Uniwersytet Wrocławski

Całki

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2015

CAŁKI NIEOZNACZONE

Motywacja

- Załóżmy, że znamy położenie jakiegoś obiektu w każdej chwili czasu, czyli $x(t)$, i chcemy na tej podstawie wyznaczyć jego prędkość. Jak to zrobić?

Motywacja

- Załóżmy, że znamy położenie jakiegoś obiektu w każdej chwili czasu, czyli $x(t)$, i chcemy na tej podstawie wyznaczyć jego prędkość. Jak to zrobić?
- Odpowiedź: prędkość tego obiektu określona jest przez ***pochodną*** $x(t)$ względem czasu:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

Motywacja

- Załóżmy sytuację odwrotną: znamy prędkość jakiegoś obiektu w każdej chwili czasu, czyli $v(t)$, i chcemy na tej podstawie wyznaczyć jego położenie, $x(t)$. Jak to zrobić?

Motywacja

- Załóżmy sytuację odwrotną: znamy prędkość jakiegoś obiektu w każdej chwili czasu, czyli $v(t)$, i chcemy na tej podstawie wyznaczyć jego położenie, $x(t)$. Jak to zrobić?
- Odpowiedź: rozwiązać równanie

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

w którym niewiadomą jest funkcja $x(t)$

Motywacja

$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[rr, bend left, "\text{pochodna}"] & & v(t) \arrow[ll, bend left, "\text{całka}"]
\end{tikzcd}
$$

Całkowanie jest operacją ODWROTNĄ do różniczkowania

Notacja

pochodna:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[rr, bend left] & & v(t) \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

całka:

$$x = \int v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

Notacja

pochodna:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r, bend left] & v(t) \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

całka:

$$x(t) = \underbrace{\int v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\text{Gdzie jest } (t) \text{ po prawej stronie?}}$$

To nie może być t!

tym się zajmiemy
nieco później

Prosty przykład

- Skoro $(x^2)' = 2x$, a całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania, więc

$$\int 2x \,\mathrm{d}x = x^2$$

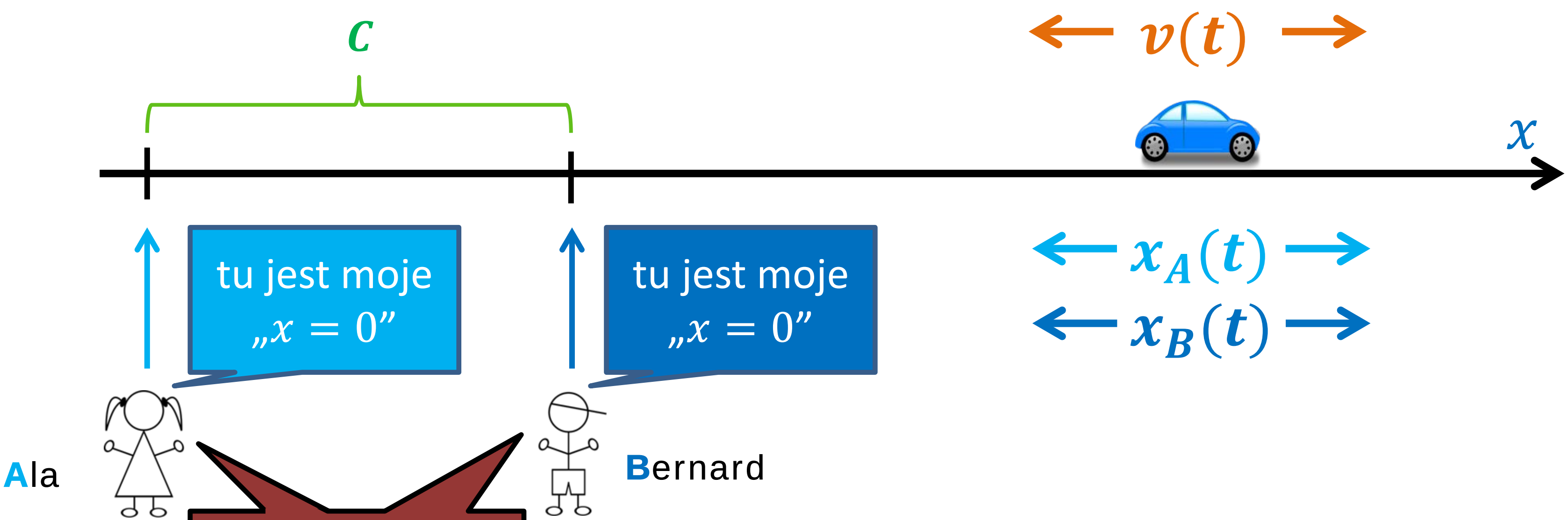
I od razu problem…

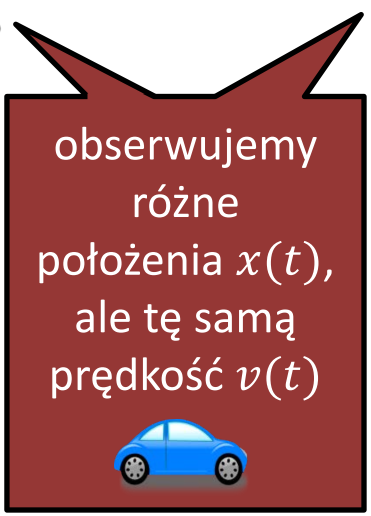
- Hmm… dla każdej stałej rzeczywistej C zachodzi $(x^2 + C)' = 2x$, więc

$$\int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C$$

- Całkowanie *nie jest operacją jednoznaczną*: wynik znamy tylko z dokładnością do dowolnej stałej rzeczywistej, zwyczajowo oznaczanej C

Interpretacja fizyczna

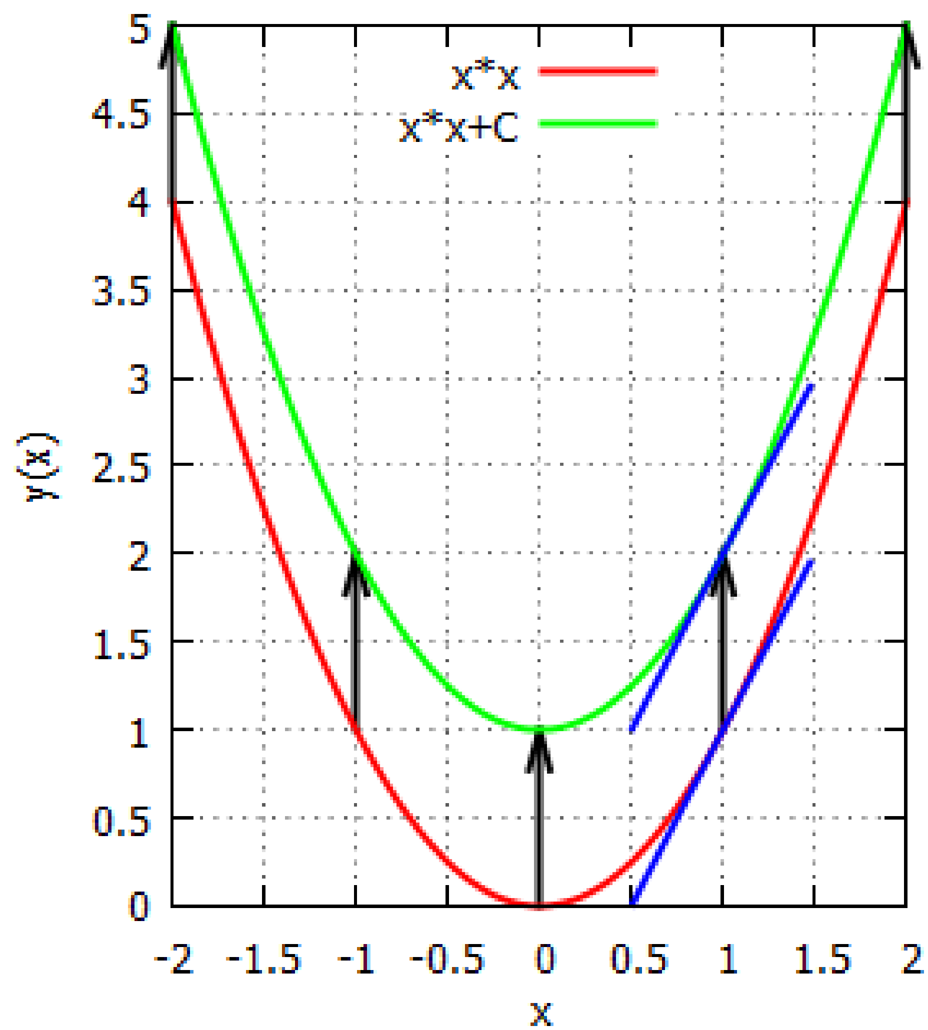




- prędkość nie zależy od wyboru początku układu współrzędnych

Interpretacja geometryczna

- Przesunięcie wykresu wzdłuż osi „y” nie zmienia nachylenia stycznej do wykresu dla danego „x”



Całka nieoznaczona - definicja

- Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną na pewnym przedziale P. Każdą funkcję $F(x)$ różniczkowalną na P i spełniającą w każdym punkcie $x \in P$ warunek

$$F'(x) = f(x)$$

nazywamy ***funkcją pierwotną*** funkcji f

lub ***całką nieoznaczoną*** funkcji f

lub po prostu ***całką*** funkcji f i oznaczamy

$$\int \boldsymbol{f(x)dx}$$

Sposób czytania

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$$

„Całka z ef od iks **po** de iks”

Niejednoznaczność całki

- Jeśli funkcja $F(x)$ jest całką funkcji $f(x)$, to każda funkcja $G(x) = F(x) + C$, gdzie C jest stałą, też jest całką funkcji f, bo $G'(x) = F'(x) = f$.
- Jeśli $F(x)$ i $G(x)$ są całkami funkcji $f(x)$, to $F(x) - G(x) = C$, gdzie C jest pewną stałą.
- W związku z powyższym w tablicach całek podaje się wzory z dokładnością do stałej C, np.

$$\int 2x\,dx = x^2 + \boldsymbol{C}$$

Całkowanie a różniczkowanie

- Całkowanie funkcji to po prostu obliczanie dowolnej całki tej funkcji
- Całkowanie (funkcji ciągłej) jest operacją odwrotną do różniczkowania:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f$$

$$\int F'(x)dx = F + C$$

Wzory podstawowe

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Te wzory łatwo sprawdzić, obliczając pochodne obu stron

Całkowanie jest operacją <u>liniową</u>

$$\int [\boldsymbol{\alpha} f(x) + \boldsymbol{\beta} g(x)]dx = \boldsymbol{\alpha}\int f(x)dx + \boldsymbol{\beta}\int g(x)dx$$

- Całka sumy jest sumą całek
- Czynnik stały (tu: $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$)
  można wyłączyć przed całkę

Całkowanie jest operacją <u>liniową</u>

$$\int [\boldsymbol{\alpha} f(x) + \boldsymbol{\beta} g(x)]dx = \boldsymbol{\alpha}\int f(x)dx + \boldsymbol{\beta}\int g(x)dx$$

Przykład:

- $\int (2x - \sqrt{x})dx = 2\int x\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$$= 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}} + C$$

$$= x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

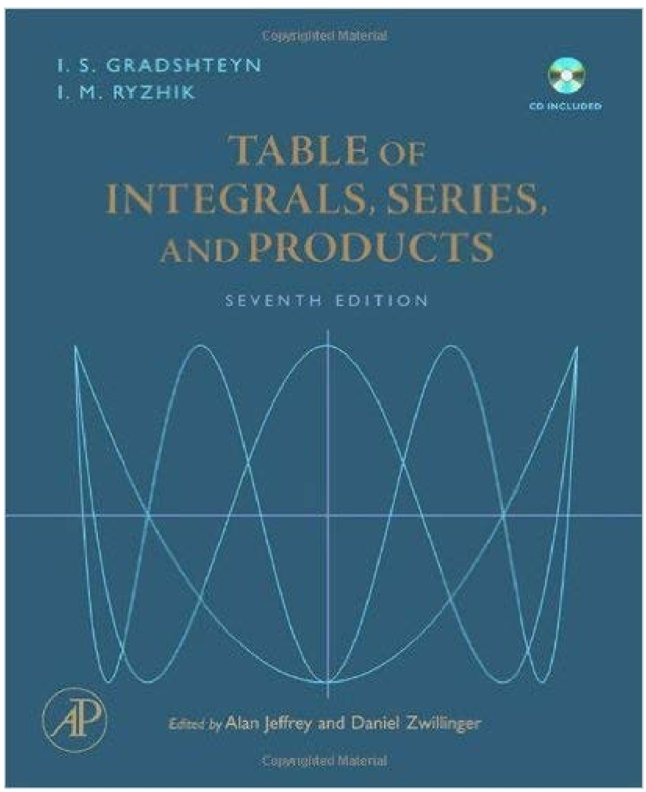
Czy całkowanie jest proste?

- Różniczkowanie jest proste, jednak daje w wyniku złożone funkcje
- Dlatego całkowanie niektórych złożonych funkcji jest proste, natomiast całkowanie większości prostych (i złożonych) funkcji jest trudne
- Całki bardzo wielu prostych funkcji nie są funkcjami elementarnymi ☹

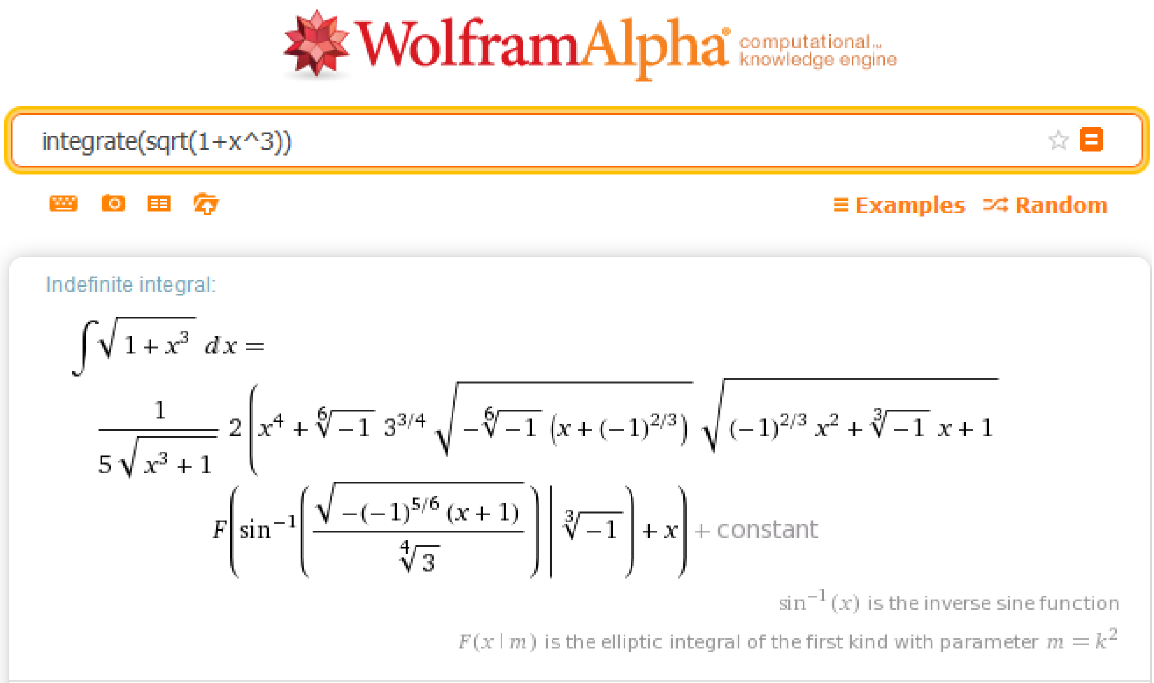
Jak się całkuje?

- 50 lat temu: ulubiony temat egzaminacyjny

- 25 lat temu:



- teraz:



Proste funkcje mogą nie mieć elementarnych całek

- $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ (tzw. całka eliptyczna)
- $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (tzw. sinus całkowy)
- $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ (tzw. logarytm całkowy)
- $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (tzw. funkcja błędu)
- i wiele innych…

Funkcje specjalne

Wiele takich nieelementarnych całek ma swoje własne oznaczenia, np.:

$$\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

oznacza się symbolem Si (sinus całkowy)

- Są to przykłady ***funkcji specjalnych***
- Nie ma sensu uczyć się ich na pamięć,
  ale trzeba mieć świadomość ich istnienia
- Octave implementuje kilkadziesiąt funkcji specjalnych

A co, jeśli całki nie ma w tablicach ani w WolframAlpha?

- Pozostają metody numeryczne, ale o tym za chwilę

DWIE METODY

Dwie popularne metody przekształcania wyrażeń całkowych

- Metoda zamiany zmiennych
- Metoda całkowania przez części

- Nie musisz ich stosować, ale powinieneś rozumieć notację, która z nich korzysta

Zamiana zmiennych

Przykład: ile wynosi $I = \int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x$?

- Wprowadzamy nową zmienną $t = x^2$
- Wyznaczamy różniczkę nowej zmiennej:
  $\mathbf{d}\boldsymbol{t} = (x^2)'\mathrm{d}x = \mathbf{2}\boldsymbol{x}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$
- Zamieniamy w całce x na t:
  $$\int \mathbf{2}\boldsymbol{x}\cos(x^2)\,\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \int \cos(t)\,\mathbf{d}\boldsymbol{t} = \underline{\sin(t) + C}$$
- Wracamy w wyniku do x zamiast t:
  $$I = \int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \underline{\sin\,(x^2) + C}$$

Całkowanie przez części

- Niech dane będą dwie funkcje, f i g.
- Wiemy, że $(fg)' = f'g + fg'$
  oraz $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}g = g'dx$. Stąd

$$\int (fg)'\,\mathrm{d}x = \int f'g\,\mathrm{d}x + \int fg'\,\mathrm{d}x$$

$$fg = \int g\,\mathrm{d}f + \int f\,\mathrm{d}g$$

$$\boxed{\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f}$$

Całkowanie przez części

minus

$$\int f\,\mathrm{d}g = fg - \int g\,\mathrm{d}f$$

różniczka
drugiej funkcji

iloczyn
(bez całki!)

różniczka
pierwszej funkcji

Całkowanie przez części

Przykład: $I = \int \ln x \,\mathrm{d}x$

- Podstawiamy $f = \ln x, g = x$
- Czyli $I = \int f \,\mathrm{d}g$
- Korzystamy ze wzoru, $I = fg - \int g\, df$
- Wracamy do „x”: $I = (\ln x) \cdot x - \int x \,\mathrm{d} \ln x$

$$I = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x$$

$$I = x \ln x - x + C$$

CAŁKI OZNACZONE

Całka oznaczona

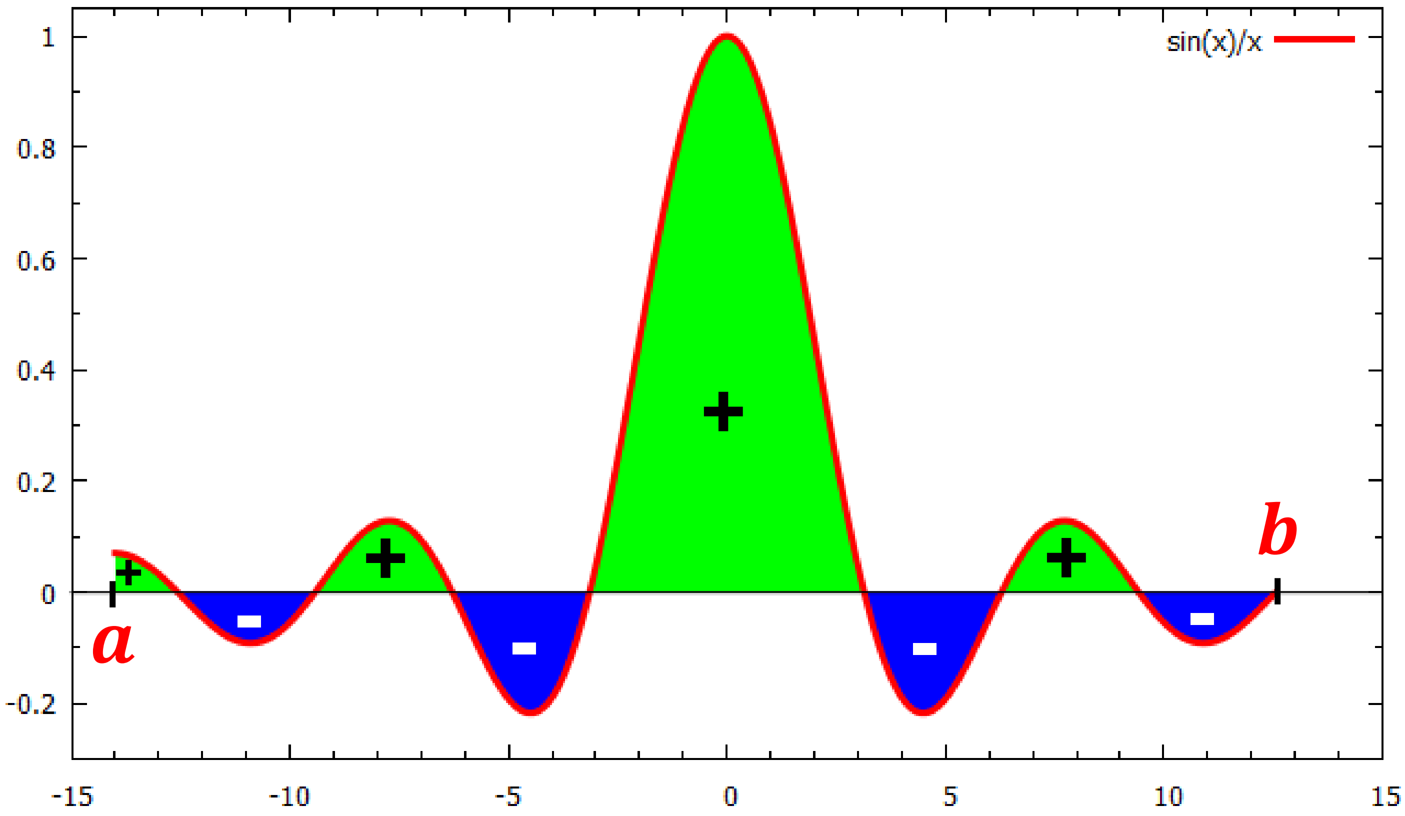
- Niech F będzie dowolną całką nieoznaczoną funkcji f ciągłej na przedziale $[a, b]$. Wtedy różnicę

$$F(b) - F(a)$$

nazywamy **całką oznaczoną** funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$$

Całka a pole pod wykresem funkcji

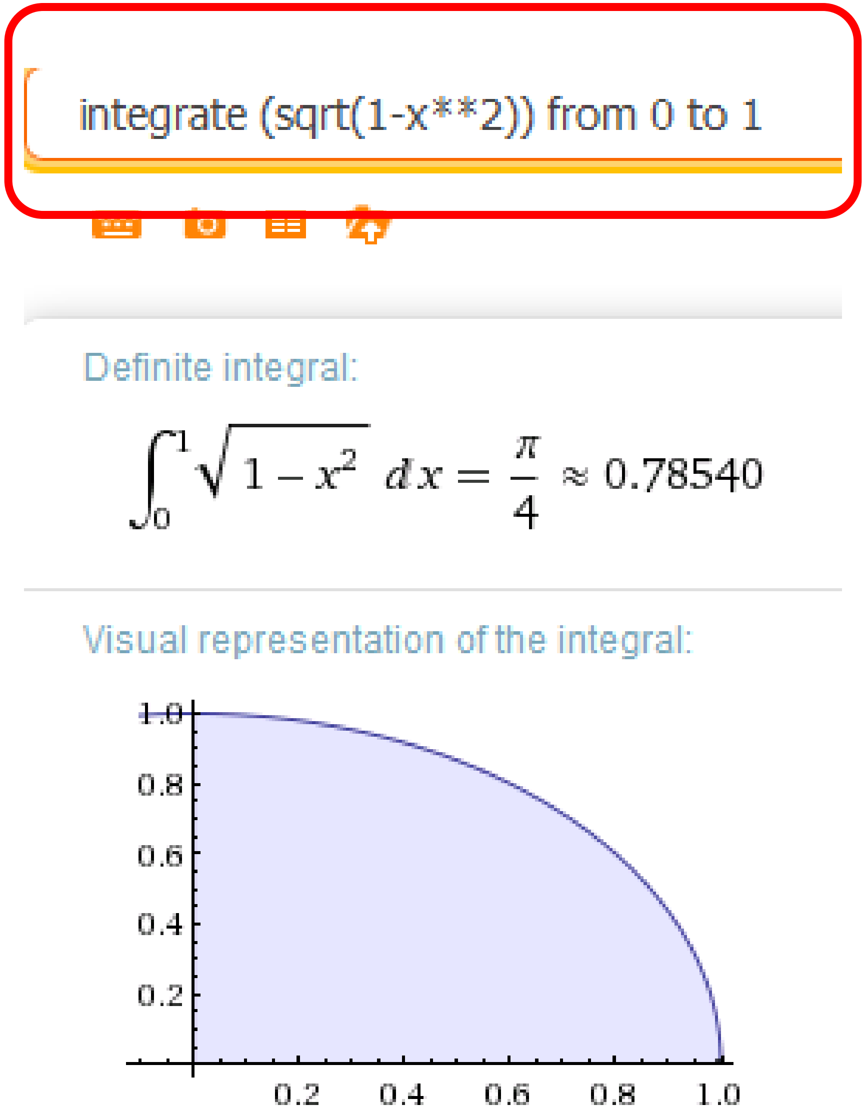


$$\int_a^b f(x)\,dx$$ = pole nad *minus* pole pod wykresem

Przykład 1

- pole ćwiartki koła to

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$



Przykład 2

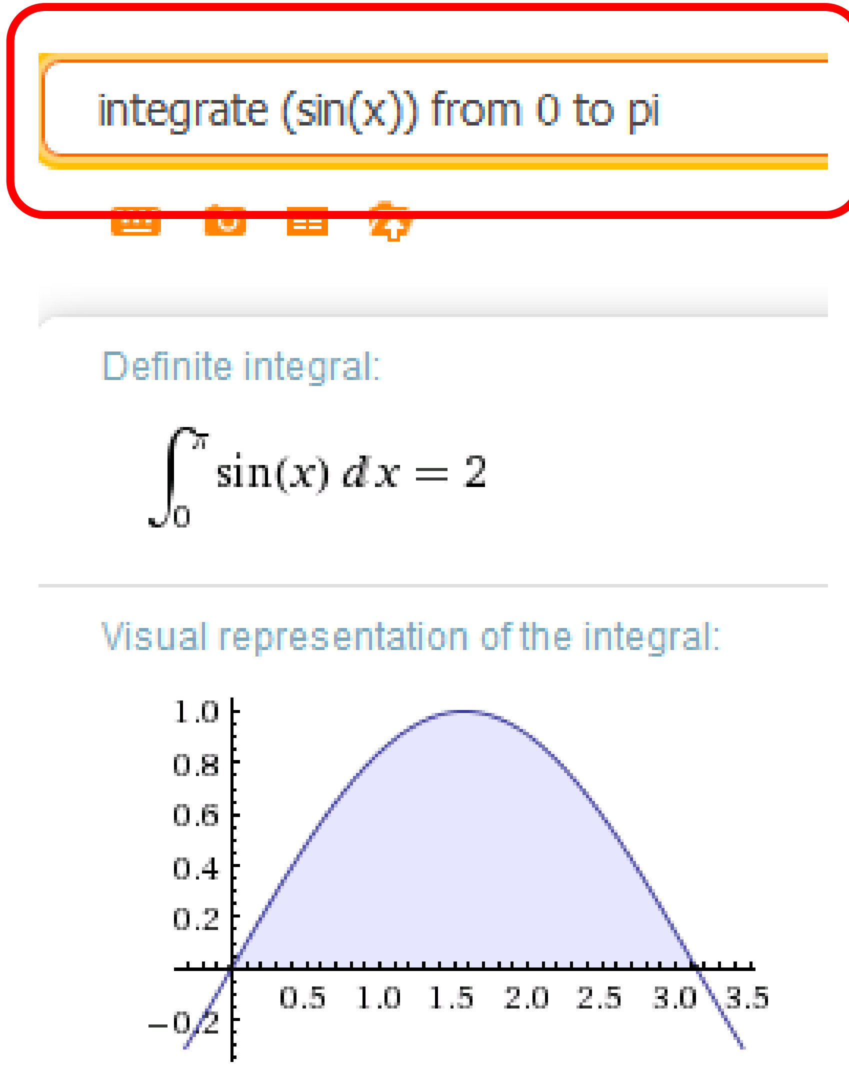
- pole jednego „garba” funkcji $f(x) = \sin(x)$

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{\sin}\,\boldsymbol{x}\,dx =$$

$$-\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\Big|_{x=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} =$$

$$-(\cos \boldsymbol{\pi} - \cos \mathbf{0}) =$$

$$-(-1-1) = 2$$



Notacja

$$\boldsymbol{F(x)}\Big|_{x=\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$$

oznacza

$$\boldsymbol{F(b)-F(a)}$$

np.

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}\,dx = \mathbf{-cos}\,\boldsymbol{x}\Big|_{x=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}}$$

bo $-\cos x \cancel{+C}$ jest całką nieoznaczoną $\sin x$

Zastosowania w fizyce i okolicach

prędkość

$$s(t) = s(0) + \int_{\tau=0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

droga

„inny czas”

czas

prąd elektryczny

$$Q(t) = Q(0) + \int_{\tau=0}^{t} I(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ładunek elektryczny

Całki wyznaczane są po czasie τ biegnącym od chwili początkowej (0) do t

„Prawdziwa całka”

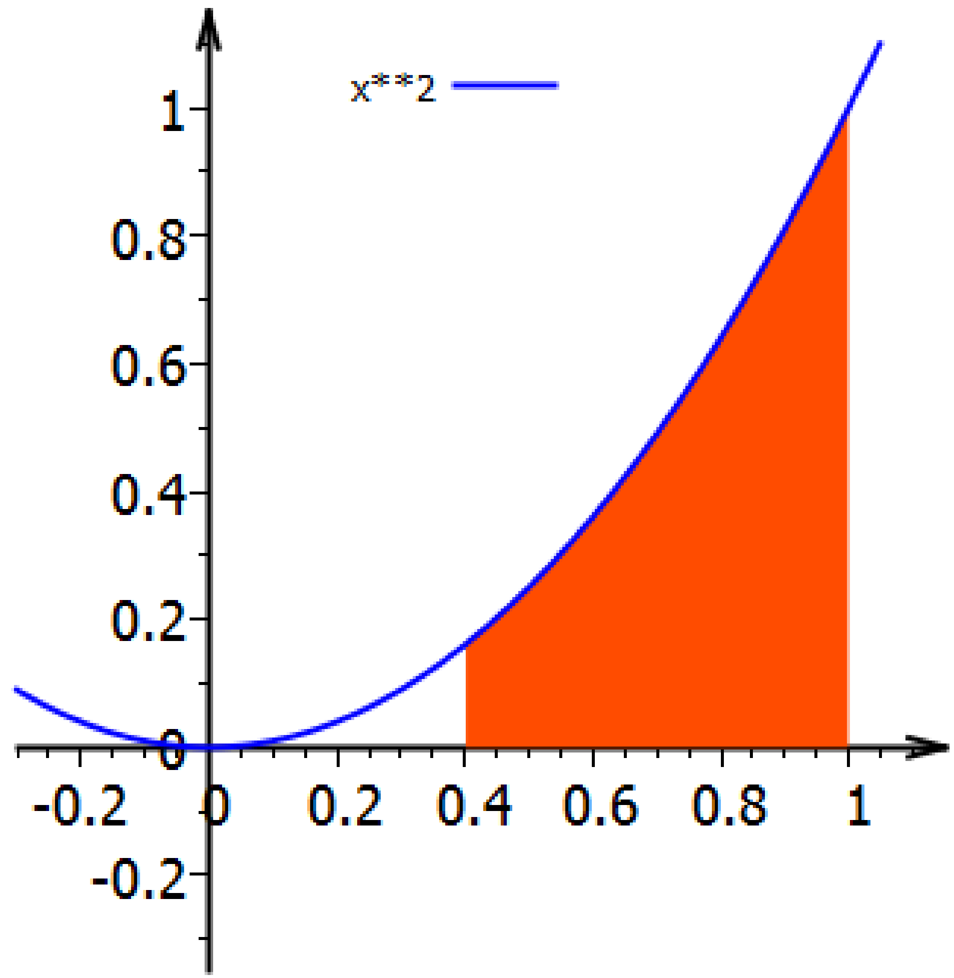
CAŁKA RIEMANNA

Motywacja

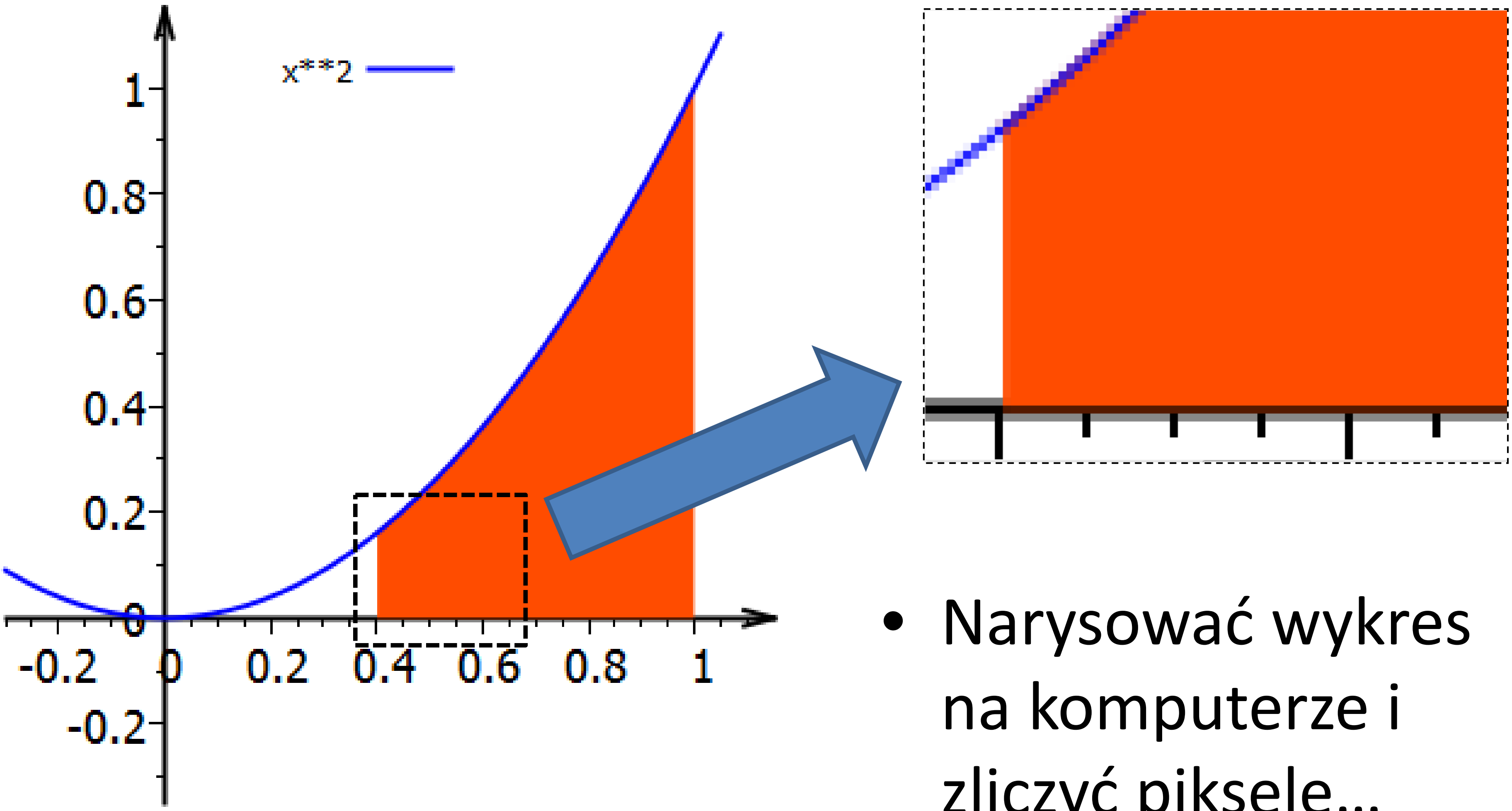
- Całka Riemanna jest intuicyjna z punktu widzenia inżynierskiego
- Pozwala całkować szerszą klasę funkcji niż metoda oparta na całce nieoznaczonej (np. niektóre funkcje nieciągłe)
- Całkowicie wystarcza „w normalnych zastosowaniach”

Cel

- Jak obliczyć pole pod krzywą, np. pod parabolą $f(x) = x^2$ dla $0{,}4 \le x \le 1$?



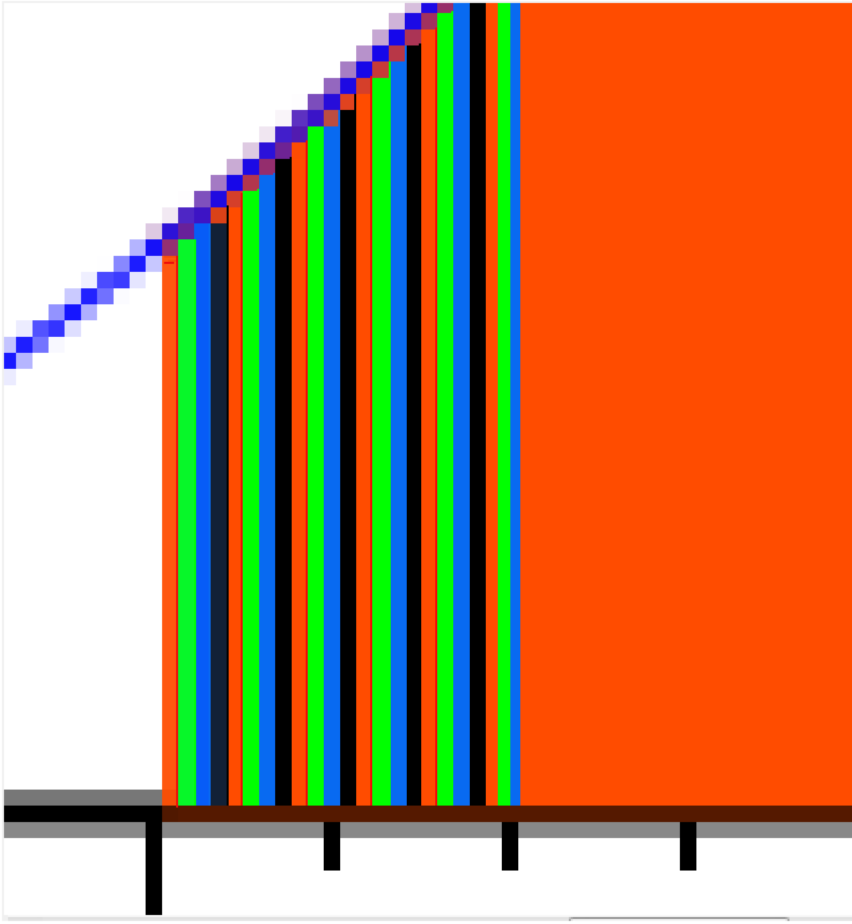
Sposób „współczesny”



- Narysować wykres na komputerze i zliczyć piksele…

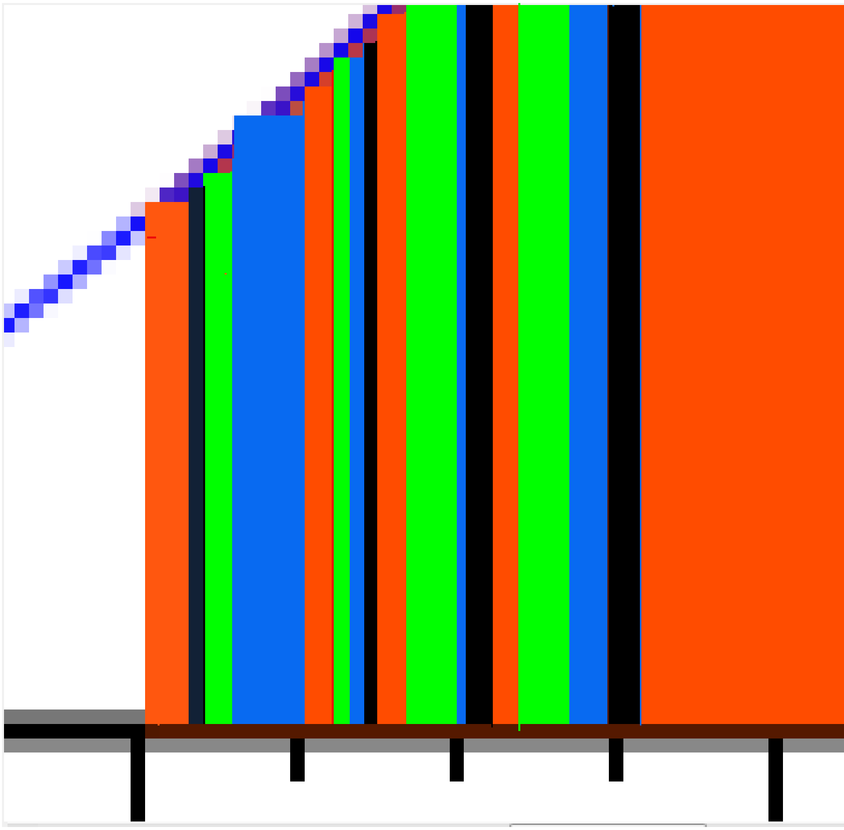
Zliczanie pikseli: w paskach?

- Zliczanie pikseli byłoby żmudne, ale kierunek myślenia nie jest zły…
- Zadanie nieco się uprości, jeżeli zamiast pojedynczych pikseli zaczniemy zliczać pionowe paski

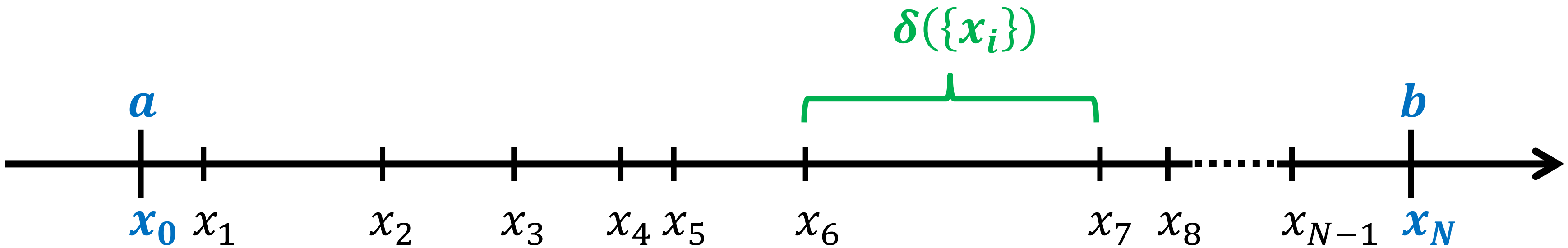


Szerokość pasków nie musi być stała

- Zadanie jeszcze bardziej się uprości, jeżeli dopuścimy, że paski mogą mieć różną szerokość
- O ile weźmiemy granicę, w której szerokość najszerszego paska dąży do zera…

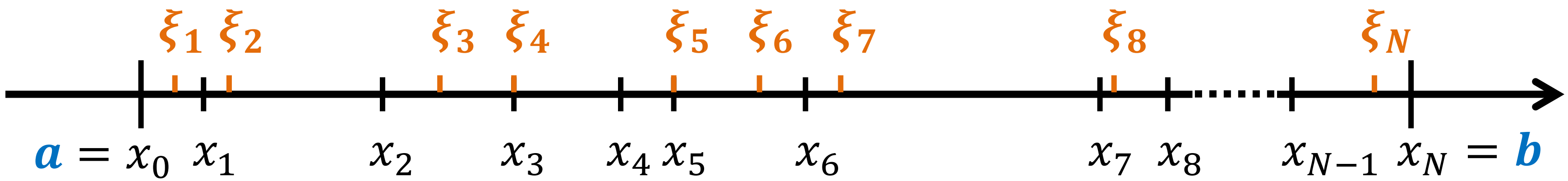


Podział przedziału całkowania



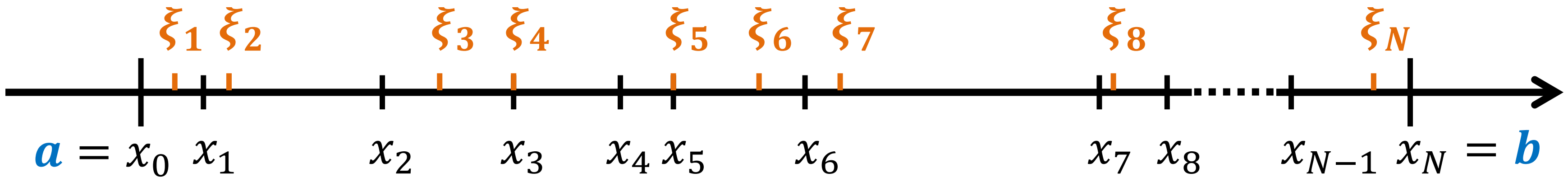
- Przedział $[a, b]$ dzielimy na N odcinków punktami $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$; dodatkowo $x_0 = a, x_N = b$ oraz $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N = b$
- Długość każdego odcinka: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Długość najdłuższego odcinka oznaczamy $\boldsymbol{\delta}(\{\boldsymbol{x_i}\})$ i nazywamy *średnicą podziału* $\{x_i\}$

Wybór punktów w podprzedziałach



- W każdym podprzedziale $[x_{k-1}, x_k]$ wybieramy dowolny punkt ξ_k (tj. $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$)
- ξ_k może leżeć wewnątrz (tu: $x_0 < \xi_1 < x_1$) lub na jednym z krańców „swojego” przedziału (tu: $\xi_4 = x_3, \xi_5 = \mathrm{x}_5$)

Utworzenie sumy

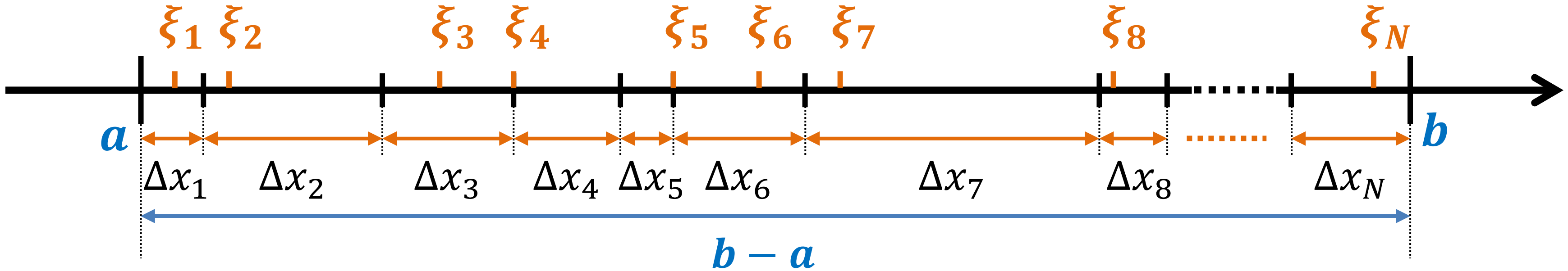


$$\boldsymbol{S = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 \ldots + f(\xi_N)\Delta x_N}$$

przypominam, że Δx_k to długość k-tego odcinka, tj.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

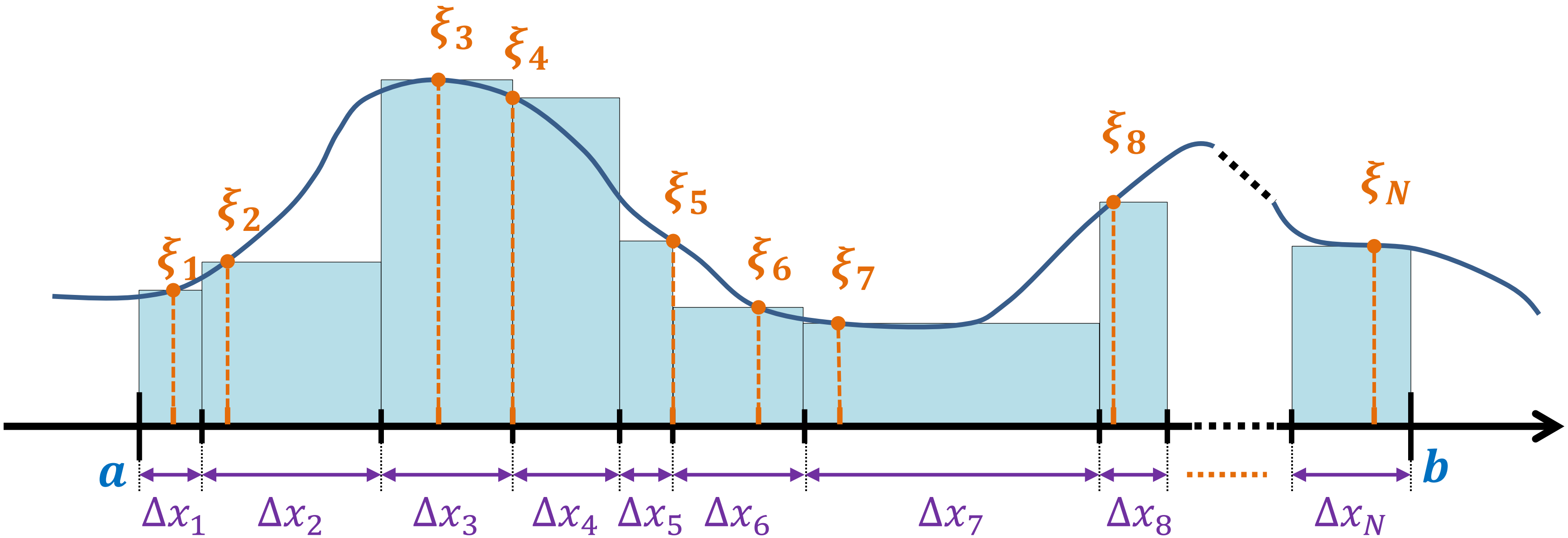
Utworzenie sumy



$$S = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

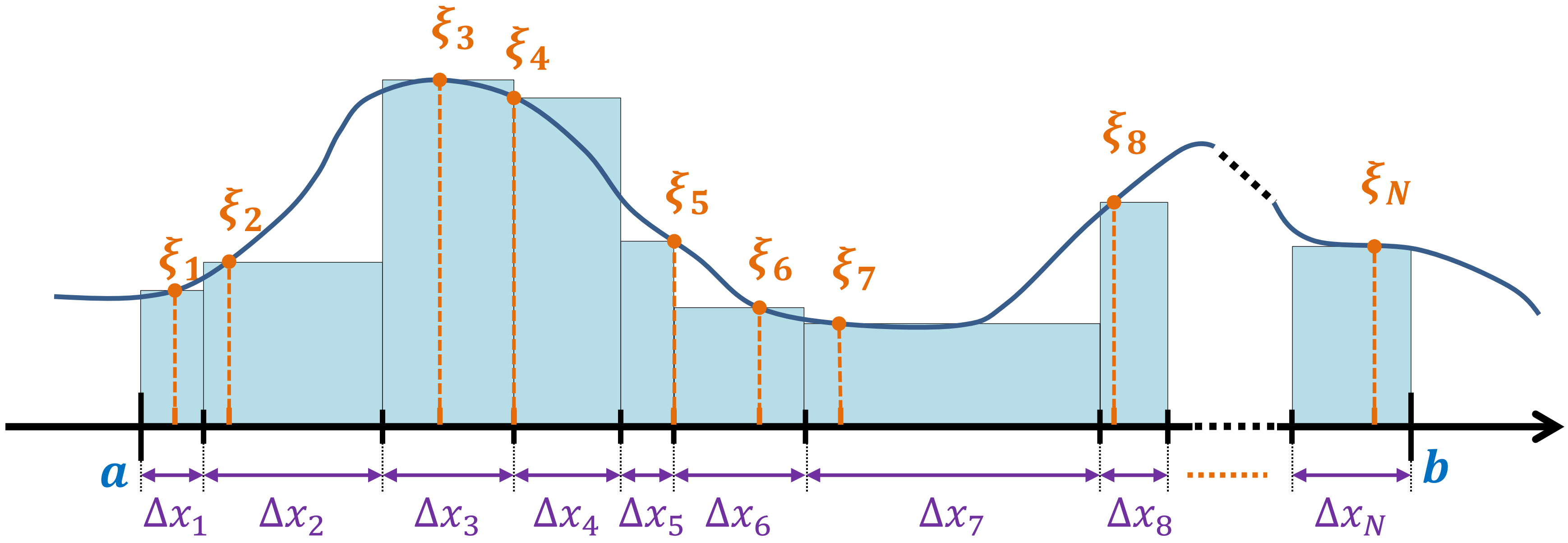
Interpretacja sumy



$$S = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

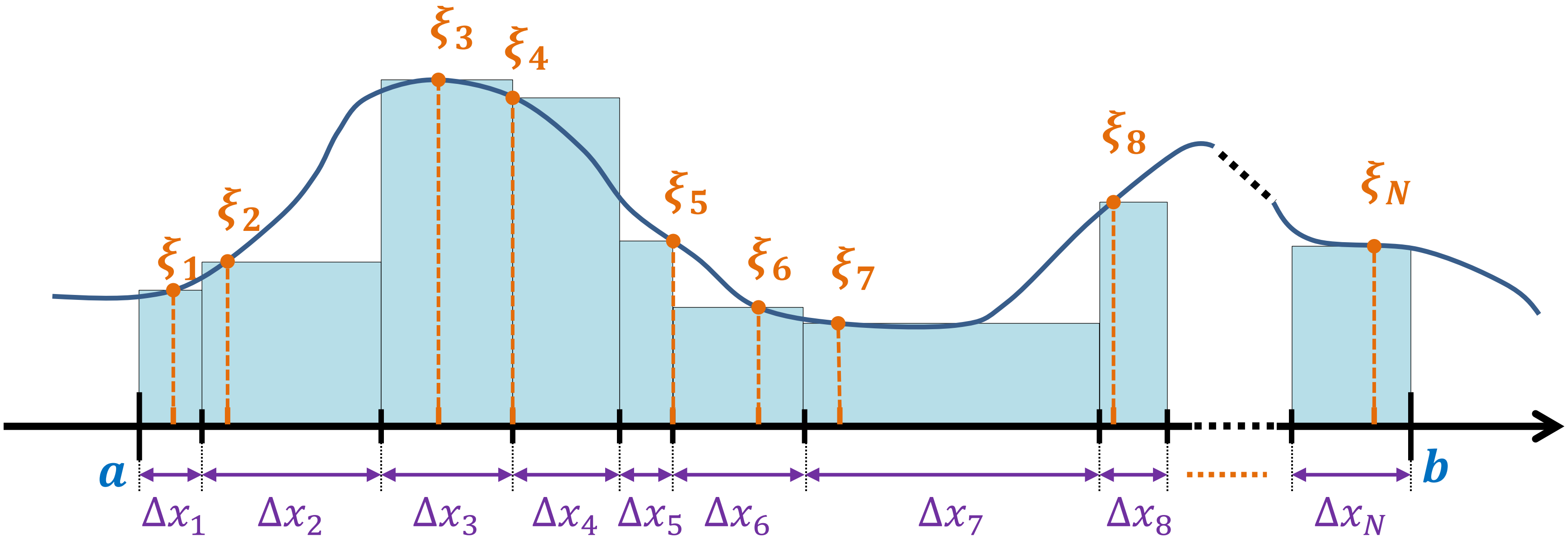
- To jest suma pól powierzchni prostokątów o podstawie Δx_k i wysokości $f(x_k)$

Interpretacja sumy



- Suma pól powierzchni prostokątów aproksymuje (przybliża) pole powierzchni pod krzywą
- Wkład prostokątów z $f(\xi_k) < 0$ jest *ujemny*
- Do pełni szczęścia potrzeba *granicy*

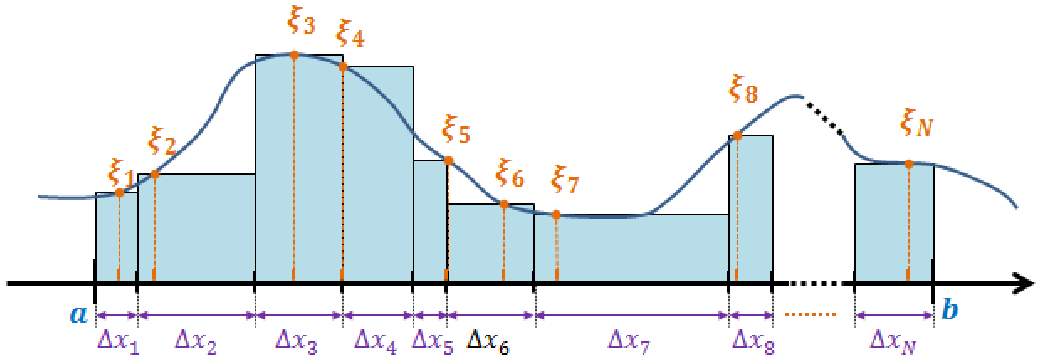
Przejście graniczne



$$\boldsymbol{R} = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{f}(\xi_k) \cdot \boldsymbol{\Delta x_k}$$

gdzie $\boldsymbol{\delta}$ to, przypominam, średnica podziału $\{x_j\}$

Przejście graniczne



$$R = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Jeżeli powyższa granica istnieje i jej wartość nie zależy od wyboru podziału $\{x_j\}$ i punktów ξ_j, to jej wartość nazywamy **całką Riemanna** funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$

Interpretacja fizyczna

$$\boldsymbol{s(t) = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{N} v(\xi_k) \cdot \Delta t_k}$$

Aby obliczyć drogę, jaką  przebył w czasie t, dzielimy ten czas na N odcinków. W każdym z nich wybieramy jakąś chwilę $\boldsymbol{\xi_k}$ i zakładamy, że  w całym odcinku czasu $[t_{k-1}, t_k]$ poruszał się ze stałą prędkością $\boldsymbol{v(\xi_k)}$, więc przebył w nim drogę $v(\xi_k) \cdot (t_k - t_{k-1})$. Sumujemy te drogi. Powtarzamy tę procedurę dla coraz drobniejszych podziałów odcinka czasu $[0, t]$ (granica!)

Przykład

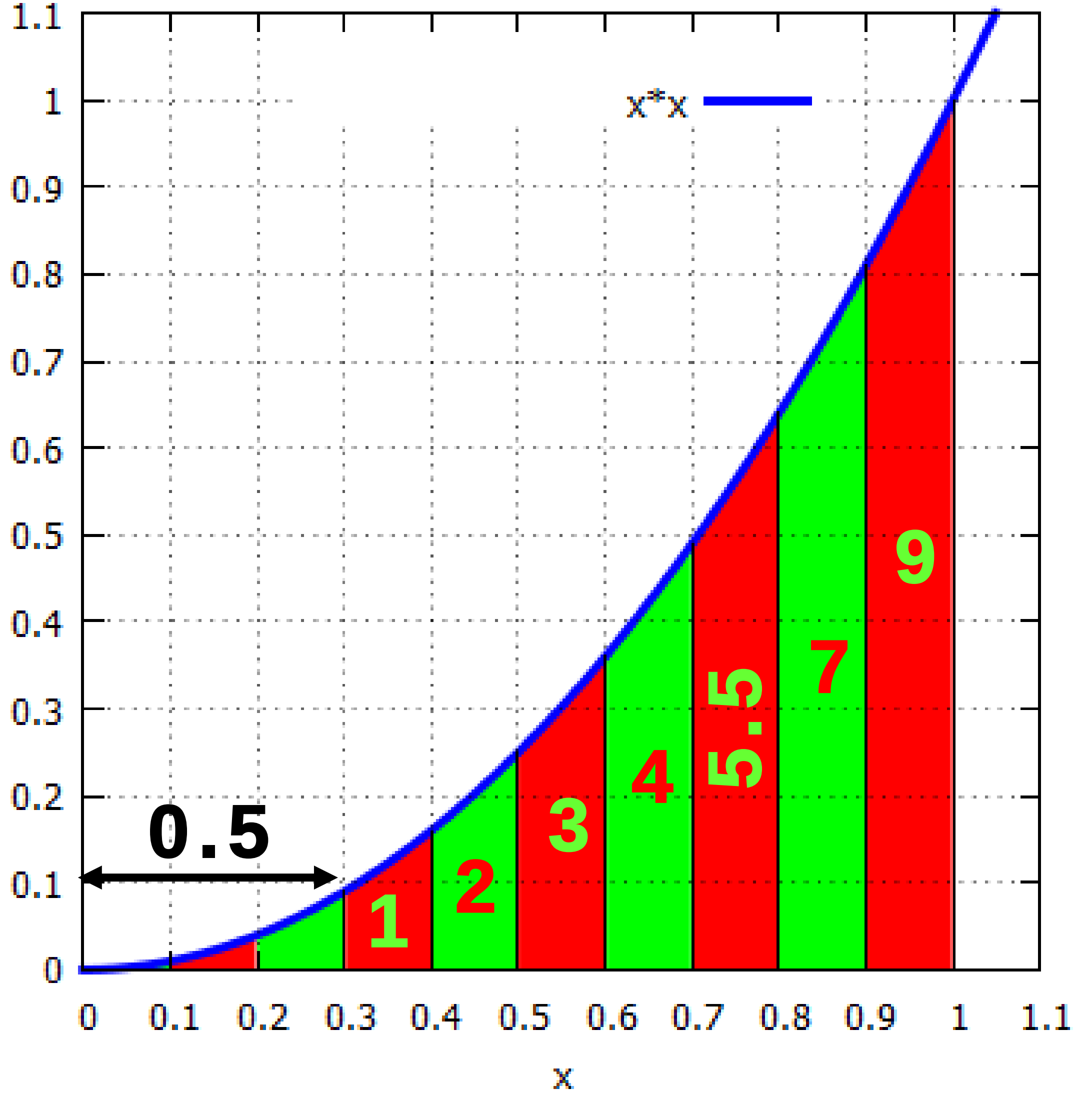
- Ile wynosi

$$I = \int_0^1 x^2\, dx \quad ?$$

- **Zliczamy kratki**

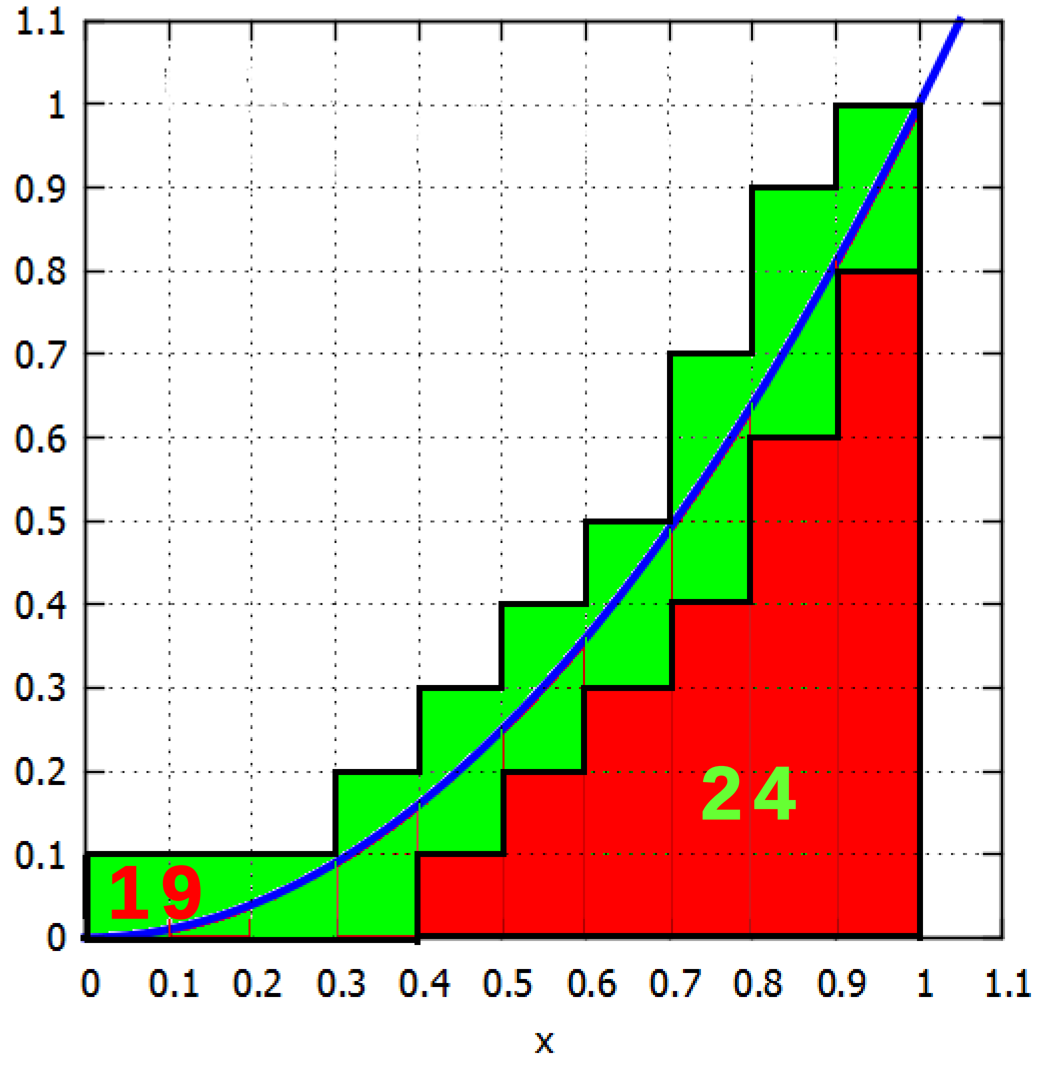
$9 + 7 + 5.5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0.5 \approx 32$

- $32 \times 0.01 = 0.32$
- Odp: $I \approx 0.32$



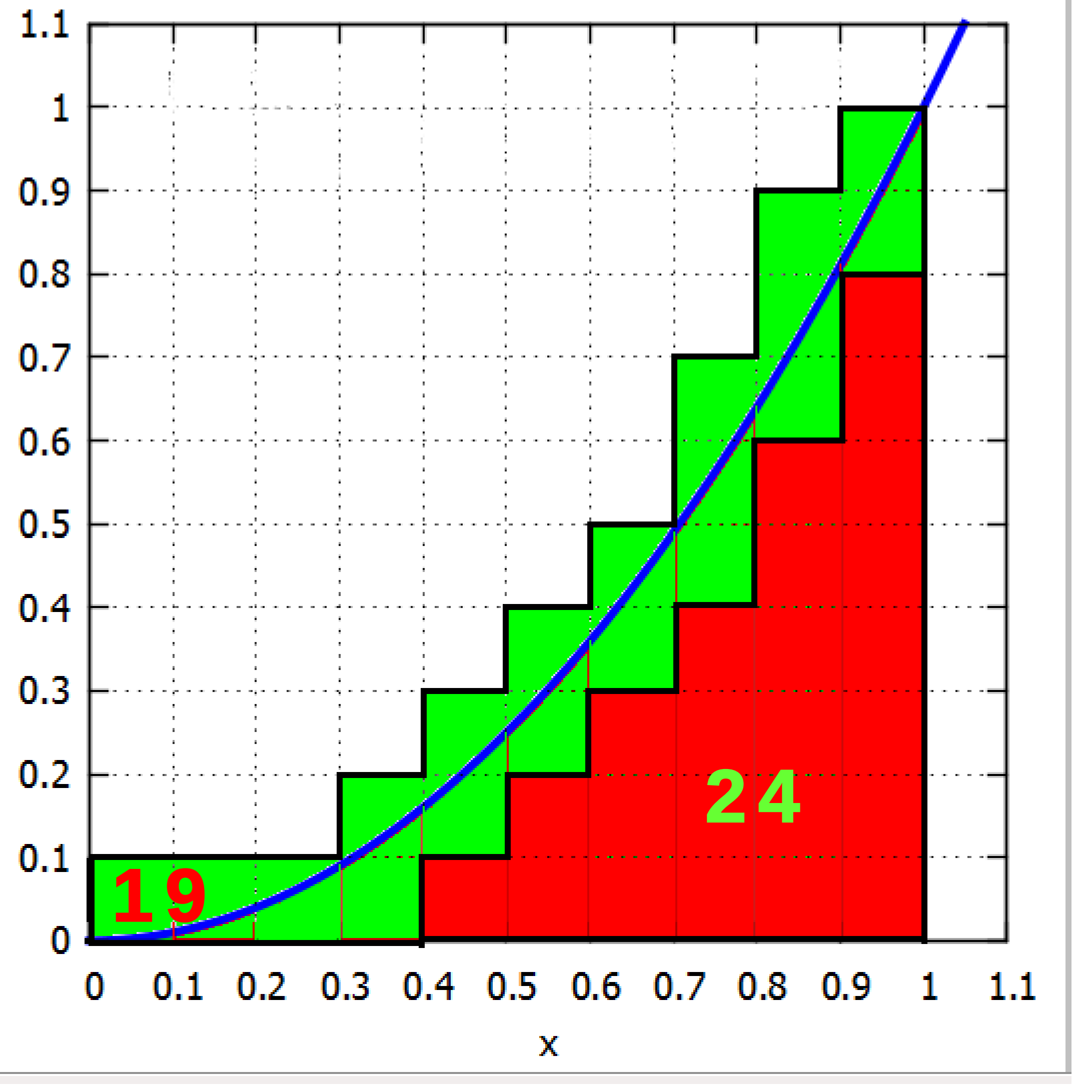
Przykład

- Można wartość całki oszacować ściśle, licząc pełne kratki pod krzywą (24) i pełne kratki obejmujące krzywą (19+24).
- $0.24 \leq I \leq 0.43$

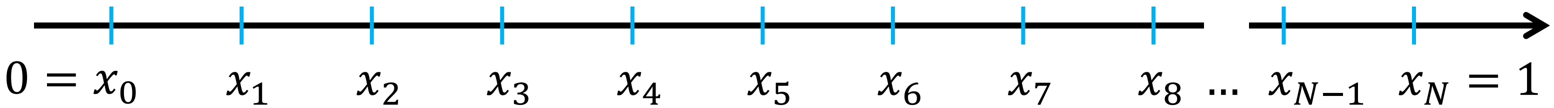


Przykład

- W tym przykładzie: w każdej kolumnie są max. 3 zielone kwadraty.
- Kwadraty $h \times h$
- Kolumn jest $1/h$
- Niepewność pomiaru = pole zielonych $\leq \frac{3h^2}{h} = 3h \xrightarrow{h \to 0} \mathbf{0}$ **(!)**



Podejście matematyczne



- Dzielimy przedział $[0,1]$ na N równych podprzedziałów $[x_{k-1}, x_k], k = 1,2, \dots, N$, gdzie

$$x_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0,1, \dots, N$$

- Długość każdego podprzedziału $h = 1/N$
- Wybieramy $\xi_k = x_k$ (prawy kraniec podprzedziału $[x_{k-1}, x_k]$)
- Tworzymy sumę $\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$

Podejście matematyczne

$$S(N) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} (\xi_k)^2 \cdot h$$

$$S(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^2 = \frac{1}{N^3} \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3}$$

$$\lim_{N \to \infty} S(N) = \lim_{N \to \infty} \frac{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}+1)(\boldsymbol{2N}+1)}{\boldsymbol{6N^3}} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

To samo z całki nieoznaczonej

$$\int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$$

więc

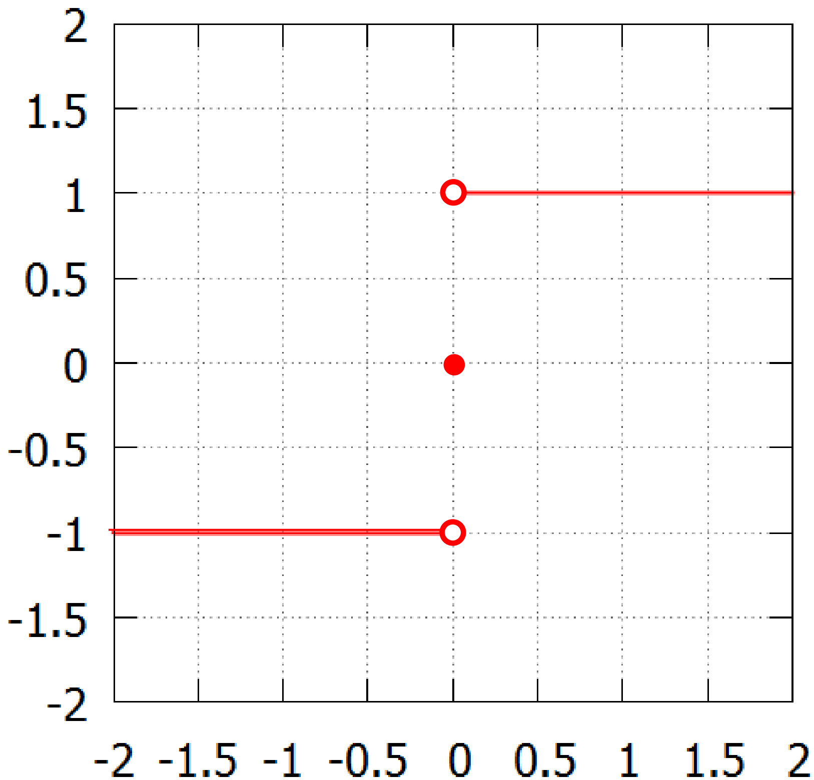
$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

czyli łatwiej i szybciej

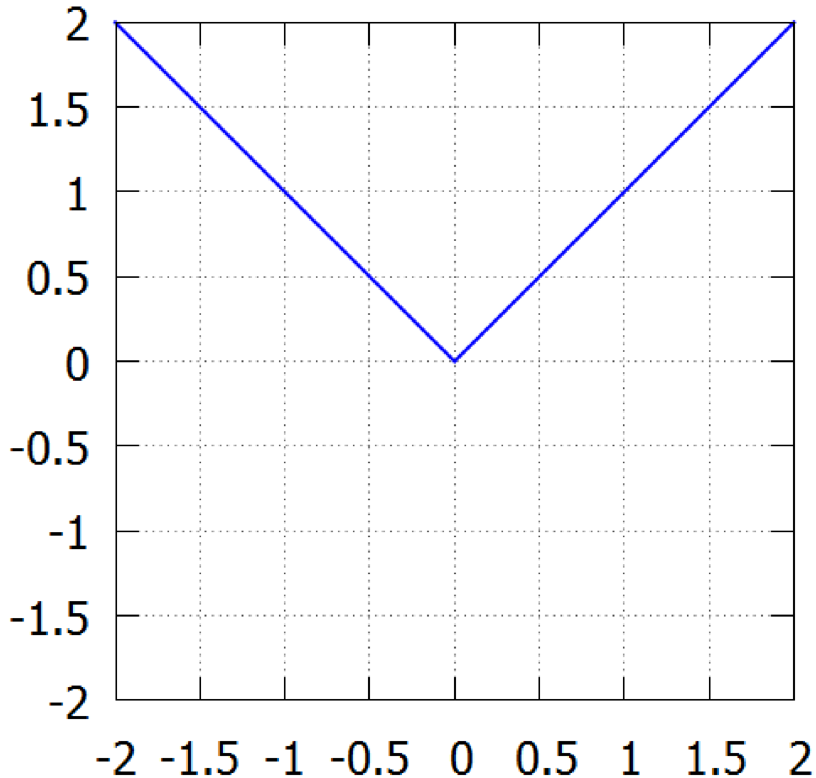
Zalety całki Riemmana

- Można całkować funkcje „trochę” nieciągłe

funkcja



całka ($\pm C$)



Symbol $\int$

- Symbol całki, $\int$, to stylizowana litera S (**S**uma)

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \boldsymbol{\Delta} x_k \to \int_a^b f(x)\, \mathbf{d}x$$

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

Przypadek 1: granica całkowania dąży do $\pm\infty$

- Całkę

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

rozumiemy jako

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Przypadek 1: granica całkowania dąży do $\pm\infty$

- Podobnie

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

rozumiemy jako

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Przykłady

uproszczona notacja

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1} = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

to nieco trudniej udowodnić

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

dwa razy całka powyżej

Przypadek 2: wartość funkcji nie jest ograniczona

- Jeżeli $f(x) \to \pm\infty$ dla $x \to \boldsymbol{a}$, to całkę

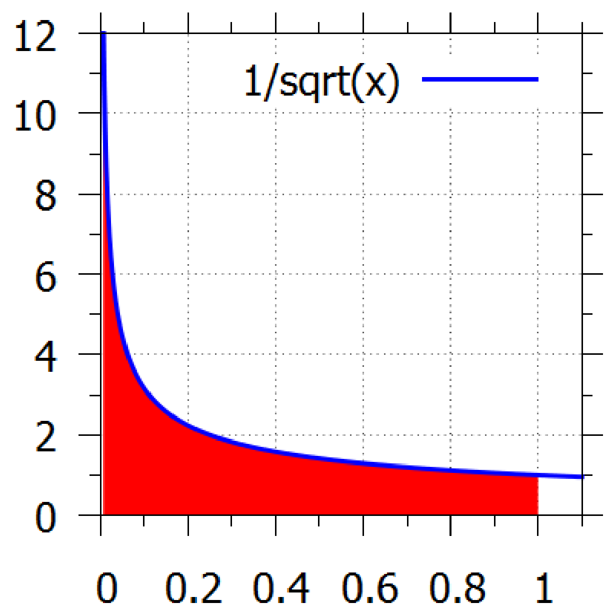
$$\int_{\boldsymbol{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Rozumiemy jako

$$\lim_{\boldsymbol{c} \to \boldsymbol{a}^{+}} \int_{\boldsymbol{c}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

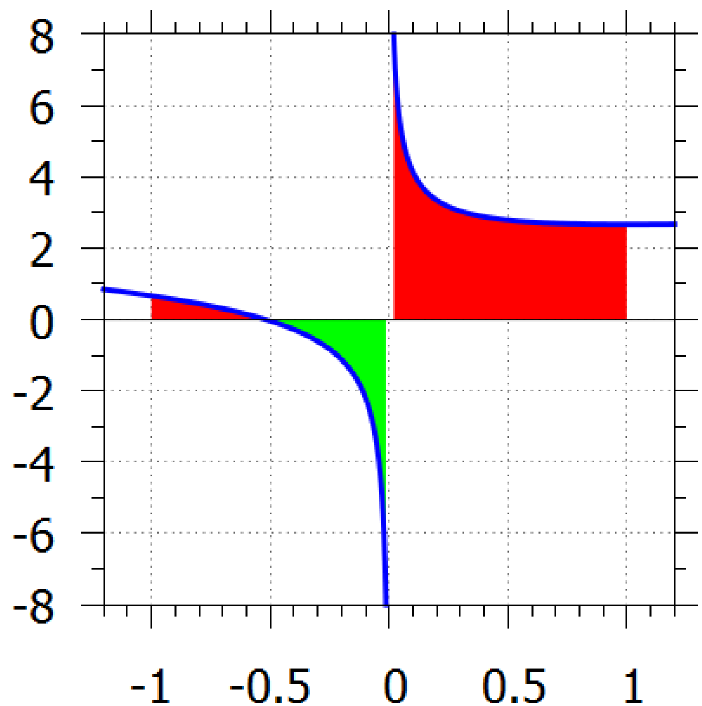
Przykłady

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2}\mathrm{d}x = x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = \sqrt{1}-\sqrt{0} = 1$$



Przykłady

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}+\frac{1}{3}\right)dx = 2$$



METODY NUMERYCZNE

Jak to się robi naprawdę

- Całkowanie jest trudniejsze i bardziej żmudne od różniczkowania
- Poza najprostszymi całkami, większość z nich próbuje się rozwiązać metodami komputerowymi (poza matematyką czystą)
- Te metody dzieli się na algebraiczne (dające ścisły wynik) i numeryczne (dające wyniki przybliżone)

Metody algebraiczne

- Wolfram Alpha, Mathematica, Maxima, etc.
- Usiłują wyznaczyć całkę nieoznaczoną poprzez funkcje elementarne lub funkcje specjalne

Indefinite integral:

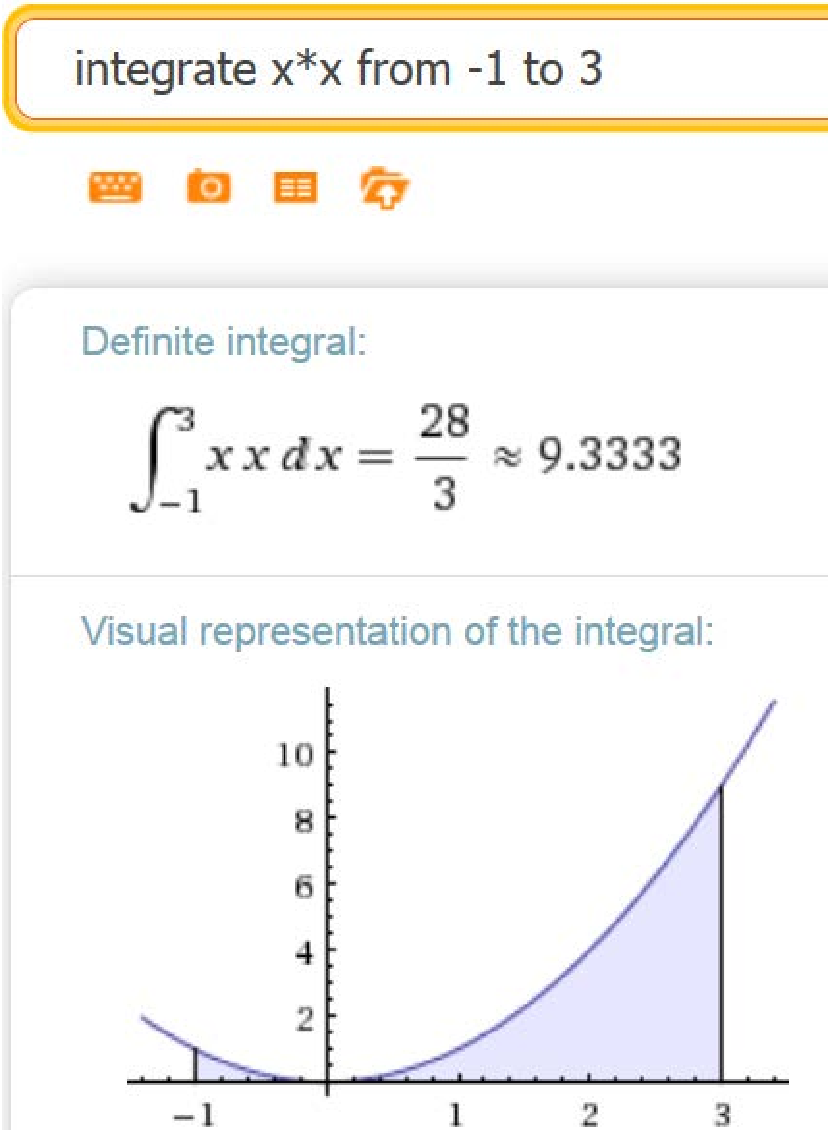
$$\int \frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\,dx = \frac{2(-1)^{3/4}\sqrt{x^2+1}\left(F\left(i\sinh^{-1}\left(\sqrt[4]{-1}\sqrt{x}\right)\middle|-1\right)-E\left(i\sinh^{-1}\left(\sqrt[4]{-1}\sqrt{x}\right)\middle|-1\right)\right)}{\sqrt{x}\sqrt{x+\frac{1}{x}}} + \text{constant}$$

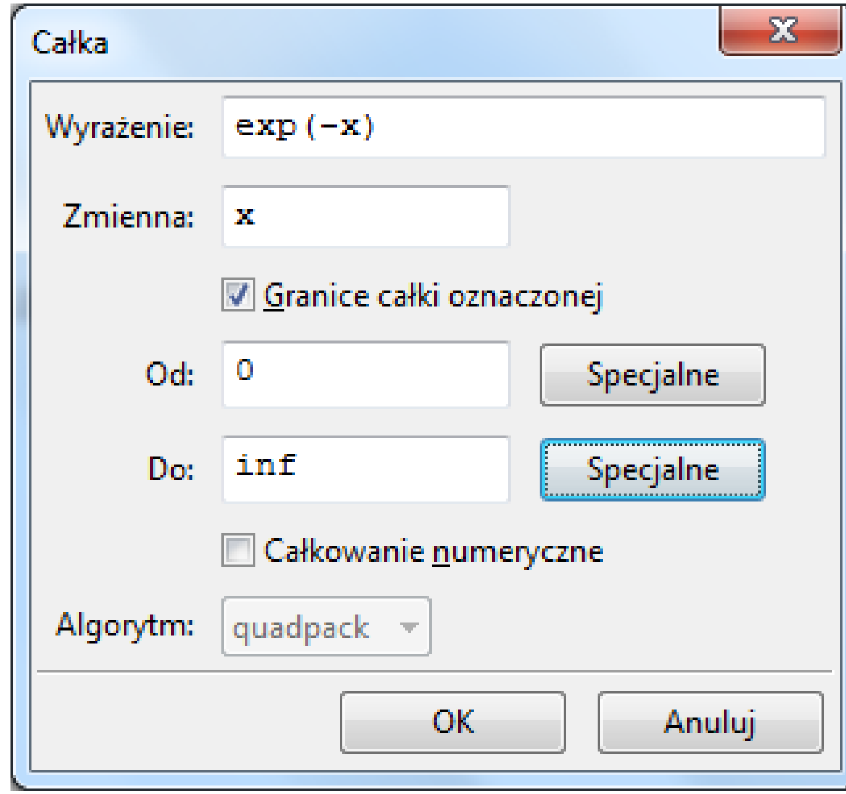
$\sinh^{-1}(x)$ is the inverse hyperbolic sine function

$E(x\,|\,m)$ is the elliptic integral of the second kind with parameter $m=k^2$

$F(x\,|\,m)$ is the elliptic integral of the first kind with parameter $m=k^2$

Wolfram Alpha, wxMaxima…





(%i1) integrate(exp(-x), x, 0, inf);

(%o2) 1

Metody numeryczne

- Opierają się na całce Riemanna (sumowanie plus ekstrapolacja)
- Octave – 5 metod:

```
quad   (f, a, b)
quadv  (f, a, b)
quadl  (f, a, b)
quadgk (f, a, b)
quadcc (f, a, b)
```

Przykład

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

```
>> quad(@(x)(1/sqrt(x)), 0, 1)
   ans =  2.00000000000000
>> [q, ier, nfun, err] =   quad(@(x)(1/sqrt(x)), 0, 1)
   q =  2.00000000000000  # wartość
   ier = 0                # 0 oznacza sukces
   nfun =  231            # liczba wywołań funkcji
   err =   5.77e-015      # oszacowanie błędu
```

Maxima

- (%i1) quad_qags(1/sqrt(x), x, 0, 1);
  (%o1) [1.9999999999999998,5.77*10^-15,231,0]

błąd

wynik