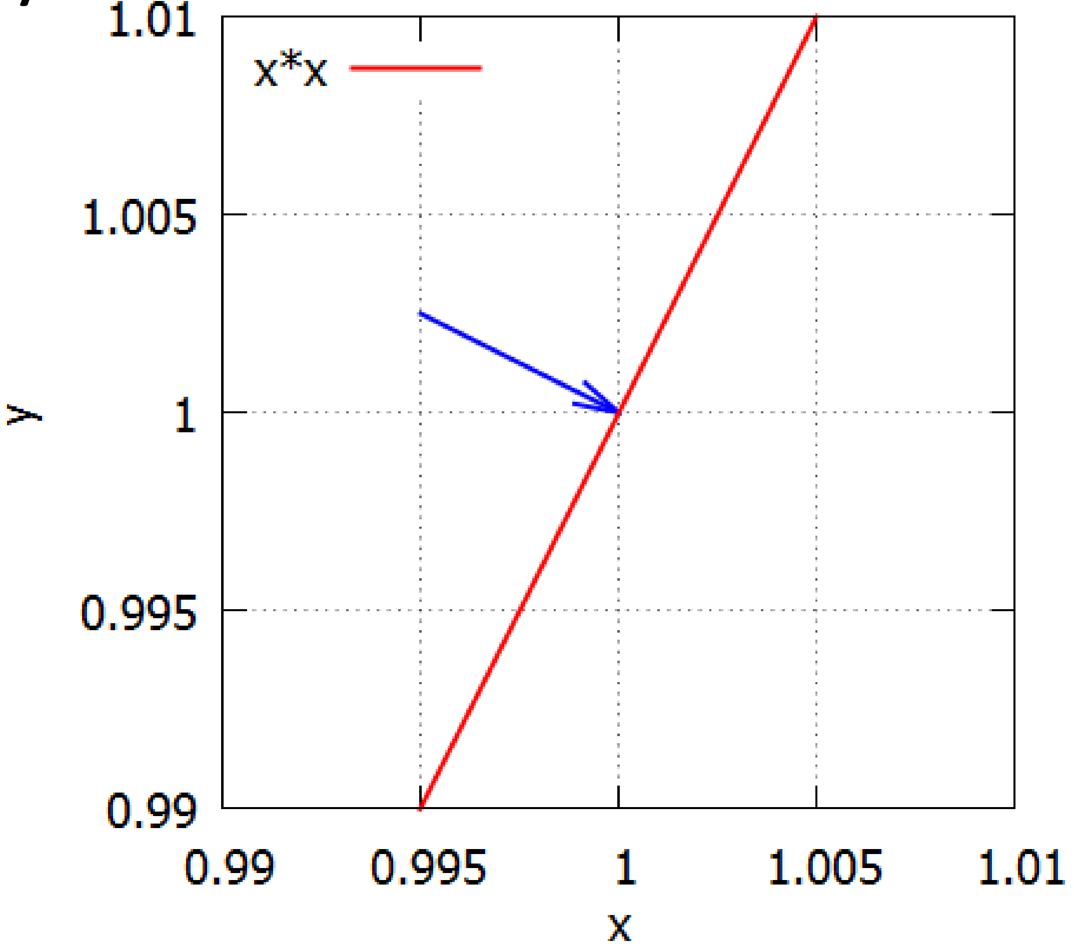
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 10 razy:



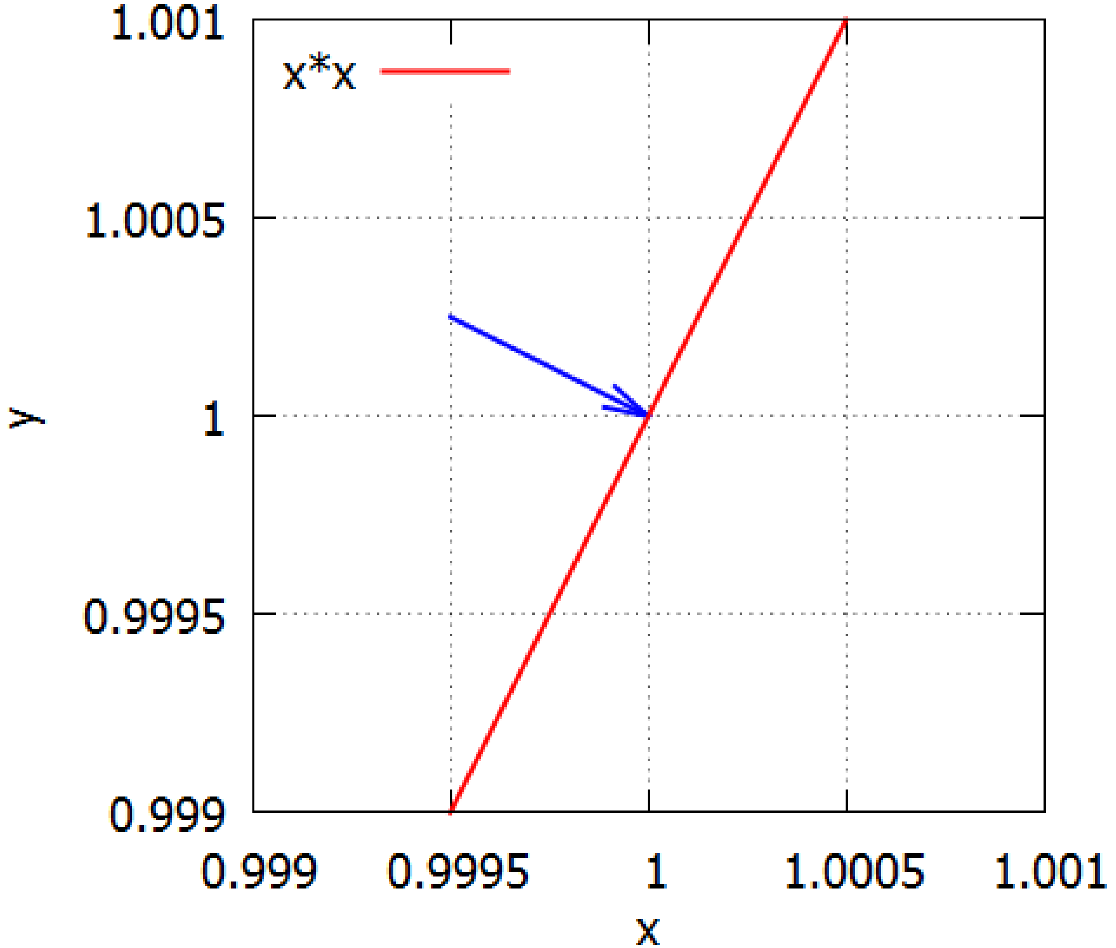
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 100 razy:



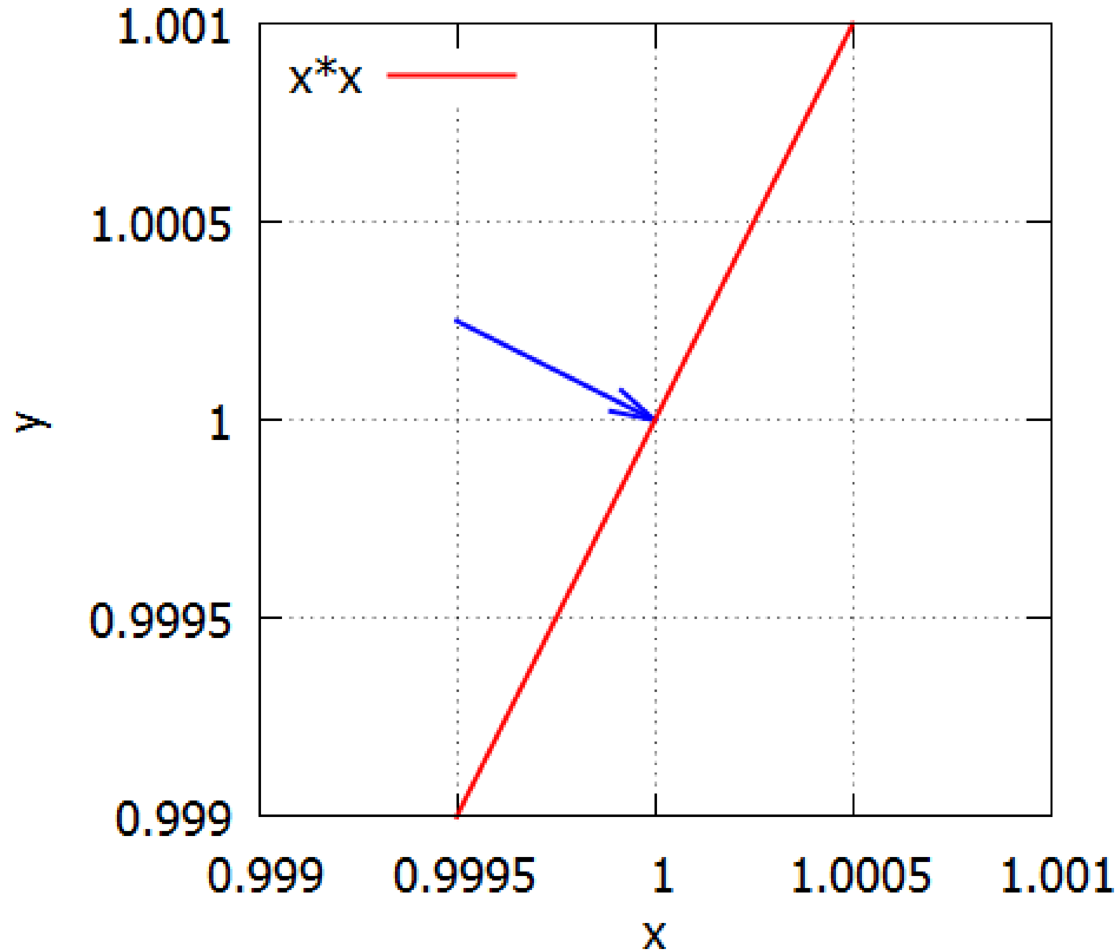
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 1000 razy:



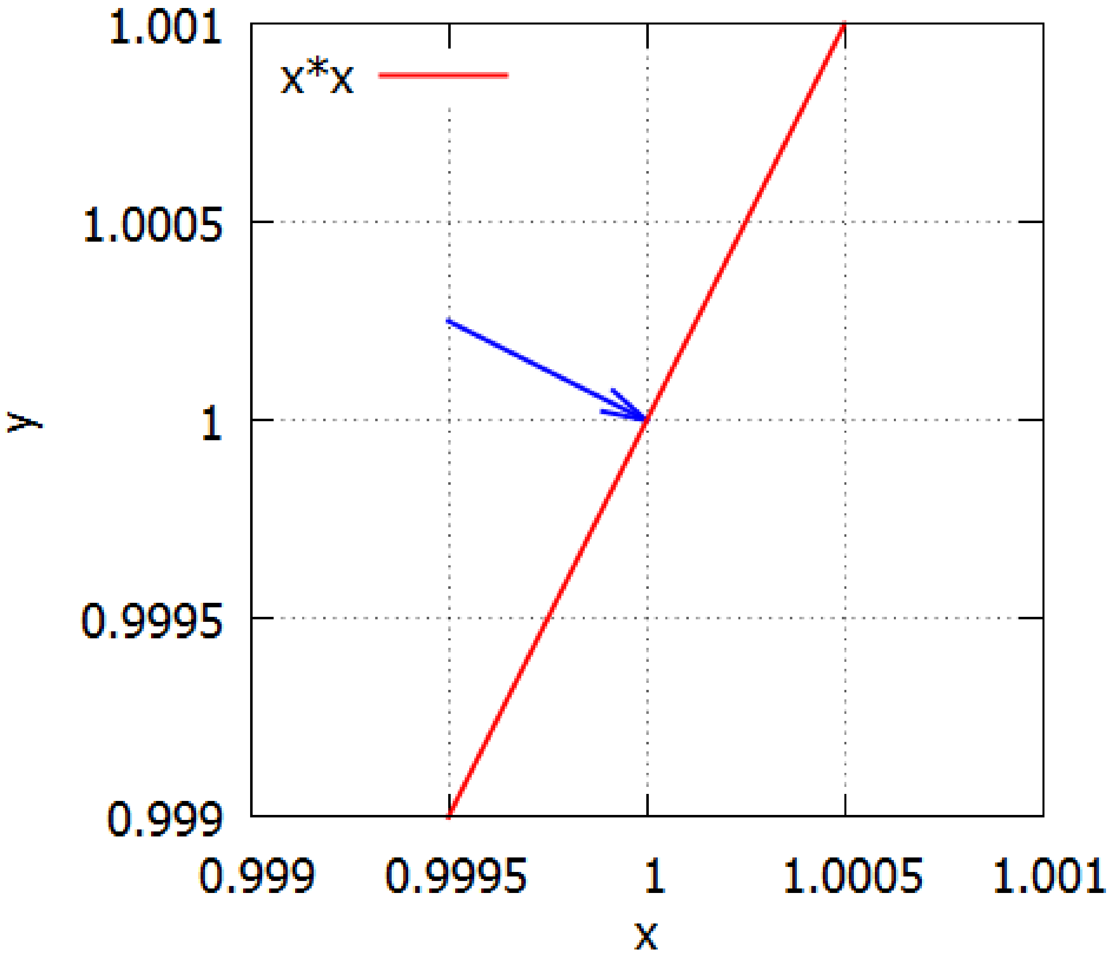
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- Im większe powiększenie, tym wykres bardziej przypomina linię prostą



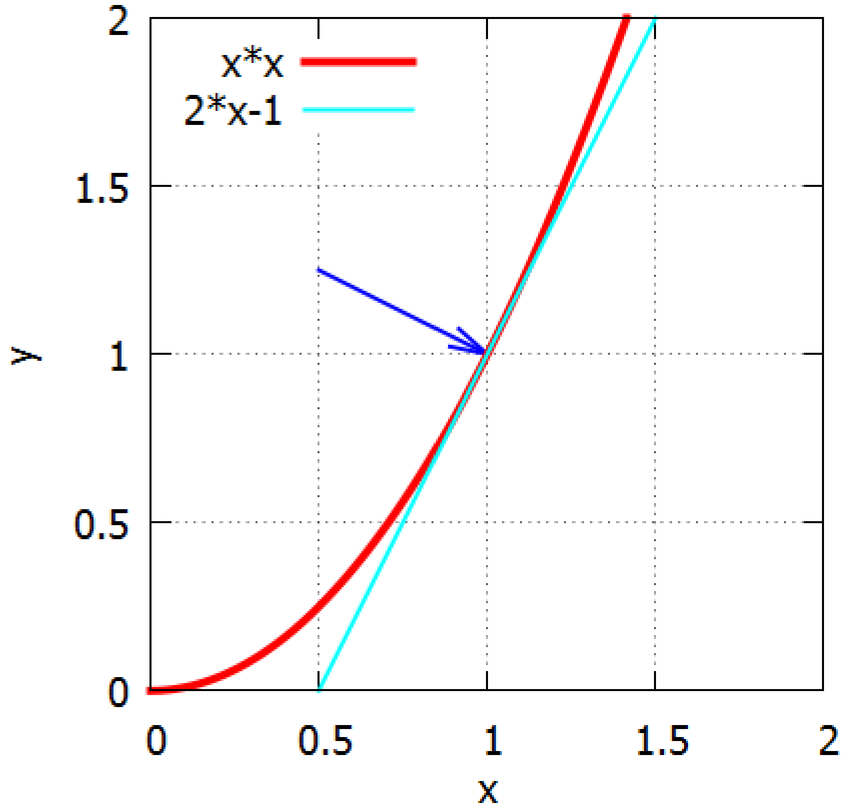
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- Linia przechodzi przez punkt $(x_0, f(x_0))$ i ma nachylenie 2



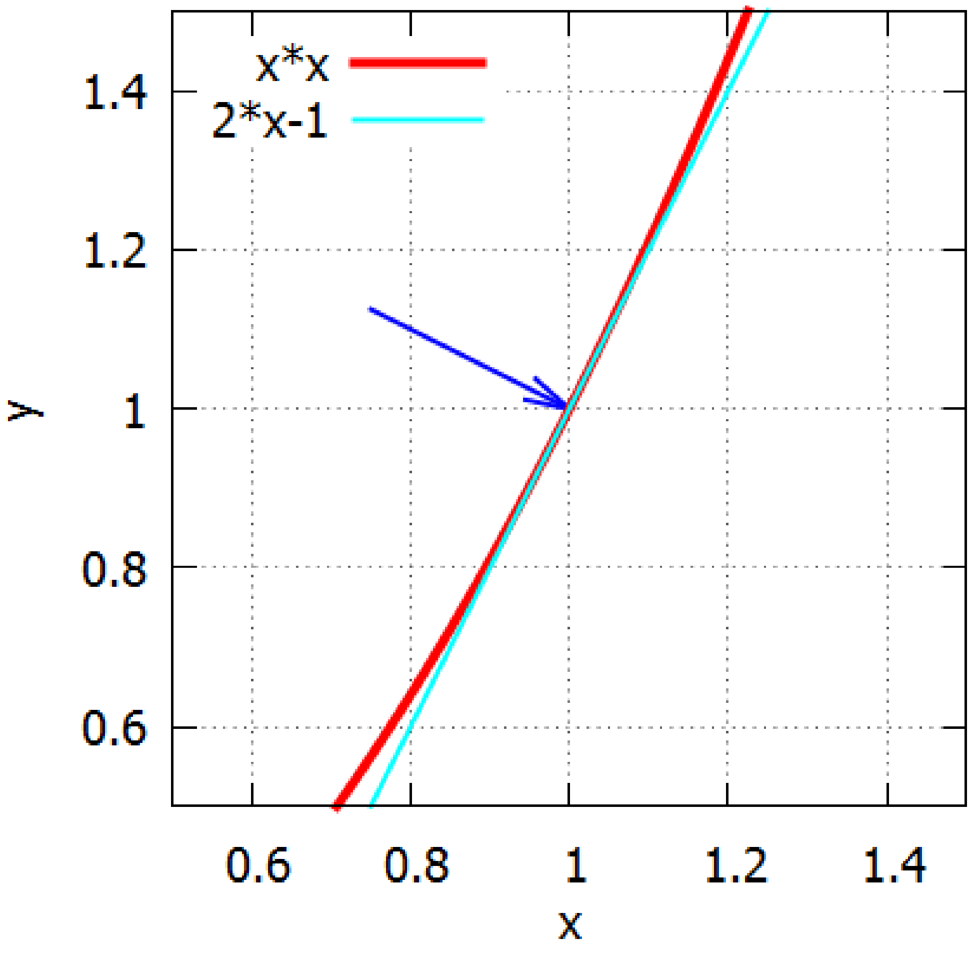
Rozpatrzmy więc $y(x) = x^2$

- Oraz jej **liniowe przybliżenie** $f(x) = 2x - 1$ w okolicach punktu $(x_0, f(x_0))$:



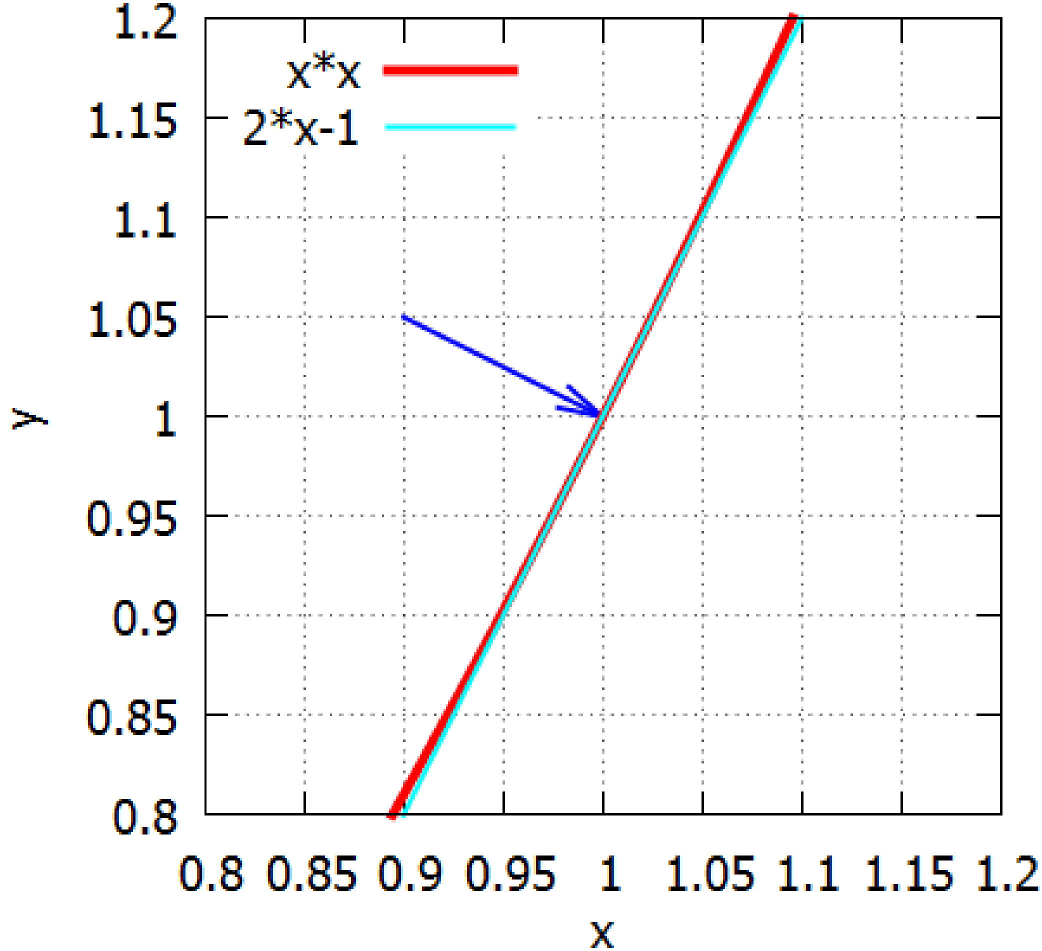
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 2 razy:



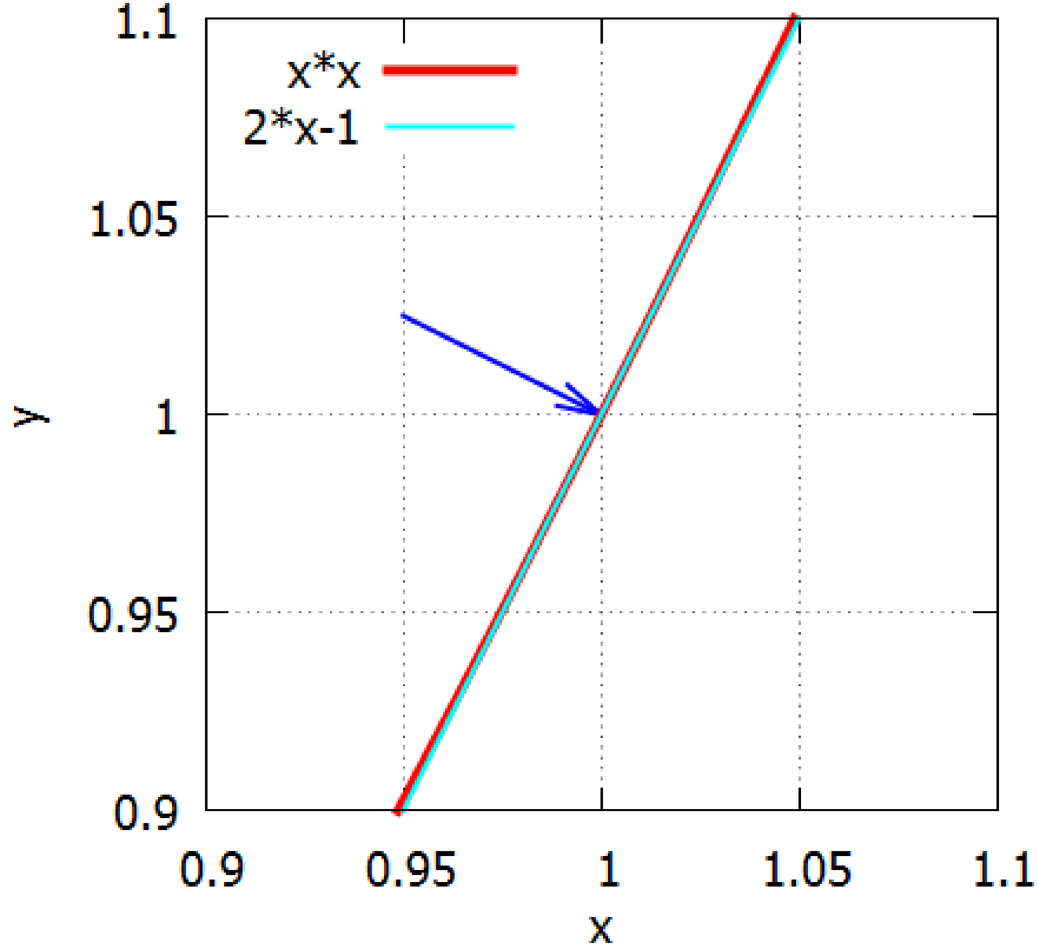
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 5 razy:



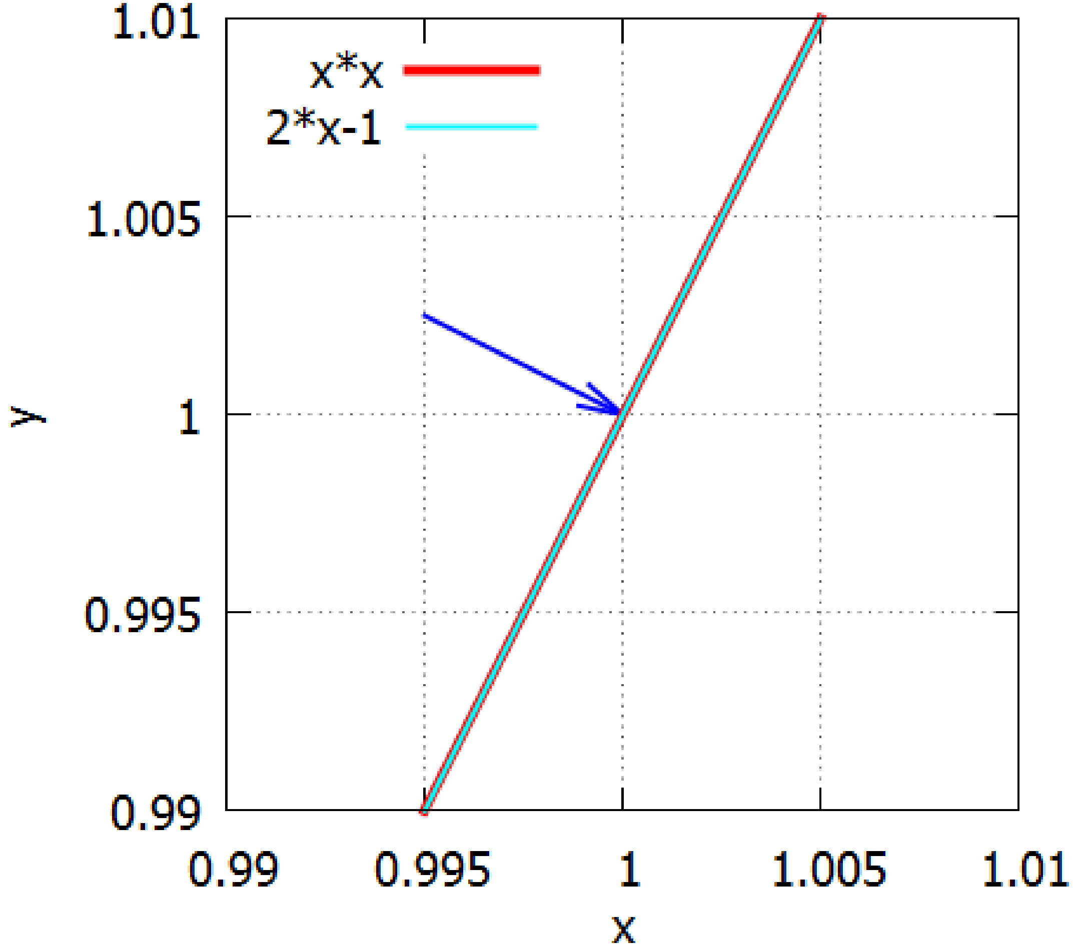
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 10 razy:



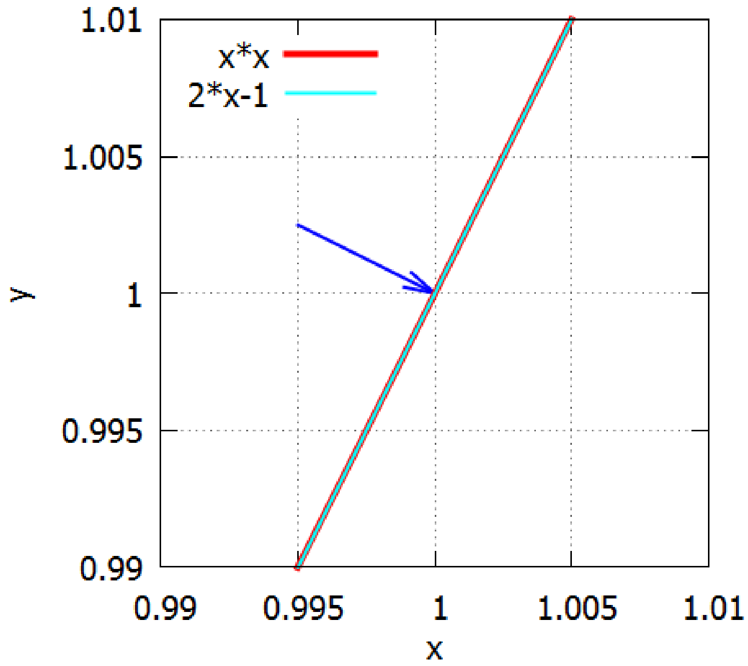
powiększmy wykres wokół $(x_0, f(x_0))$

- 100 razy:



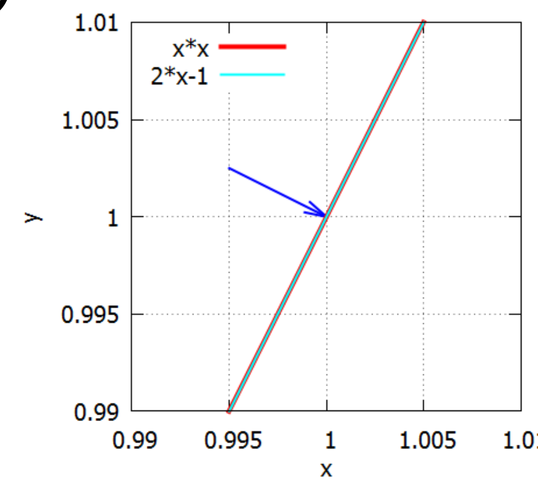
Powiększanie wykresu wokół $(x_0, f(x_0))$ …

- Każda funkcja „gładka” w punkcie x_0 w dostatecznie małym otoczeniu tego punktu wygląda jak linia prosta



Lokalnie Ziemia jest płaska

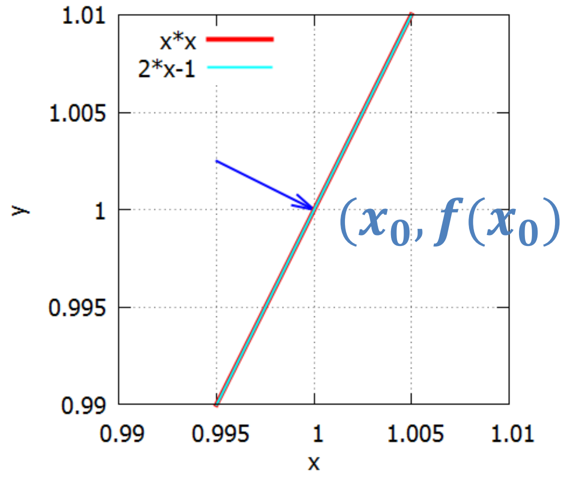
- Każdą funkcja „gładką" w punkcie x_0 można w jego otoczeniu przybliżyć funkcją liniową $g(x) = ax + b$
- Funkcja ta musi przechodzić przez $(x_0, f(x_0))$
- Czyli $g(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$
- Nie znamy współczynnika kierunkowego prostej a



Intuicyjna definicja pochodnej

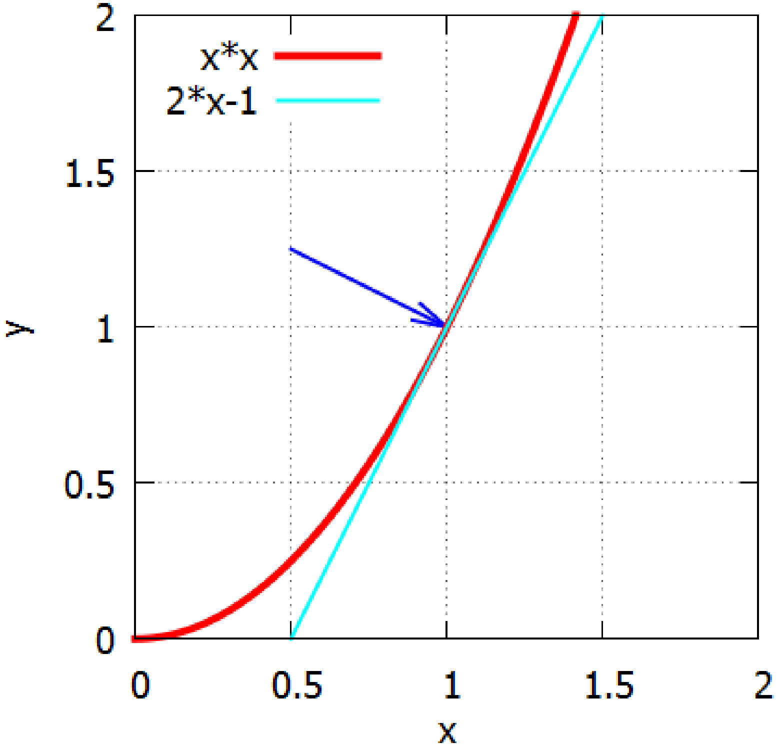
- Współczynnik kierunkowy prostej, którą w otoczeniu punktu $(x_0, f(x_0))$ można przybliżyć funkcję f nazywamy **pochodną funkcji** $f(x)$ w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$
- Czyli

$$\boldsymbol{f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$



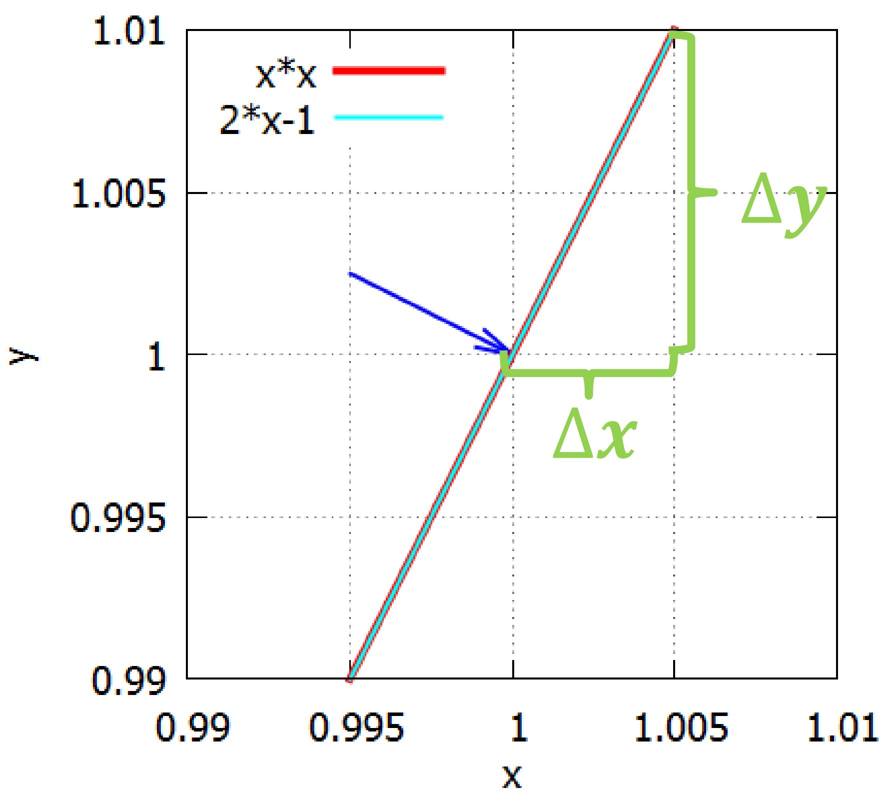
Inna definicja pochodnej

- Pochodną funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ można też interpretować jako współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$



Jak obliczyć pochodną?

- Współczynnik kierunkowy prostej = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- Ale powiększenie wykresu powinno być nieskończone…
- Czyli $\Delta x \to 0$



Definicja

- Pochodną funkcji rzeczywistej f w punkcie x_0 nazywamy granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Funkcja różniczkowalna

- *Funkcja różniczkowalna w punkcie*, to funkcja, która w tym punkcie ma pochodną
- *Funkcja różniczkowalna* to funkcja różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny

Pochodna funkcji jest funkcją

- Niech $f: A \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalną funkcją rzeczywistą. Wtedy każdemu punktowi $x \in A$ można przyporządkować pochodną funkcji f w tym punkcie. Funkcje tę nazywamy *funkcją pochodną* f

Notacja

Funkcję pochodną funkcji $f(x)$ oznacza się:

- $f'(x)$
- $\frac{df}{dx}(x), \frac{d}{dx}f(x), \frac{df(x)}{dx}$
- $Df(x)$
- $\dot{f}(x)$ (zwłaszcza jeżeli zmienną niezależną jest czas: $x \equiv t$)

Operator $\frac{d}{dx}$

- Skoro $\frac{d}{dx}f$ jest funkcją pochodną funkcji f,
  to $\frac{d}{dx}$ można potraktować jako odwzorowanie zbioru funkcji w zbiór funkcji.
  Takie odwzorowanie zwie się **operatorem**.

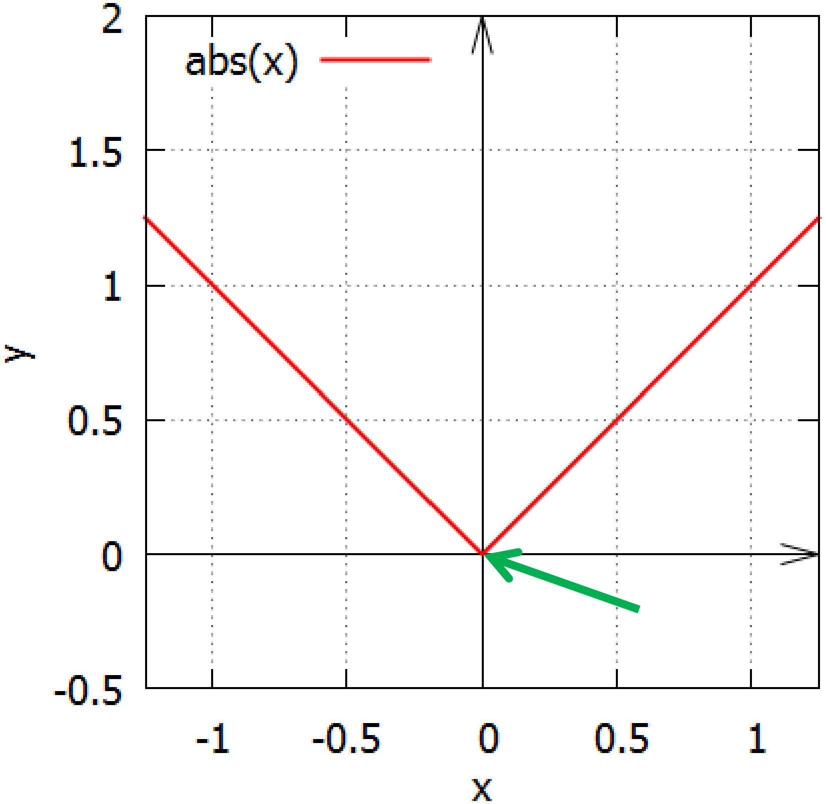
Pochodne wyższych rzędów

- Skoro pochodna funkcji sama może być funkcją, to sama może mieć swoją pochodną

- $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x)$,...
- $\frac{d}{dx}f(x), \frac{d^2}{dx^2}f(x), \frac{d^3}{dx^3}f(x)$,...
- $Df(x), D^2f(x), D^3f(x)$,...
- $\dot{f}(x), \ddot{f}(x), \dddot{f}(x)$

Różniczkowalność a ciągłość

- Każda funkcja różniczkowalna jest ciągła
- Ale nie każda funkcja ciągła jest różniczkowalna



Dygresja: klasa funkcji C^n

- Symbolem C^n oznacza się zbiór wszystkich funkcji, które są n-krotnie różniczkowalne, przy czym n-ta pochodna jest ciągła
- Symbolem C^0 oznacza się zbiór wszystkich funkcji ciągłych
- Symbolem C^∞ oznacza się zbiór wszystkich funkcji różniczkowalnych dowolną liczbę razy (tzw. *funkcji gładkich*)

JAK OBLICZAĆ POCHODNE?

$$\boxed{\boldsymbol{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}}$$

Niech $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$
$= f(x_0) + \Delta x f'(x_0)$

Wtedy

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \approx \underbrace{\alpha f(x_0)}_{\boldsymbol{(\alpha f)(x_0)}} + \boldsymbol{\Delta x} \cdot \underbrace{\alpha f'(x_0)}_{\boldsymbol{(\alpha f)'(x_0)}}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})}$$

Niech
$$f(x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$$
$$g(x) \approx g(x_0) + \Delta x \cdot g'(x_0)$$

Wtedy
$$(f+g)(x)$$
$$= f(x) + g(x)$$
$$\approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + g(x_0) + \Delta x \cdot g'(x_0)$$
$$= \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{(f+g)(x_0)} + \boldsymbol{\Delta x} \cdot \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_{(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x_0})}$$

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)}$$

Niech $\quad f(x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'\,(x_0)$

$$g(x) \approx g(x_0) + \Delta x \cdot g'(x_0)$$

Wtedy

$$(fg)(x)$$
$$= f(x) \cdot g(x)$$
$$\approx [f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)][g(x_0) + \Delta x \cdot g'(x_0)]$$
$$\approx \underbrace{f(x_0)g(x_0)}_{(fg)(x_0)} + \boldsymbol{\Delta x}\underbrace{[f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)]}_{(\boldsymbol{fg})'(\boldsymbol{x_0})}$$

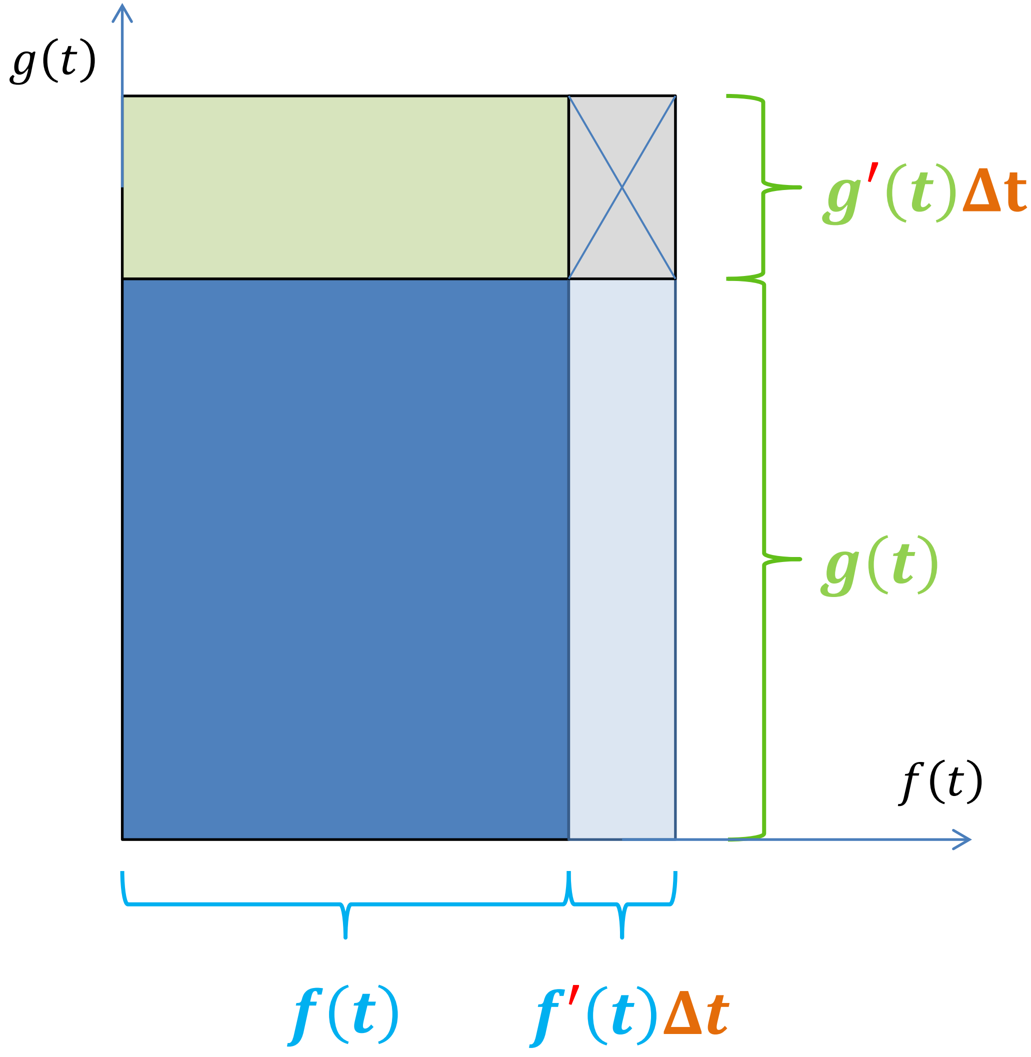
$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

$$(ax + b)(Ax + B) =$$
$$bB + (\boldsymbol{aB + bA})x + aAx^2$$

człon liniowy

$$(f'x + f)(g'x + g) =$$
$$fg + (\boldsymbol{f'g + fg'})x + O(x^2)$$

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$



- Jak szybko zmienia się pole tego prostokąta?

$$\boxed{[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$f(x) = ax + b$$
$$g(x) = Ax + B$$

$$f(g(x)) =$$
$$a \cdot g(x) + b =$$
$$a(Ax + B) + b =$$
$$\underbrace{\boldsymbol{aA}}_{(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{0})}\boldsymbol{x} + \underbrace{aB + b}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{0}))}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

$$0 = (1)' = \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)' = x' \cdot \frac{1}{x} + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\frac{1}{x} + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 0$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}}$$

Niech $g(x) = \frac{1}{x}$. Wtedy $\frac{1}{f(x)} = g(f(x))$.

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left[g\big(f(x)\big)\right]' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$$

$$= -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$$

$$= -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

POCHODNE KONKRETNYCH FUNKCJI

$$(ax + b)' = a$$

- Pochodna funkcji liniowej to jej ***współczynnik kierunkowy*** (***liniowy***)

$$(x^2)' = 2x$$

Skoro

$$(fg)' = f'g + fg'$$

więc

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

Skoro

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Więc

$$(x^3)' =$$
$$(x^2 \cdot x)' =$$
$$(x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' =$$
$$2x \cdot x + x^2 =$$
$$3x^2$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

- Dowód analogiczny do poprzednich przypadków

$$(\boldsymbol{ax^n})' = \boldsymbol{nax^{n-1}}$$

- Dowód ze wzoru $(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$

Pochodna wielomianu

- Dla
$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
zachodzi
$$y'(x) = \boldsymbol{n} a_n x^{n\boldsymbol{-1}} + (n-1) a_{n-1} x^{n\boldsymbol{-2}} + \cdots + a_1$$

- Dowód: z poprzedniego slajdu i wzoru na pochodną sumy, $(f+g)' = f' + g'$

Przykłady

- $(3x^2 + 8x + 1)' = 2 \cdot 3x + 8 = 6x + 8$
- $\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)' = 2 \cdot \frac{x^{2-1}}{2} + 4 \cdot \frac{x^{4-1}}{4} = x + x^3$
- $\frac{d(a^2z^3+\gamma z-1)}{dz} = 3a^2z^2 + \gamma$
- $\frac{d(a^2z^3+\gamma z-1)}{d\gamma} = z$
- $\frac{d(a^2z^3+\gamma z-1)}{da} = 2az^3$

Pochodna szeregu

Jeżeli

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

to

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

w przedziale, w którym szereg $f(x)$ jest zbieżny

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

więc

$$(e^x)' = 0 + 1 + 2 \cdot \frac{x^{2-1}}{2!} + 3 \cdot \frac{x^{3-1}}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= e^x$$

Dla każdego rzeczywistego *x*

$$(e^x)' = e^x$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

więc

$(e^x)' =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$= e^x$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

więc

$$(\sin x)' = 1 - 3 \cdot \frac{x^{3-1}}{3!} + 5 \cdot \frac{x^{5-1}}{5!} + \cdots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \cos(x)$$

dla każdego rzeczywistego *x*.

$(\cos x)' = -\sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

więc

$$(\cos x)' = 0 - 2 \cdot \frac{x^{2-1}}{2!} + 4 \cdot \frac{x^{4-1}}{4!} + \cdots$$

$$= -\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= -\sin x$$

Dla każdego rzeczywistego *x*.

$$\mathbf{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

więc

$$[\ln(x+1)]' = 1 - 2 \cdot \frac{x^{2-1}}{2} + 3 \cdot \frac{x^{3-1}}{3} + \cdots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{x+1}$$

Dla $|x| < 1$.

Pochodna funkcji odwrotnej

- Pochodna $y(x)$ to $\frac{dy}{dx}$
- Więc pochodna funkcji odwrotnej $y^{-1}(x)$ to…

$$[y^{-1}(x)\,]' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)}$$

That simple!

- Trzeba pamiętać, by wynik zapisać jako funkcję zmiennej y a nie x (zmienna zależna zamienia się rolą ze zmienną niezależną)

Pochodna funkcji odwrotnej (2)

- Inne uzasadnienie:

$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0) \cdot y'\,(x_0)$$

$$y(x) - y(x_0) \approx (x - x_0) \cdot y'\,(x_0)$$

$$\frac{y(x) - y(x_0)}{y'(x_0)} \approx x - x_0$$

$$x \approx \frac{y(x) - y(x_0)}{y'(x_0)} + x_0$$

$$x \approx \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y'(x_0)}} \boldsymbol{\Delta y} + x_0$$

$$\boldsymbol{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

- $\ln x$ jest funkcją odwrotną do e^x
- Niech $y(x) = e^x$, czyli $x = \ln y$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d \ln \boldsymbol{y}}{d\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\boldsymbol{y}}$$

Zmienna niezależna

Pochodna funkcji złożonej - przykład

- $f(x) = \sin(x)\,, g(x) = \cos(x)$
  ile wynosi pochodna $f\left(g(x)\right) = \sin(\cos(x))$?

$$[\sin(\cos(x))]' = \sin'(\cos(x)) \cdot \cos'(x)$$
$$[\sin(\cos(x))]' = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin)(x)$$
$$[\sin(\cos(x))]' = -\cos(\cos(x)) \cdot \sin(x)$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

- Uogólnienie wzoru dla wykładników naturalnych na wykładniki rzeczywiste
- Przykłady:

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Pochodne wyższych rzędów

$$\sin' x = \cos x$$
$$\sin'' x = \cos' x = -\sin x$$
$$\sin''' x \ = (-\sin x)' = -\cos x$$
$$\sin^{(4)} x = (-\cos x)' = \sin x$$
$$\ldots$$

Podsumowanie

$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Podsumowanie

Wzory ogólne
$(af)' = a \cdot f'$
$(f+g)' = f' + g'$
$(fg)' = f'g + fg'$
$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}, \qquad \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$
$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$
$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$