Uniwersytet Wrocławski

Zastosowania pochodnych

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2015

SZACOWANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ

Przykład: objętość kuli

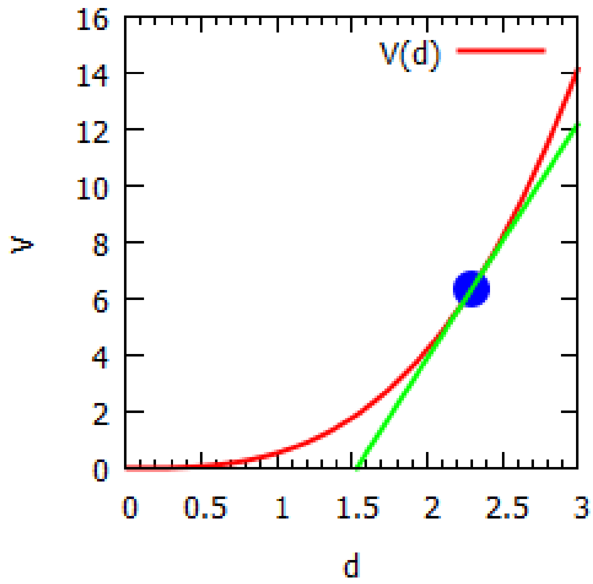
- Kulka z łożyska tocznego ma średnicę 2,3 mm, co oznacza, że objętość kulki wynosi

$$V = \frac{\pi d^3}{6} \approx 6{,}3706263027\ \mathrm{mm}^3$$

Dokładność suwmiarki, której użyto do pomiaru średnicy kulki, wynosi 0,1 mm. Jaka jest dokładność pomiaru jej objętości?

Przybliżenie liniowe funkcji za pomocą pochodnej

- $\boldsymbol{f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$



- Przyjmujemy $f \equiv \boldsymbol{V}, x \equiv \boldsymbol{d}, d_0 = x_0 = 2{,}3\ \mathrm{mm}$

$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$
$$V(d) \approx V'(d_0) \cdot (d - d_0) + V(d_0)$$
$$V(d) - V(d_0) \approx V'(d_0) \cdot (d - d_0)$$
$$\Delta V \approx V' \Delta d$$
$$|\Delta \boldsymbol{V}| \approx |\boldsymbol{V}'| \cdot |\Delta \boldsymbol{d}|$$

Oszacowanie niepewności zmiennej zależnej

Współczynnik proporcjonalności, czyli pochodna V’(d)

Niepewność wartości zmiennej niezależnej

$$|\Delta \boldsymbol{V}| \approx |\boldsymbol{V}'| \cdot |\Delta \boldsymbol{d}|$$

Oszacowanie niepewności zmiennej zależnej

Współczynnik proporcjonalności, czyli pochodna V’(d)

Niepewność wartości zmiennej niezależnej

$$V(d) = \frac{\pi \mathrm{d}^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V'(d) = 3 \cdot \frac{\pi d^{3-1}}{6} = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$|\Delta V| \approx \frac{\pi d^2}{2} \cdot |\Delta d| = 3{,}14 \cdot \frac{2.3^2}{2} \cdot 0.1 \ = 0{,}83\ [\mathrm{mm}^3]$$

$$\boldsymbol{V = 6,37\ \pm 0,83\ \mathrm{mm}^3}$$

Notacja

$$d = 2{,}30 \pm 0{,}1 \text{ mm}$$

$$V = 6{,}37 \ \pm 0{,}83 \text{ mm}^3$$

2 cyfry znaczące

alternatywny (zalecany) zapis:

$$V = 6{,}37(83) \text{ mm}^3$$

Notacja

$$d = 2{,}30 \pm 0{,}1\ \mathrm{mm}$$

$$V = 6{,}37\ \pm 0{,}83\ \mathrm{mm}^3$$

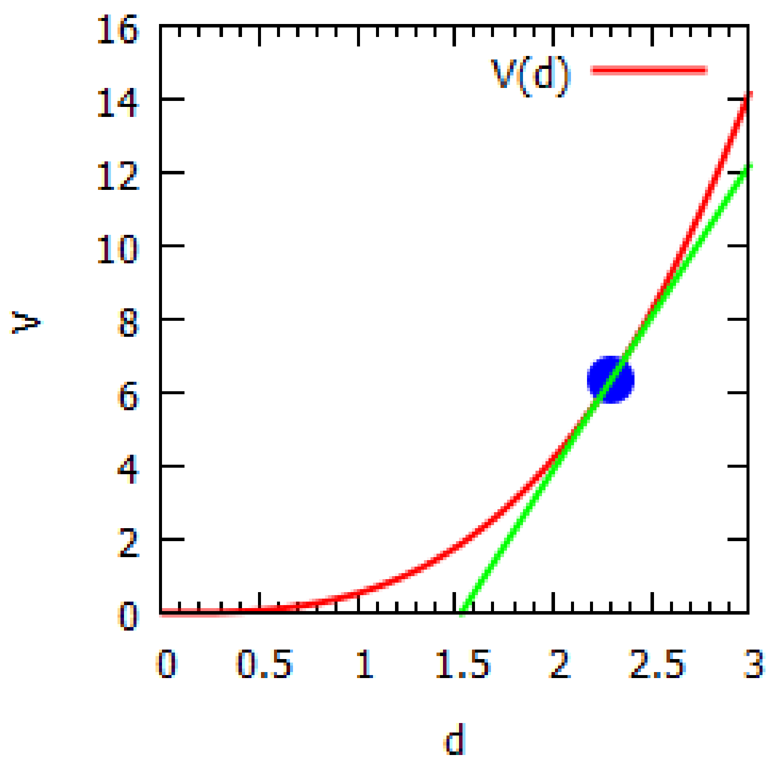
2 cyfry znaczące

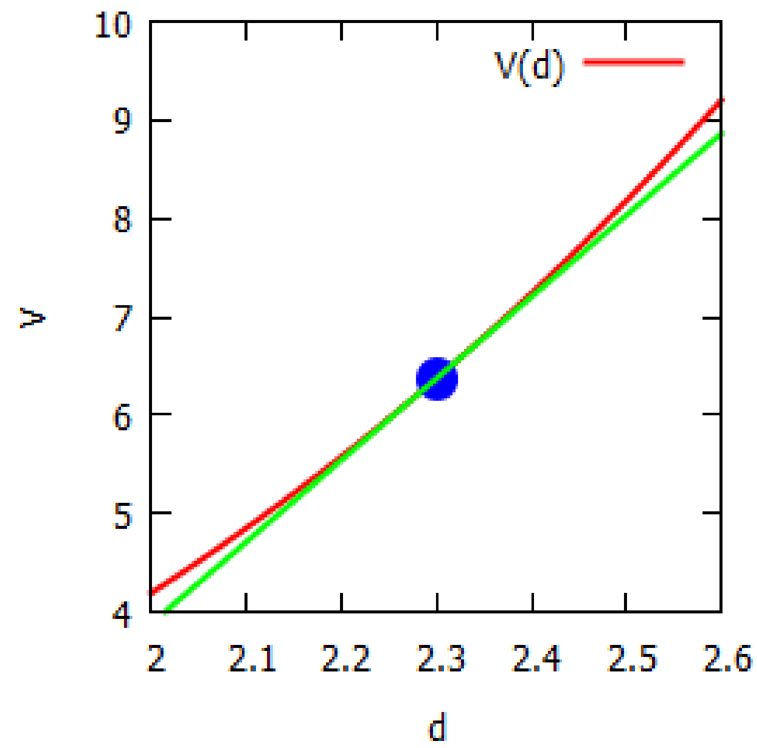
alternatywny (zalecany) zapis:

$$V = 6{,}37(83)\ \mathrm{mm}^3$$

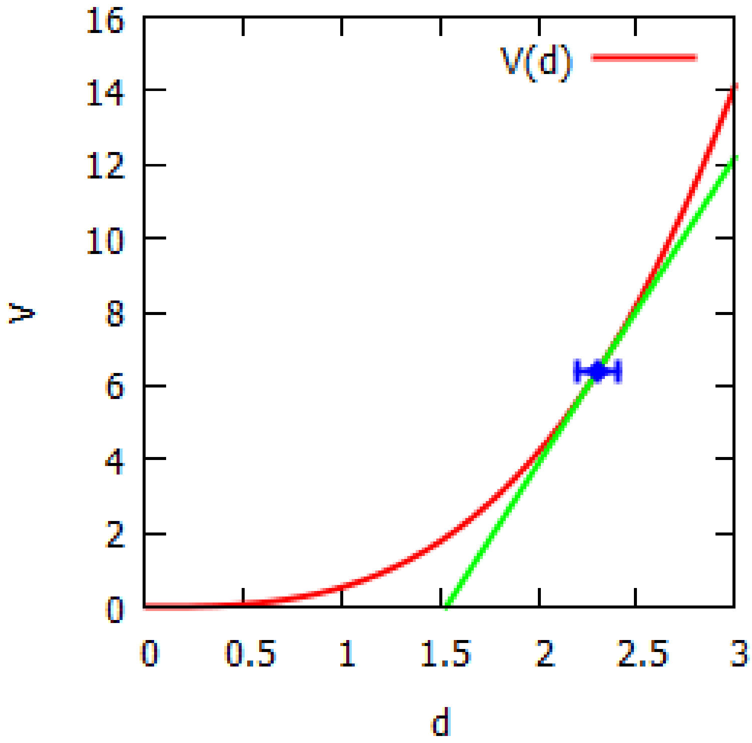
- Żadna z powyższych czterech liczb nie jest dokładna!

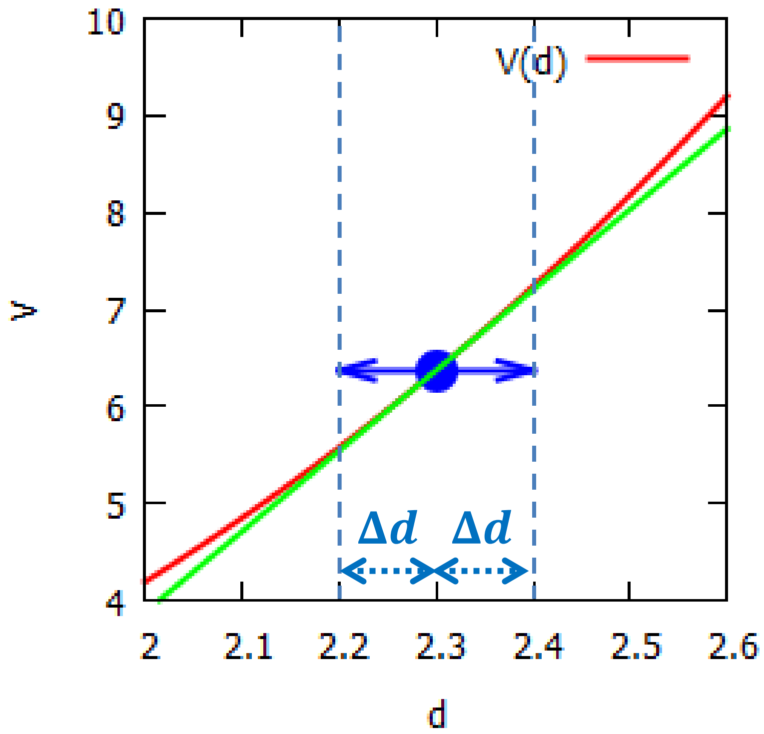
Dlaczego to działa?



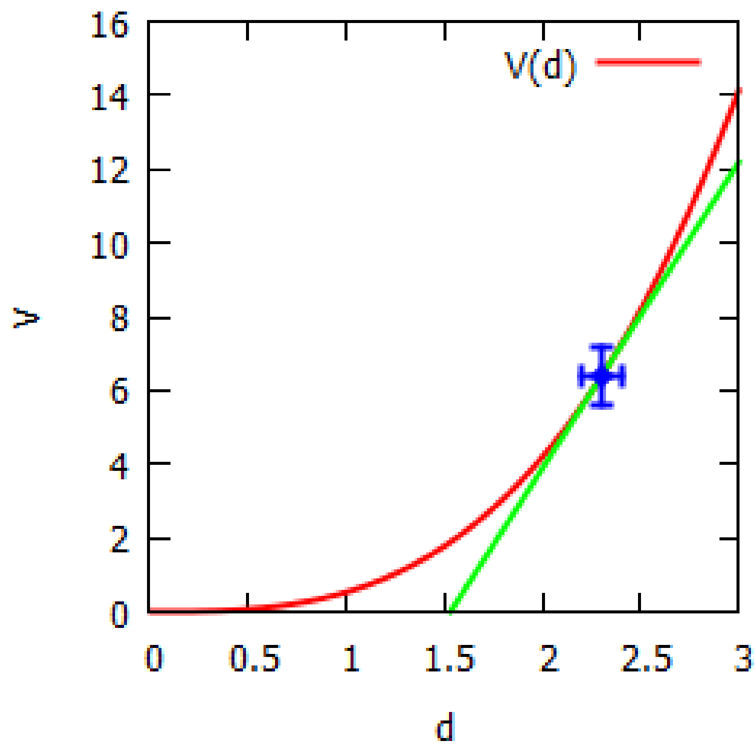


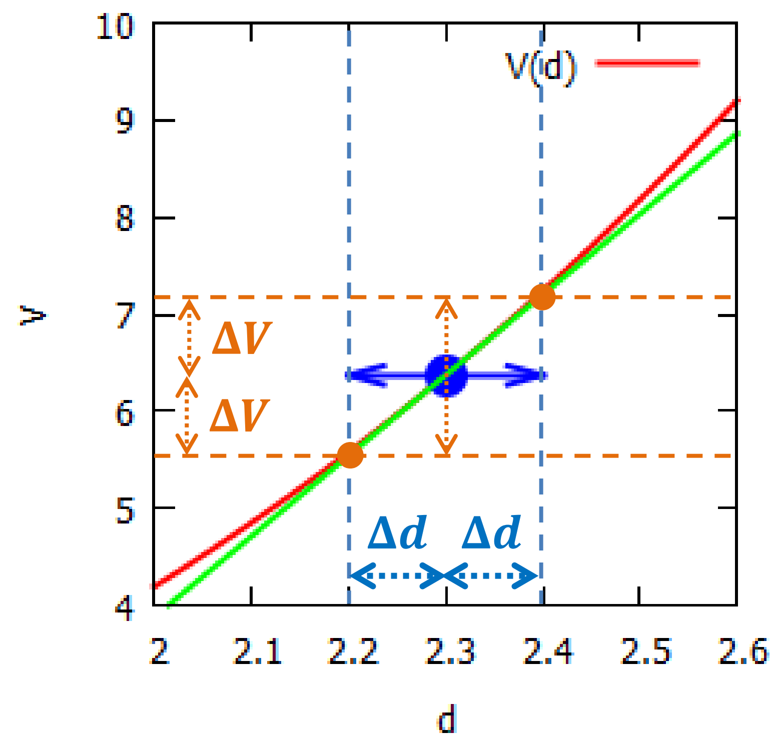
Dlaczego to działa?





Dlaczego to działa?





Interpretacja pochodnej

$$|\Delta \boldsymbol{V}| \approx |\boldsymbol{V}'| \cdot |\Delta \boldsymbol{d}|$$

Oszacowanie niepewności zmiennej <u>zależnej</u>

Współczynnik proporcjonalności, czyli pochodna V'(d)

Niepewność wartości zmiennej <u>niezależnej</u>

- Wartość pochodnej zmiennej V względem d informuje nas w sposób ilościowy, w jaki sposób zmiana d wpływa na zmianę V.

$$|\Delta \boldsymbol{V}| \approx \left(\mathbf{8.3\ mm^2}\right) \cdot |\Delta \boldsymbol{d}|$$

Skutek

„wzmocnienie"

Przyczyna

Ogólny wzór
na niepewność pomiarową

$$|\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \approx |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \cdot |\Delta \boldsymbol{x}|$$

- Dla funkcji wielu zmiennych jest podobnie, ale o tym nieco później

Badanie funkcji

PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIE

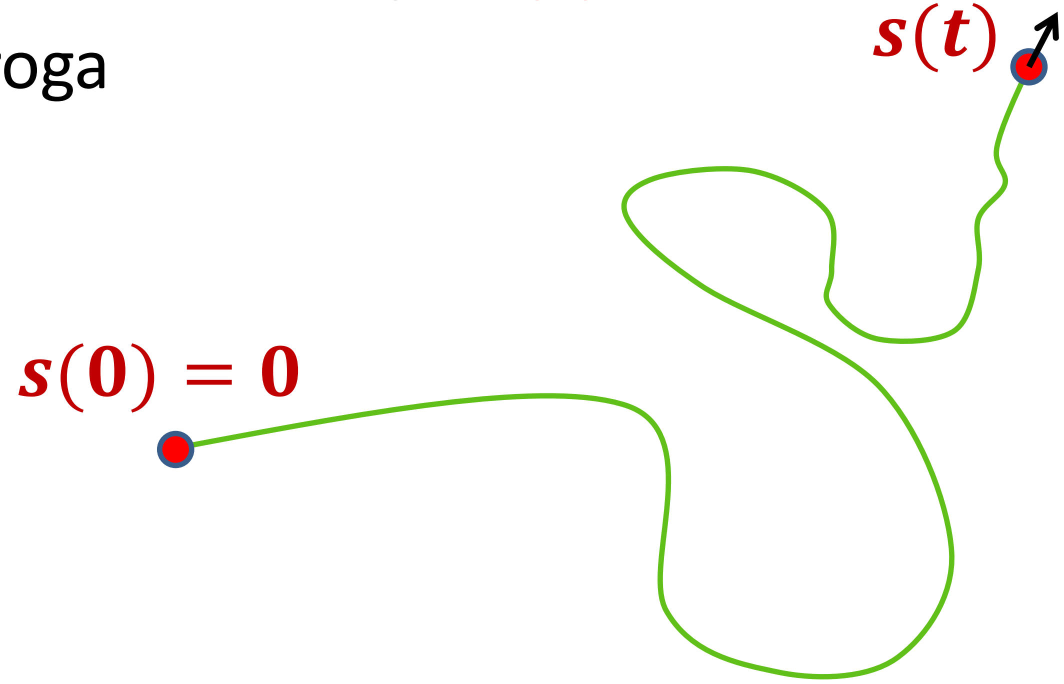
Prędkość

- Prędkość (szybkość)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$\boldsymbol{s}$ = przebyta droga

$\boldsymbol{t}$ = czas



Przyspieszenie

- Przyspieszenie

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

$\boldsymbol{s}$ = przebyta droga

$\boldsymbol{v}$ = prędkość

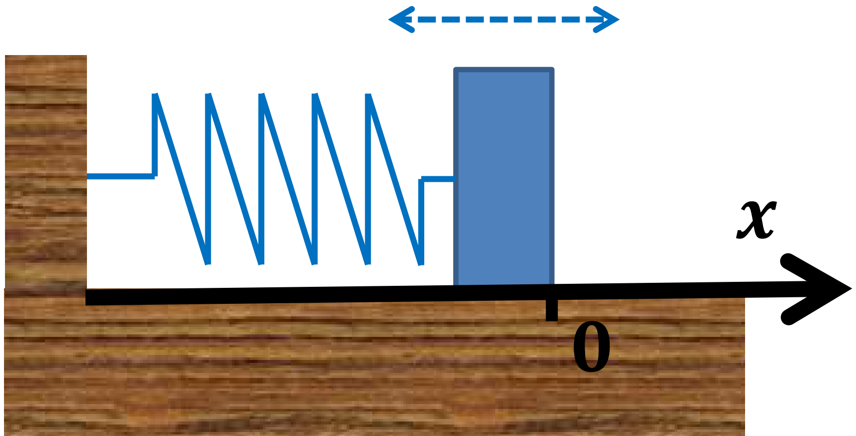
$\boldsymbol{t}$ = czas

Przykład - zadanie

- Położenie pewnego obiektu, który porusza się po linii prostej wzdłuż osi x, dane jest równaniem

$$x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 10t, \qquad 0 \leq t \leq 7s$$

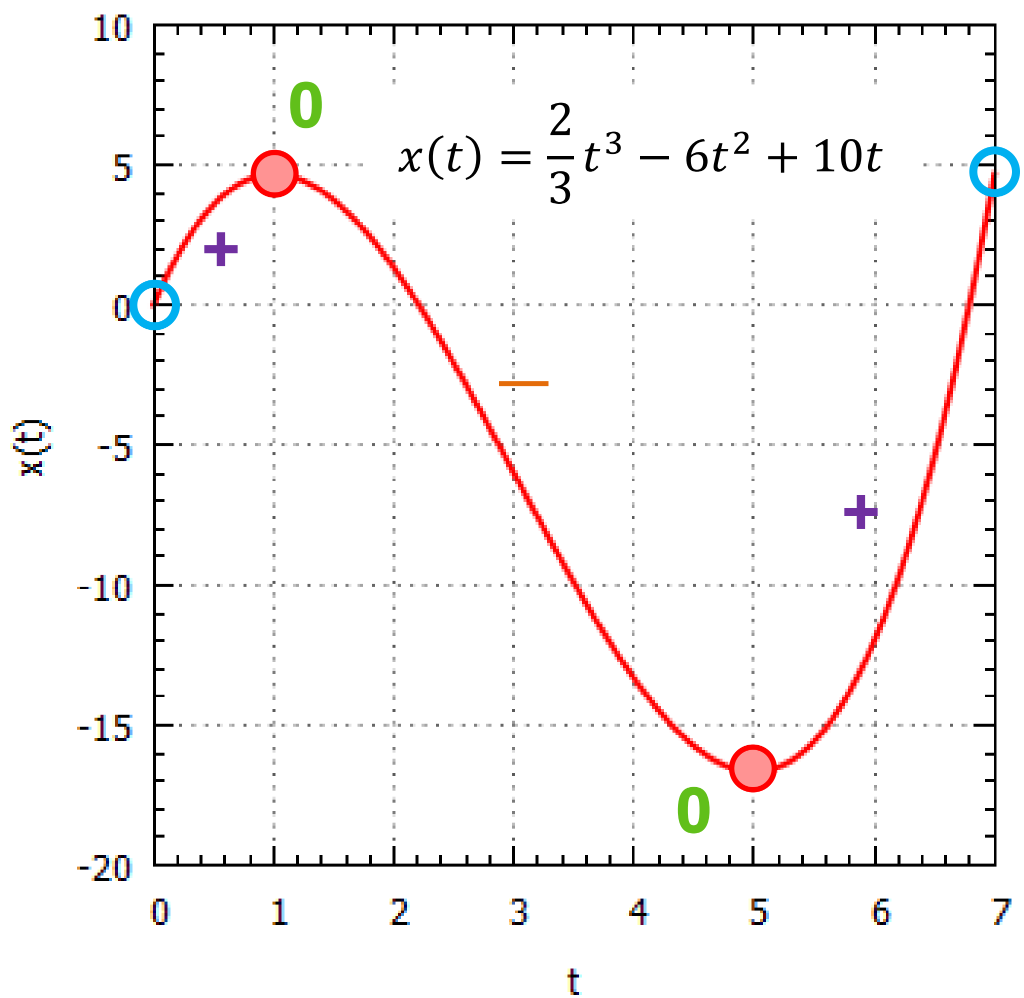
Jaką drogę przebył ten obiekt w ciągu pierwszych 7 sekund ruchu?



Kiedy funkcja jest rosnąca/malejąca?

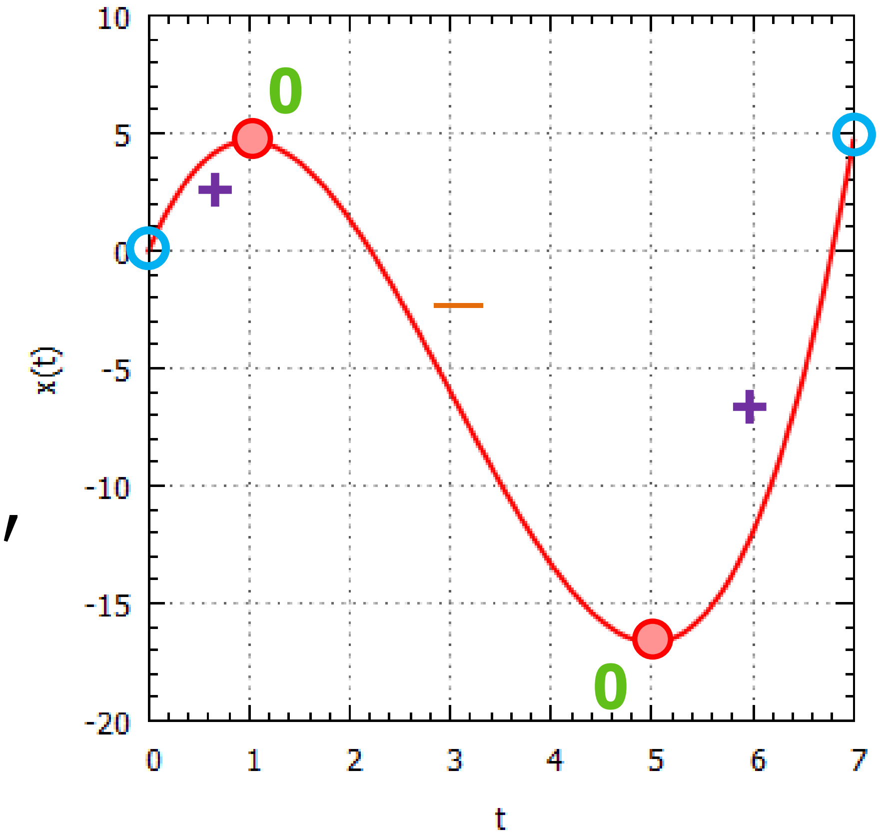
- $v = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$

- $\boldsymbol{v > 0 \Leftrightarrow \Delta x > 0}$
- $\boldsymbol{v < 0 \Leftrightarrow \Delta x < 0}$
- $\boldsymbol{v = 0 \Leftrightarrow \Delta x = 0}$



Kiedy funkcja jest rosnąca/malejąca?

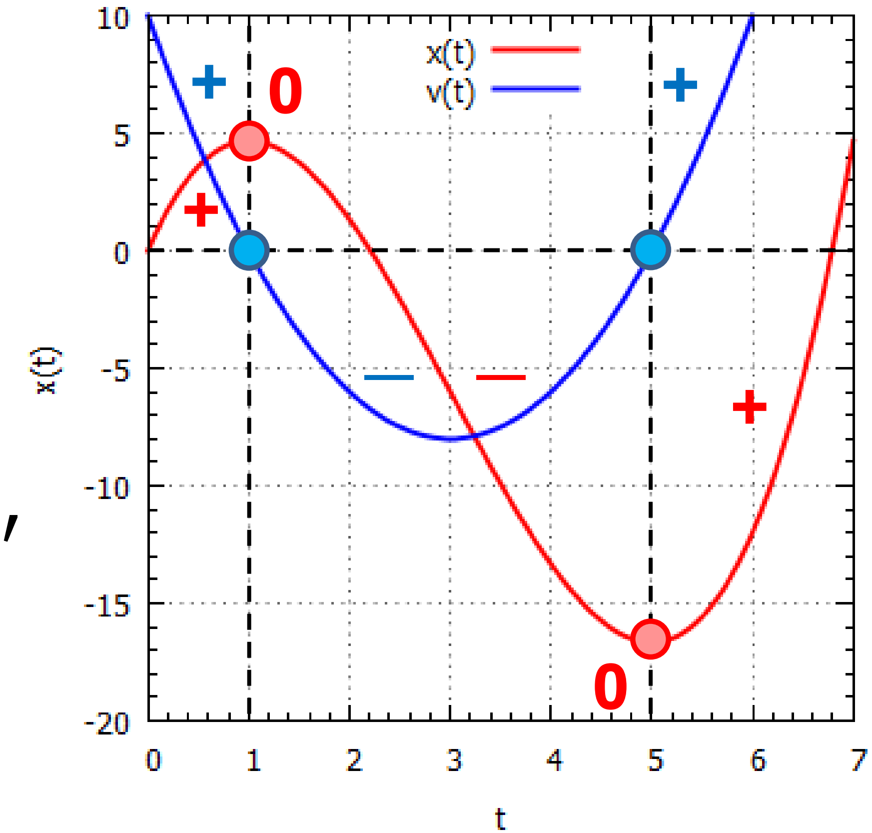
- $v > 0 \Rightarrow \Delta x > 0$ **funkcja rosnąca**
- $v < 0 \Rightarrow \Delta x < 0$ **funkcja malejąca**
- $v = 0 \Rightarrow \Delta x = 0$
  tu mogą być minima lub maksima



- $v = \frac{dx(t)}{dt}$
  $= \left(\frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 10t\right)'$
  $= 2t^2 - 12t + 10$

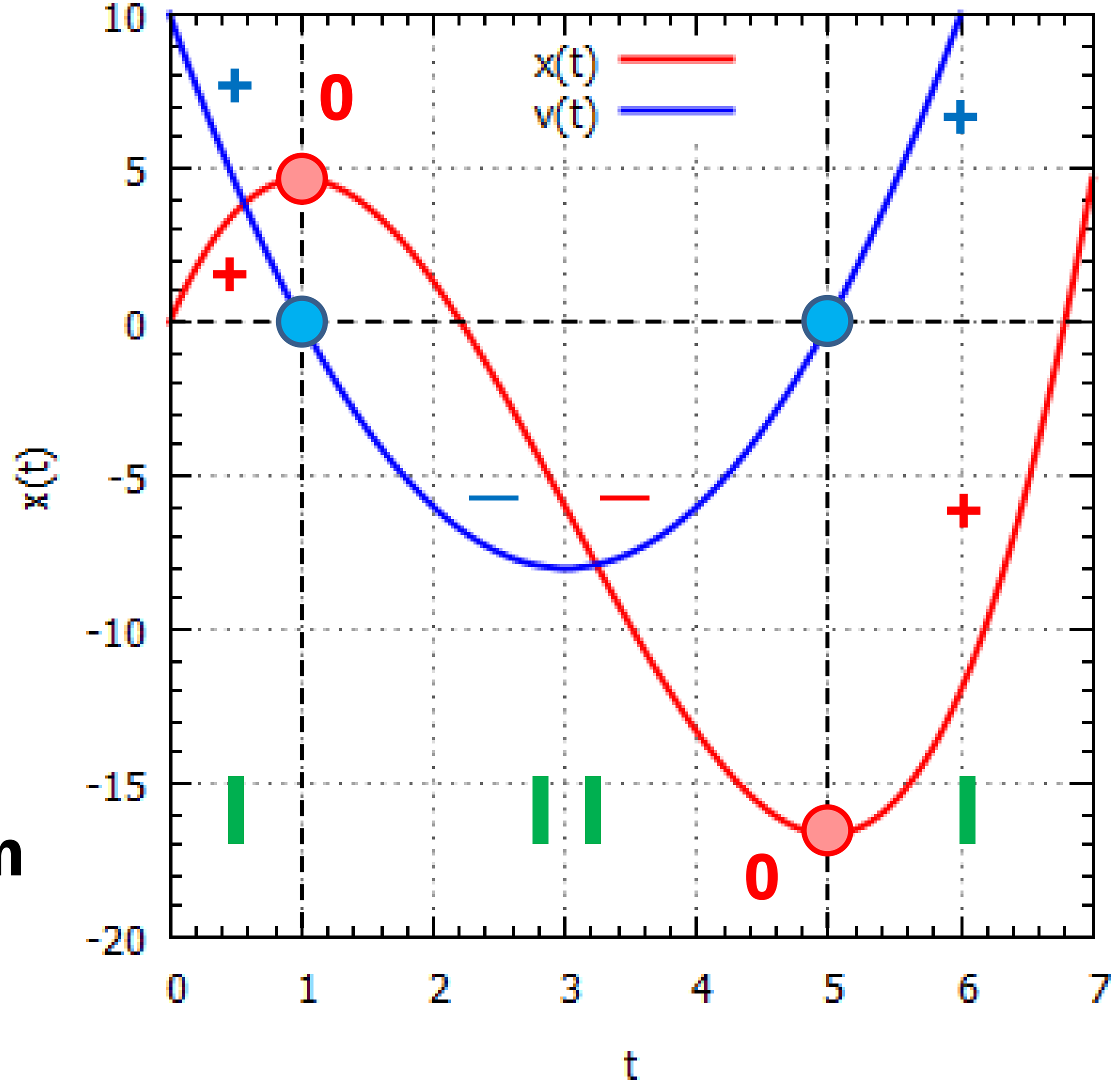
Kiedy funkcja jest rosnąca/malejąca?

- $v > 0 \Rightarrow \Delta x > 0$ **funkcja rosnąca**
- $v < 0 \Rightarrow \Delta x < 0$ **funkcja malejąca**
- $v = 0 \Rightarrow \Delta x = 0$
  tu mogą być minima lub maksima
- $v = \frac{dx(t)}{dt}$
  $=\left(\frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 10t\right)'$
  $= 2t^2 - 12t + 10$



Kiedy funkcja jest rosnąca/malejąca?

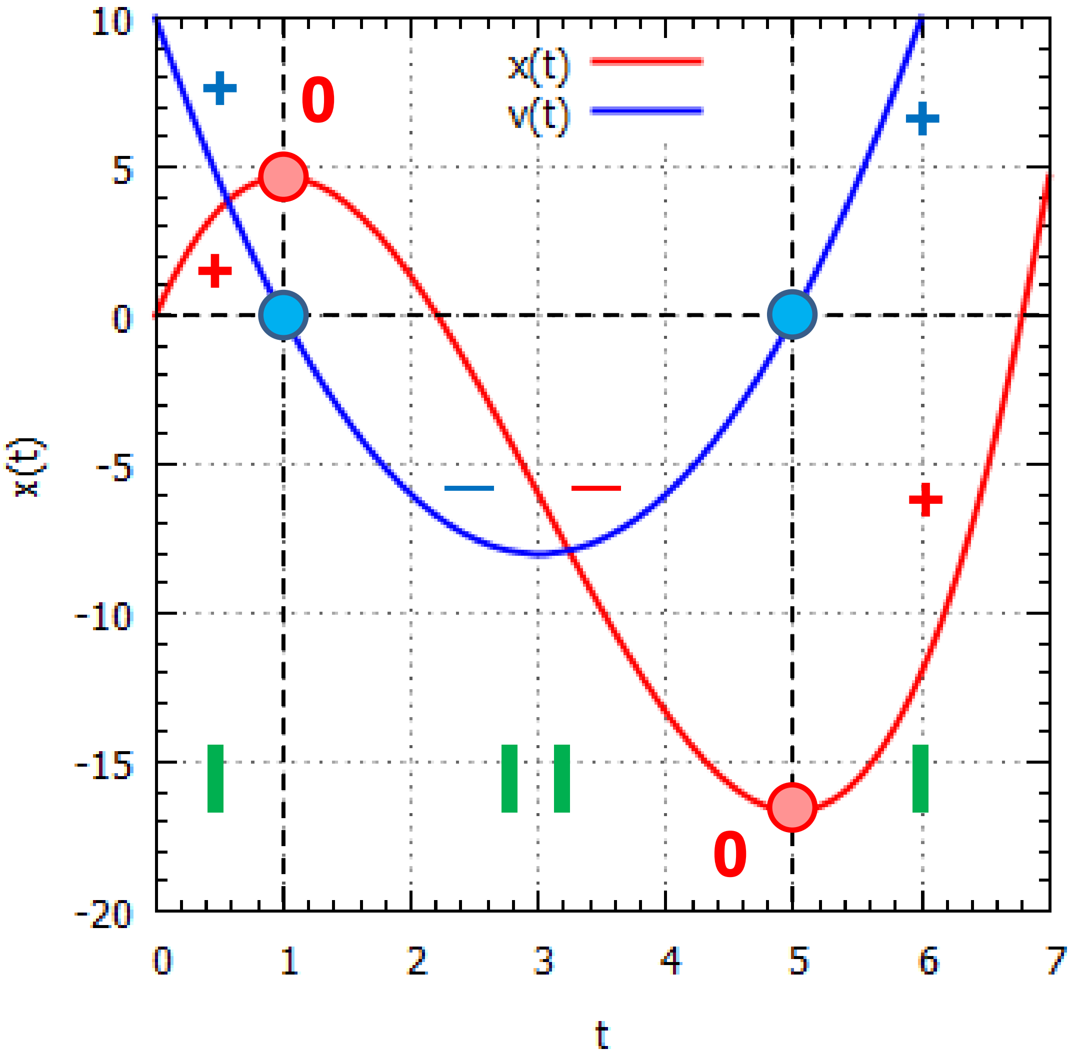
- Obszar **I**: $x(t)$ jest **funkcją rosnącą** i $v(t) \equiv \boldsymbol{x'(t) > 0}$
- Obszar **II**: $x(t)$ jest **funkcją malejącą** i $v(t) \equiv \boldsymbol{x'(t) < 0}$
- Granice obszarów: $x(t)$ osiąga **minimum lub maksimum** i $\mathbf{x'(t) = 0}$



Kiedy funkcja ma minimum lub maksimum?

- $x(t)$ osiąga **minimum lub maksimum** gdy $\boldsymbol{x'(t) = 0}$
- Zamiast badać, gdzie funkcja ma ekstrema, ŁATWIEJ rozwiązać równanie

$$\mathbf{x'(t) = 0}$$



Wracamy do zadania

$t_0 = 0, \qquad x(t_0) = 0$

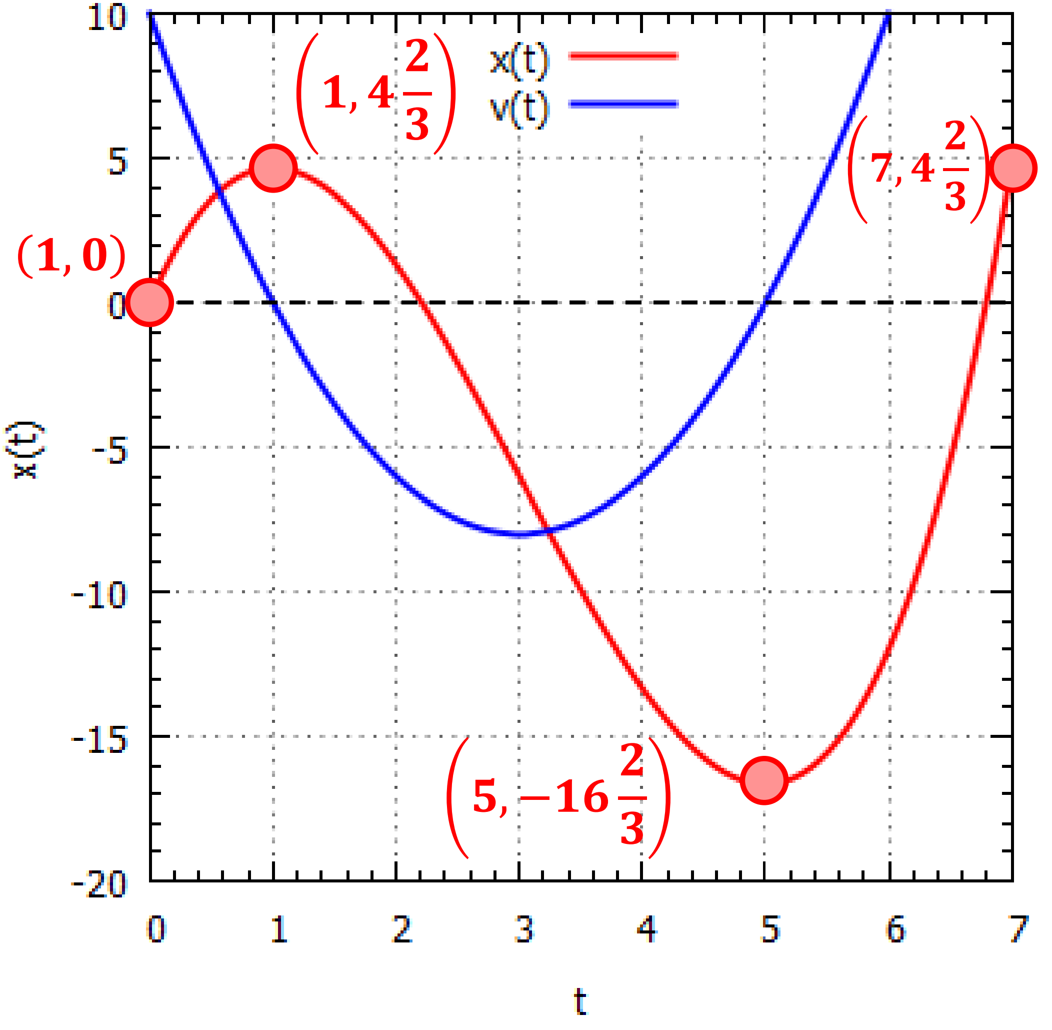
$t_1 = 1, \qquad x(t_1) = 4\frac{2}{3}$

$t_2 = 5, \qquad x(t_2) = -16\frac{2}{3}$

$t_3 = 7, \qquad x(t_3) = 4\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{d} = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$$

$$= 4\frac{2}{3} + 21\frac{1}{3} + 21\frac{1}{3} = \mathbf{47\frac{1}{3}}$$



Przyspieszenie

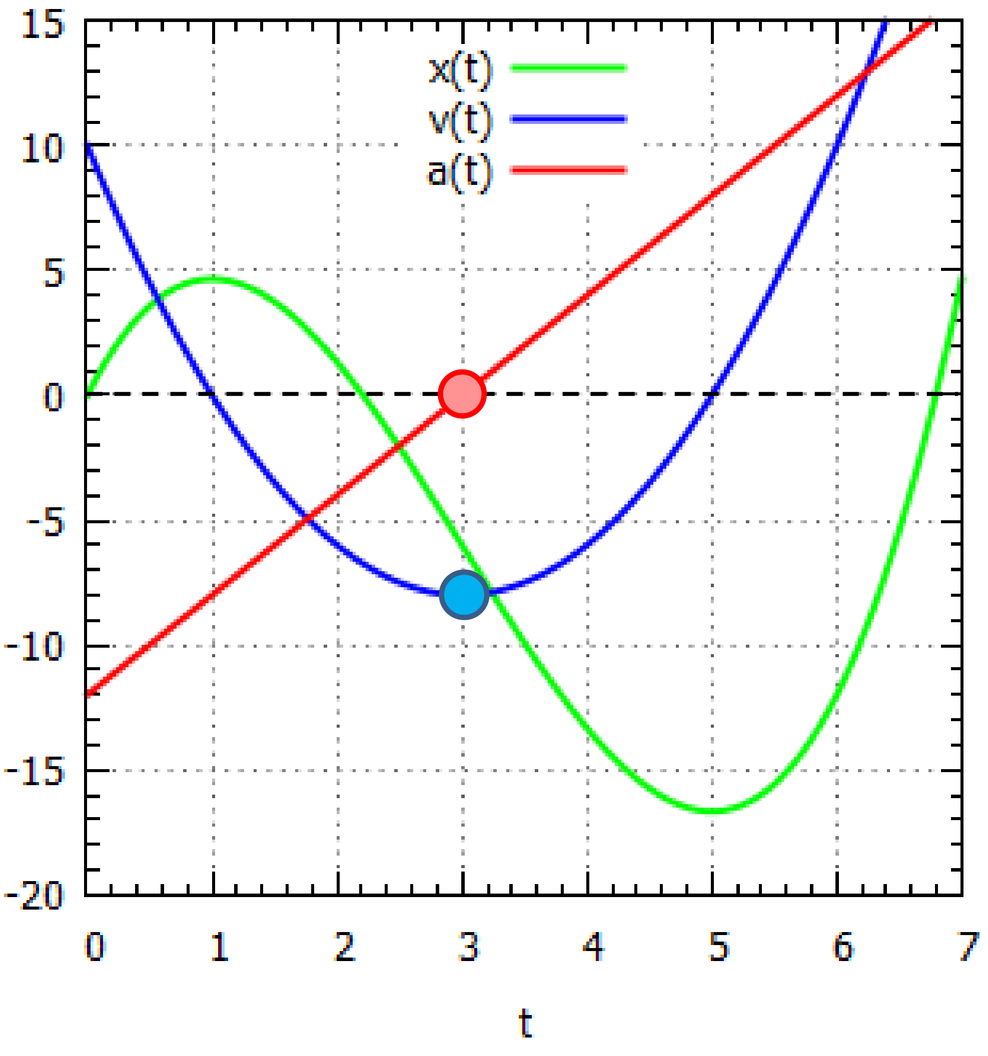
$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$a = \frac{d(2t^2\ - 12t + 10)}{\mathrm{dt}}$$

$$\boldsymbol{a(t) = 4t - 12}$$

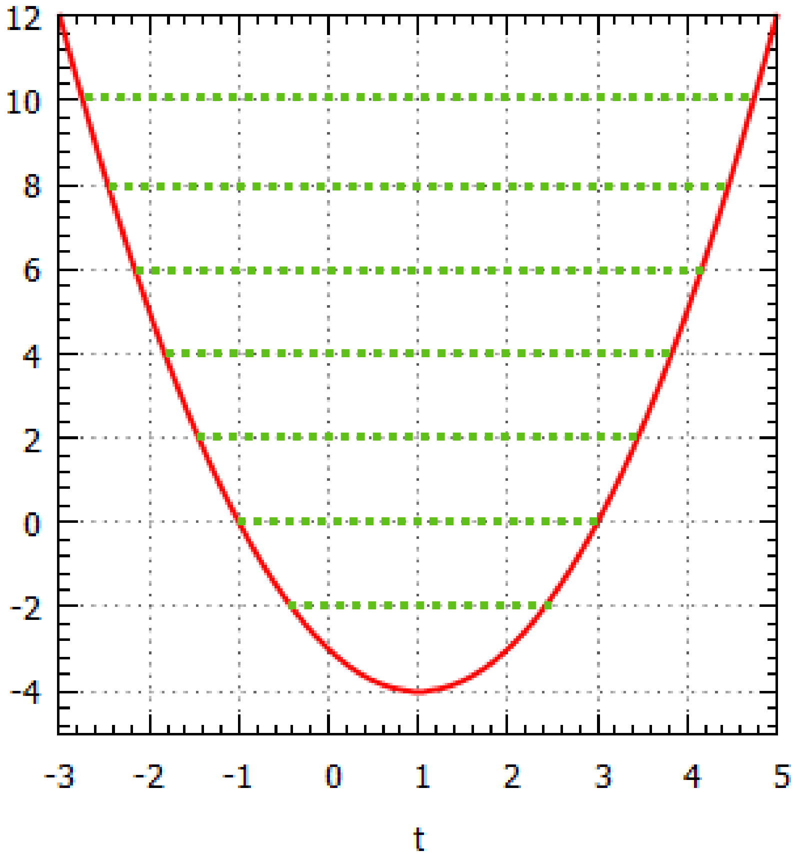
$$a(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t = 3}$$

- $v(t)$ ma minimum dla $t = 3$

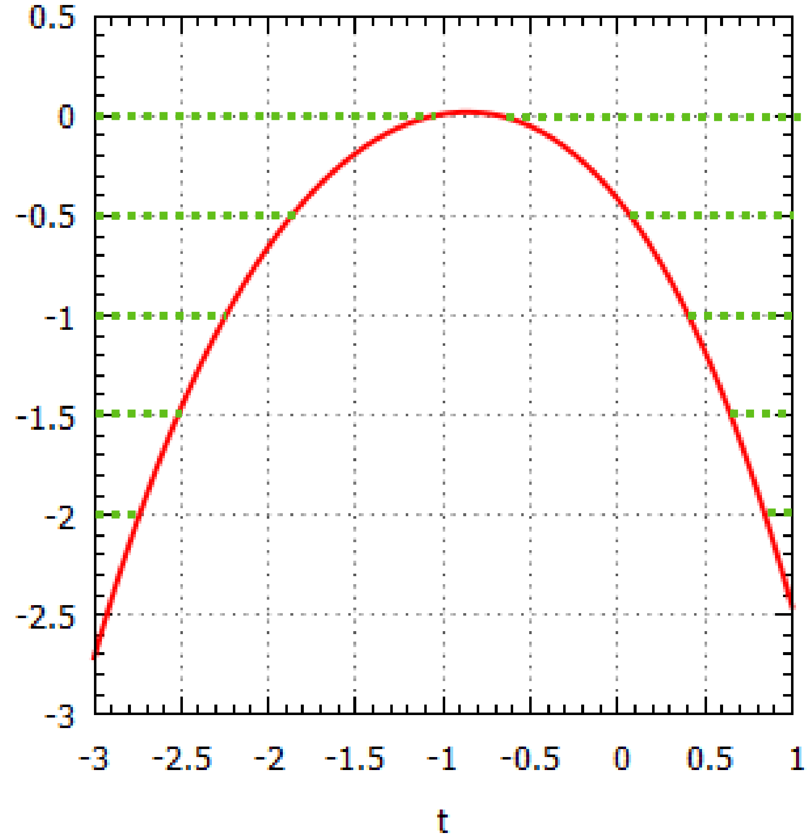


Funkcje wypukłe i wklęsłe

Funkcja wypukła, $f'' \equiv a > 0$



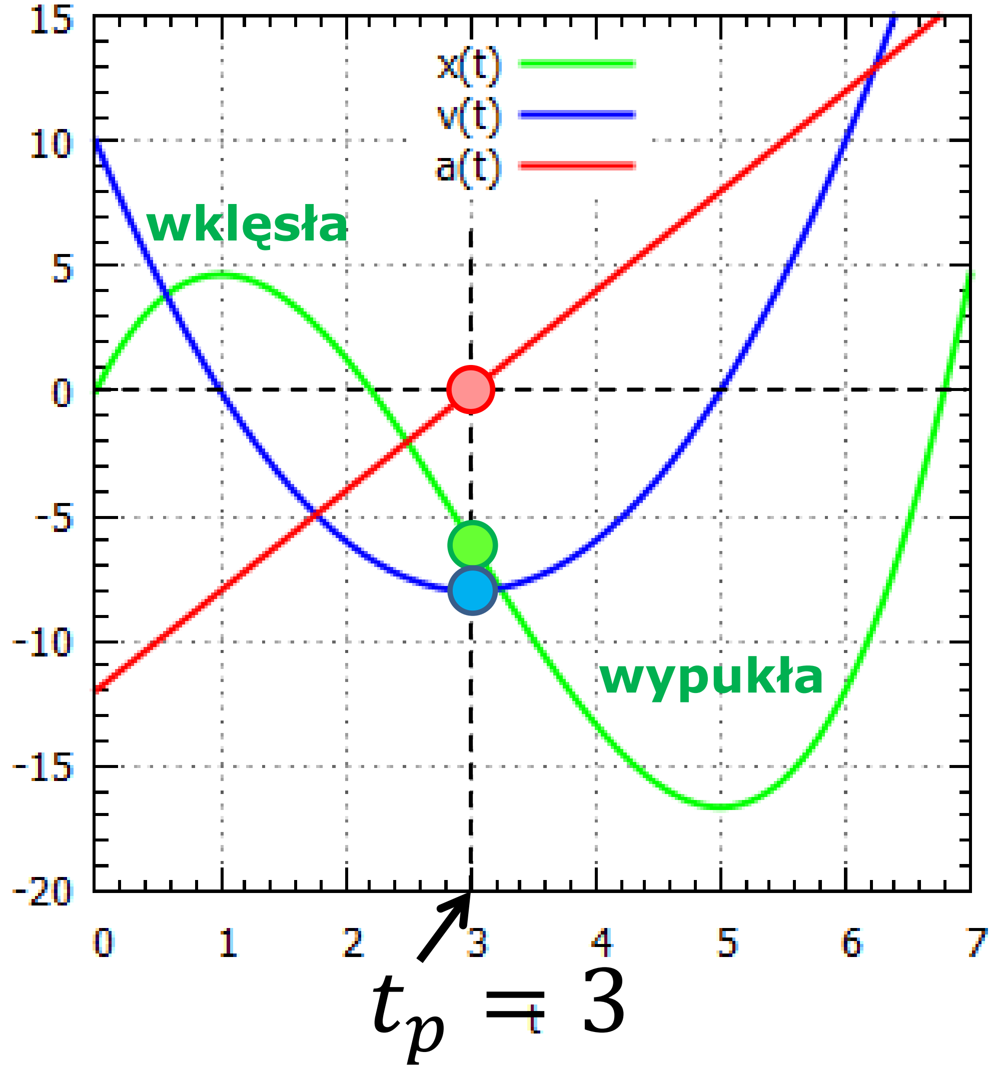
Funkcja wklęsła, $f'' \equiv a < 0$



Punkt przegięcia

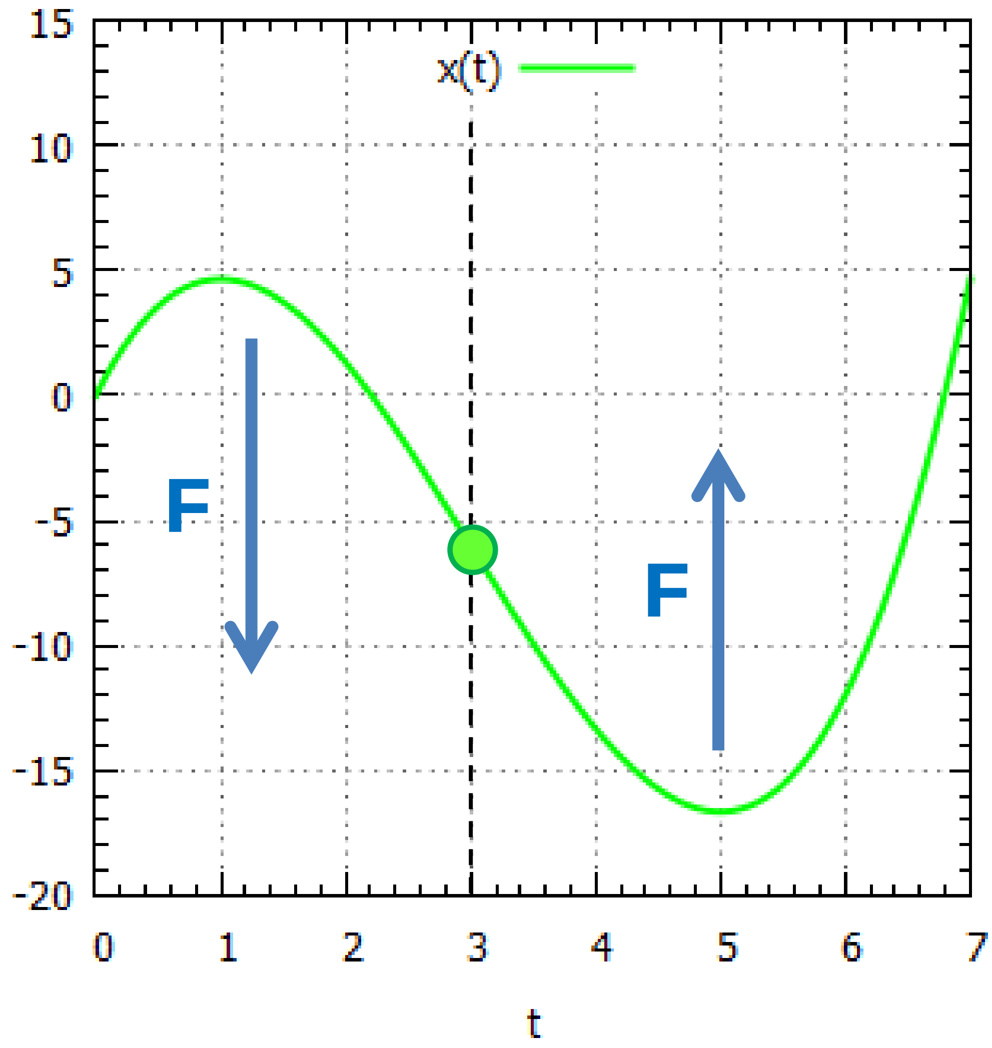
$$a(t_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{t_p} = \mathbf{3}$$

- t_p jest punktem przegięcia funkcji $x(t)$
- Dla $0 \leq t \leq t_p$ funkcja jest ***wklęsła***
- Dla $0 \leq t \leq t_p$ funkcja jest ***wypukła***
- W punkcie t_p prędkość ma wartość minimalną



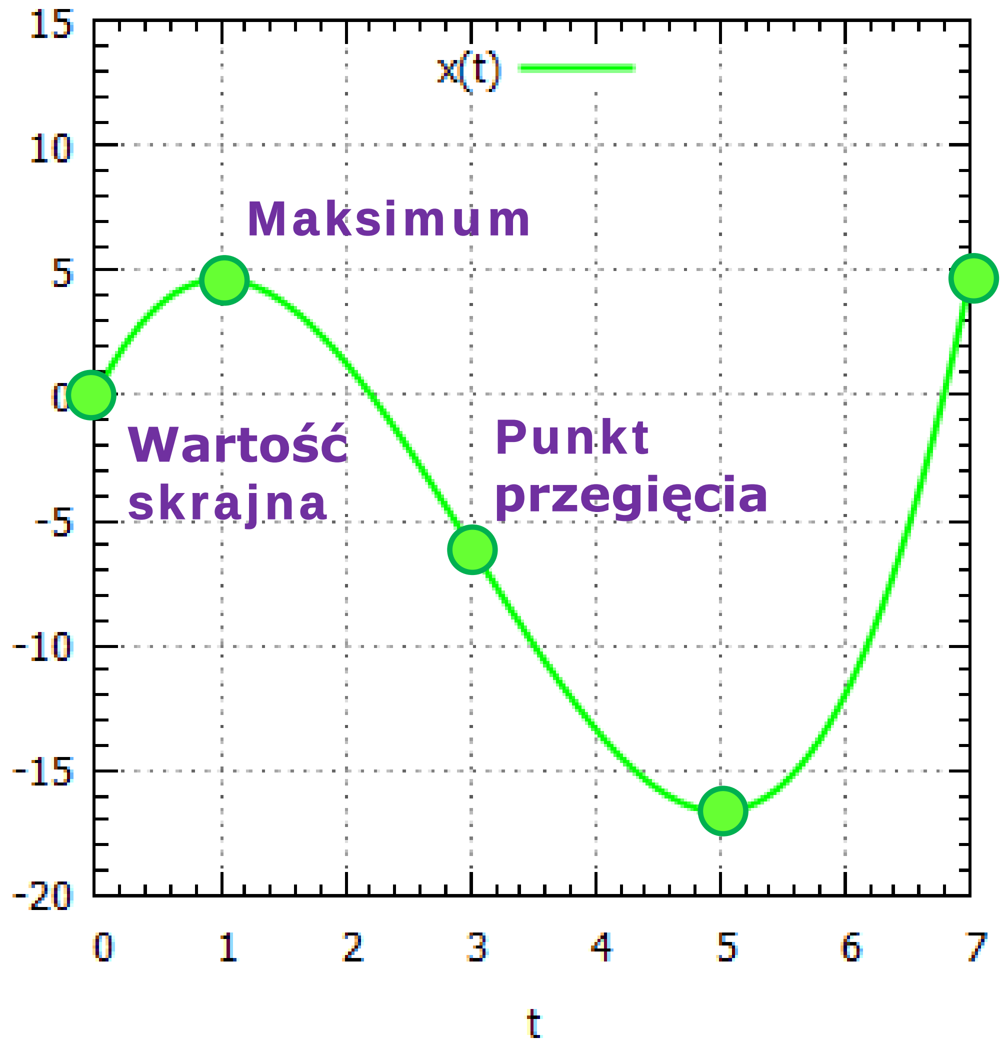
Przyspieszenie a „siła”

- $a = \dfrac{F}{m}$ (fizyka)
- $t_p = 3$ jest **punktem przegięcia** funkcji $x(t)$, $a = 0$, więc nie ma siły $(F = 0)$
- Dla $0 \leq t \leq t_p$ funkcja jest wklęsła, „siła” działa „w dół” (i maleje)
- Dla $0 \leq t \leq t_p$ funkcja jest wypukła, „siła” działa „do góry” (i rośnie)



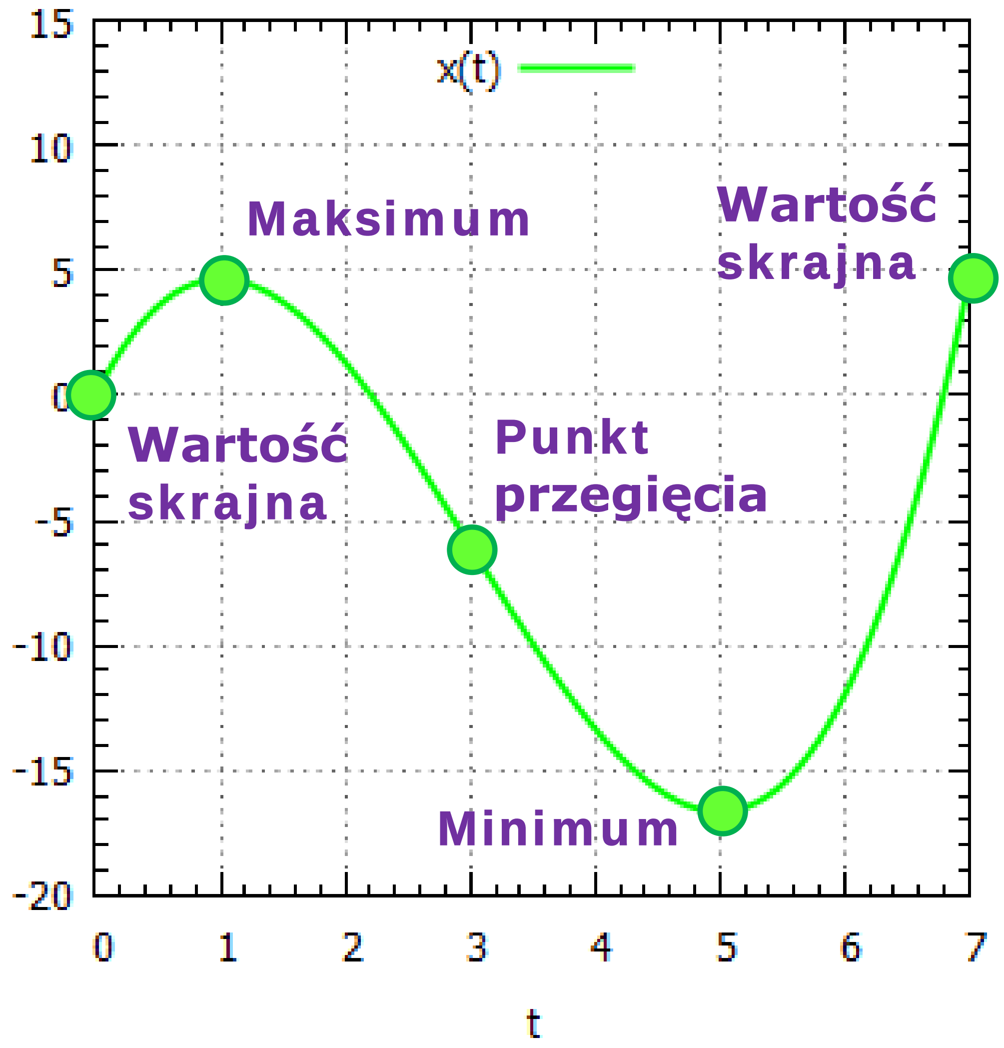
Interpretacja wykresu

- W $t = 0$ obiekt znajduje się w punkcie $x(0) = 0$ i ma *prędkość początkową* $x'(0) = 10$
- Dla $0 \leq t \leq 1$ obiekt jest hamowany i zmniejsza swoją prędkość do zera
- W $\mathrm{t} = 1$ obiekt się zatrzymuje, po czym przyspiesza w kierunku wartości ujemnych
- W $\mathrm{t} = 3$ siła zmienia znak i zaczyna hamować obiekt



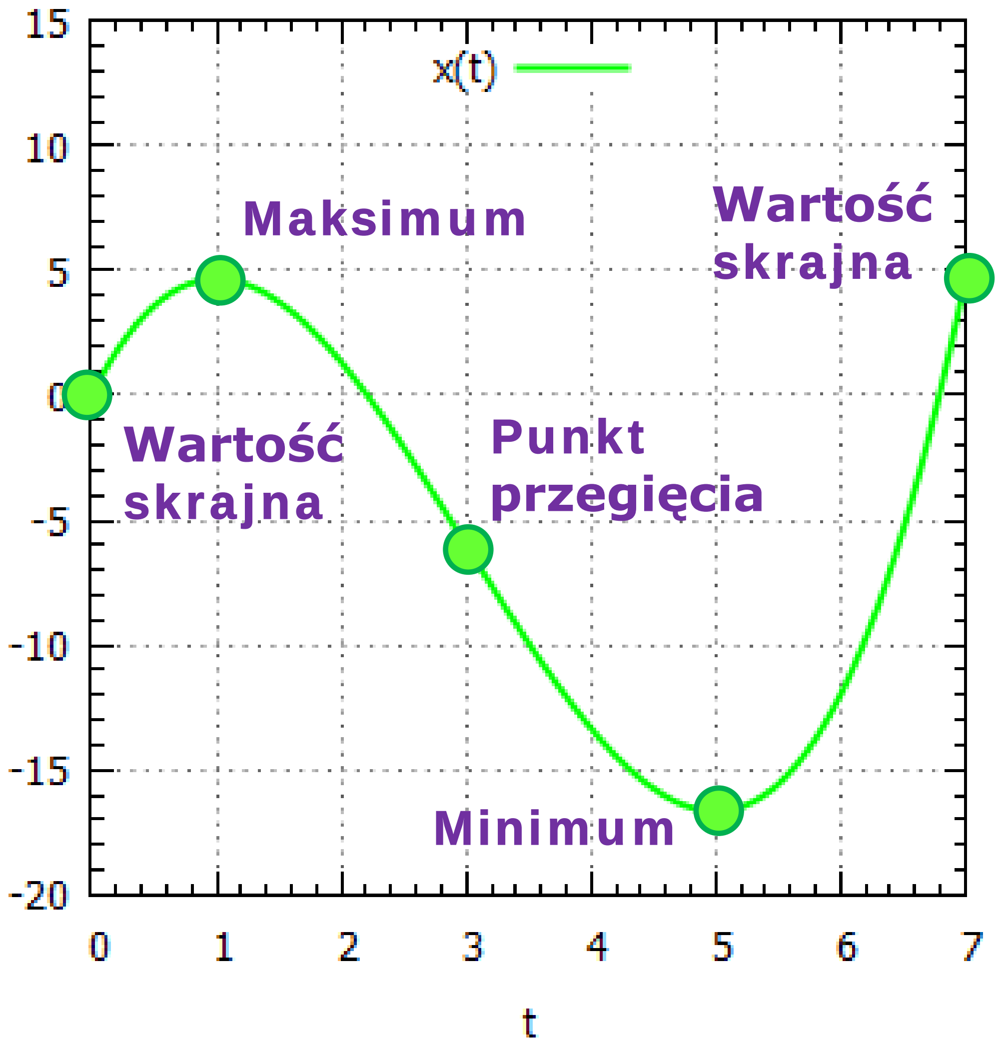
Interpretacja wykresu

- W $t = 5$ prędkość obiekt u jest równa zeru, a jego położenie ma wartość krańcową (minimum)
- Dla $t > 5$ obiekt wciąż jest przyspieszany „do góry”



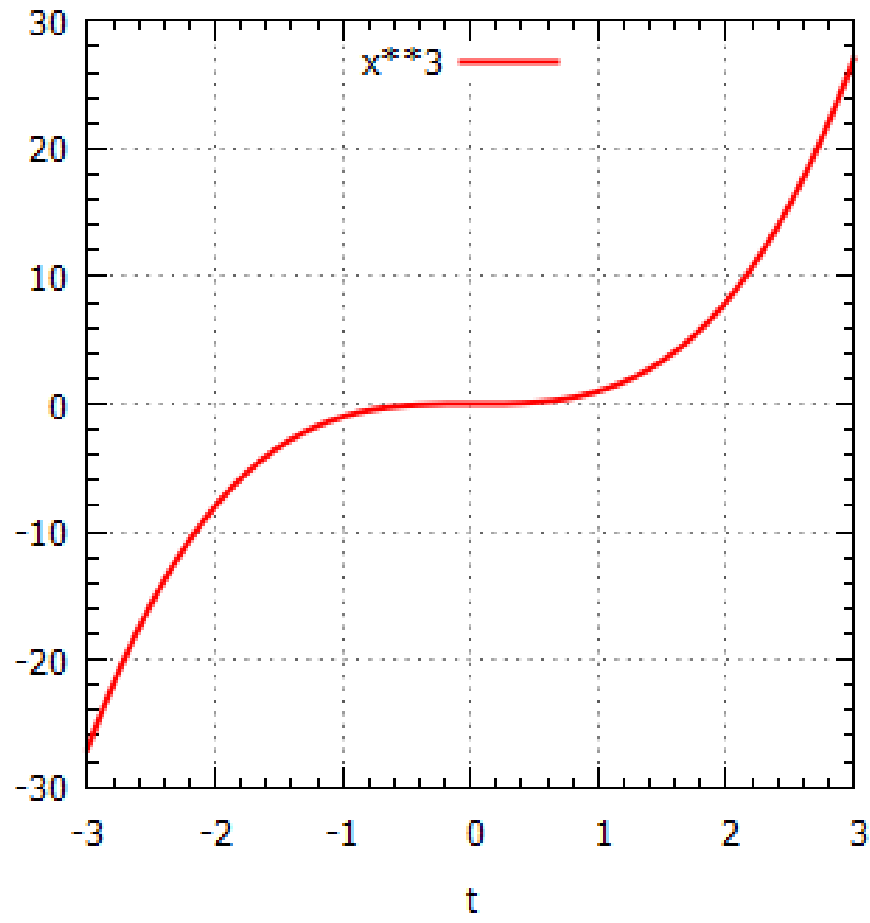
Pochodne są użyteczne

- Położenie **minimum**, **maksimum** i **punktów przegięcia** funkcji <u>**najwygodniej**</u> ustala się za pomocą szukania **miejsc zerowych** pierwszej i drugiej **pochodnej**



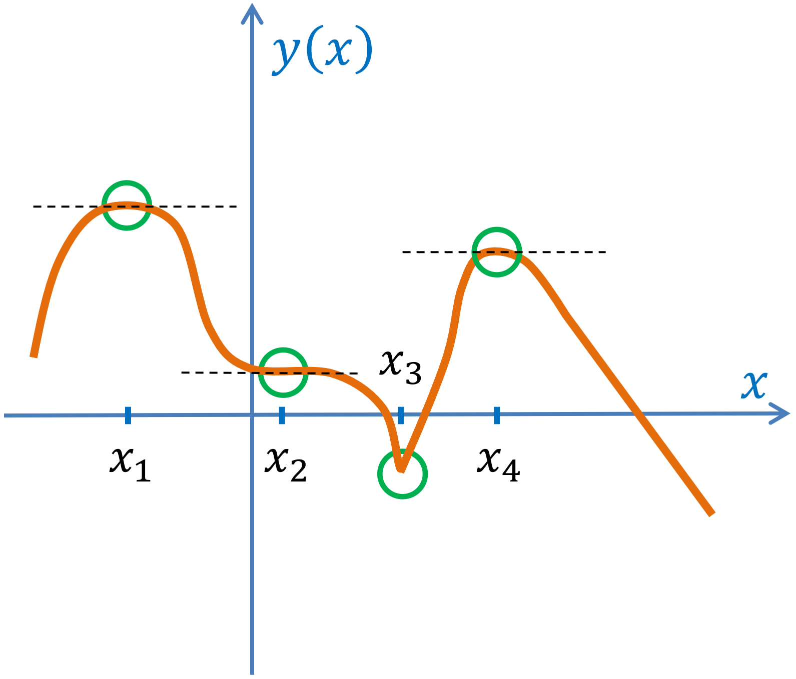
$x'(t) = 0$ nie zawsze lokalizuje minimum lub maksimum

- Funkcja $x(t) = t^3$ ma pochodną $x'(t) = 3t^2$, która znika w $t = 0$, ale wcale nie ma w tym punkcie minimum czy maksimum!



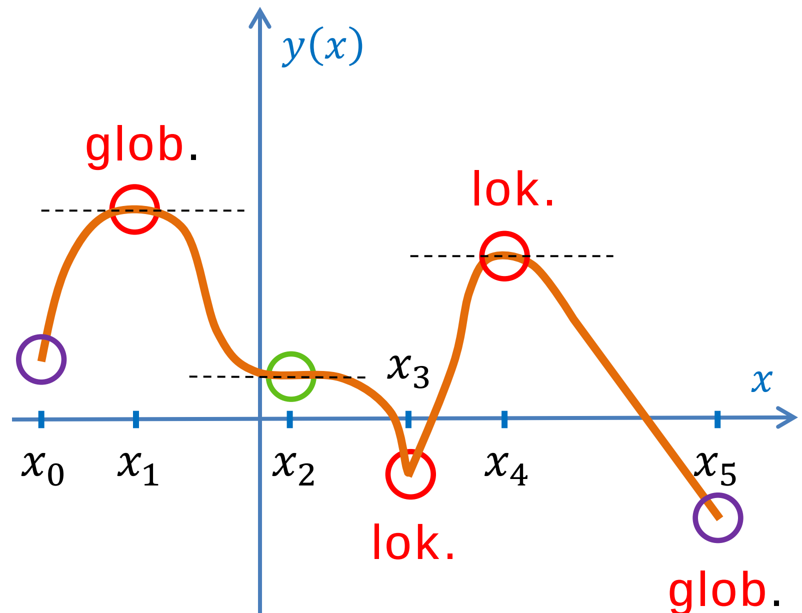
Punkty krytyczne

- ***Punkty krytyczne*** funkcji $y(x)$ to punkty, w których $y'(x) = 0$ lub pochodna nie istnieje



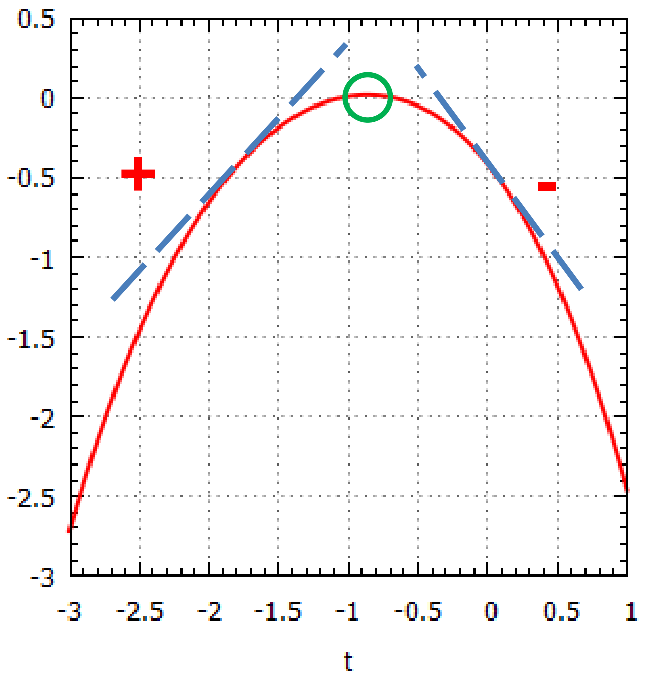
Ekstrema lokalne i globalne

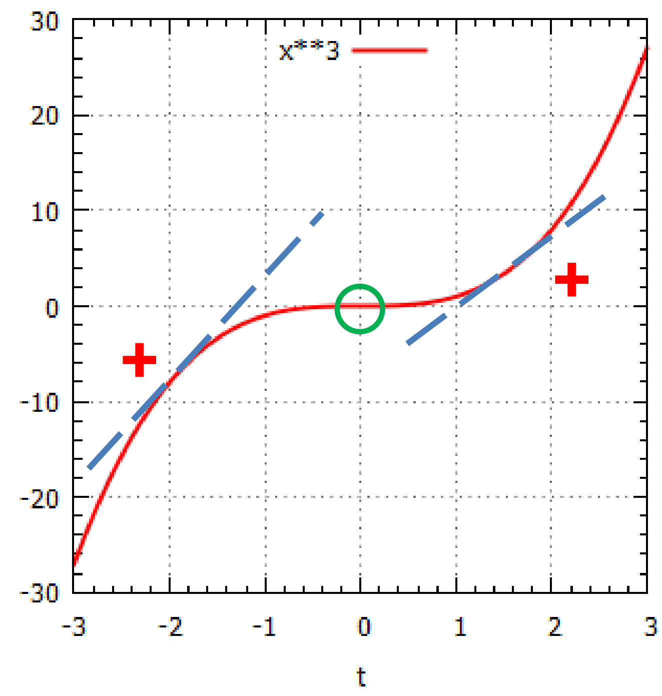
- ***Ekstrema lokalne*** funkcji ciągłej na przedziale *mogą się znajdować* tylko w jej punktach krytycznych lub na końcach przedziału
- ***Ekstrema globalne*** wyznaczamy względem całej dziedziny



Jak odróżnić ekstremum od punktu przegięcia?

- Zrób wykres!
- Lub sprawdź, czy $x'(t)$ *zmienia znak*





Badanie funkcji

Funkcja x(t)

- Dziedzina
- Przeciwdziedzina
- Punkty nieciągłości
- Ekstrema funkcji
- Przedziały monotoniczności
- Punkty, w których pochodna nie istnieje
- Punkty przegięcia

Położenie samochodu

- Kiedy  może jeździć?
- Gdzie  może jeździć?
- Czy  może się teleportować?
- Kiedy  zmienia kierunek jazdy?
- Kiedy  utrzymuje kierunek jazdy?
- Czy  odbija się od ściany jak  ?
- Kiedy  hamowanie ↔ gaz?

Jest łatwe i intuicyjne

RÓŻNICZKI

„Bardzo mała różnica"

- Załóżmy, że x jest funkcją t. Na ile mała zmiana t wpływa na małą zmianę x?
- $\Delta x(t) \approx x'(t) \cdot \Delta t$

  W granicy $\Delta t \to 0$ piszemy:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \approx \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

- Literka **d** oznacza tu bardzo małą, (***infinitezymalną***) zmianę danej zmiennej
- Tę zmianę nazywamy **różniczką**

Rachunek różniczkowy

- Obliczanie różniczek jest proste, jeśli potrafimy liczyć pochodne
- $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$, bo $(x^2)' = 2x$
- $\mathrm{d}(\cos(x)) = \sin(x)\,\mathrm{d}x$, bo $(\cos(x))' = \sin(x)$
- $\mathrm{d}(x(t)) = v\,\mathrm{d}t$, bo $\left(\frac{dx}{dt}\right)' = v$
- $d\Big(f\big(x(t)\big)\Big) = f'(x) \cdot v\,\mathrm{d}t$, bo

$$\Big(f\big(x(t)\big)\Big)' = f'(x) \cdot x'(t) = f'(x) \cdot v$$

Rachunek różniczkowy

- Obliczanie różniczek jest proste, jeśli potrafimy liczyć pochodne

- $\mathrm{d}(2x) = 2\,\mathrm{d}x,$ bo $(2x)' = 2$
- $\mathrm{d}(x + y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y,$ bo $(x + y)' = x' + y'$
- $\mathrm{d}(x \cdot \mathrm{y}) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$ bo $(xy)' = x'y + xy'$
- $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = x'\mathrm{d}t$

Po co?

- Różniczki pozwalają przechodzić z jednej zmiennej do drugiej
- I pojawiają się w całkach…

ZASTOSOWANIA POZA MATEMATYKĄ

Pochodna = prędkość zmian

ELEKTRYCZNOŚĆ

natężenie prądu $I = \frac{dQ}{dt}$ ładunek / czas

moc $P = \frac{dW}{dt}$ praca / czas

TERMODYNAMIKA

ciepło właściwe $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$ ciepło / temperatura

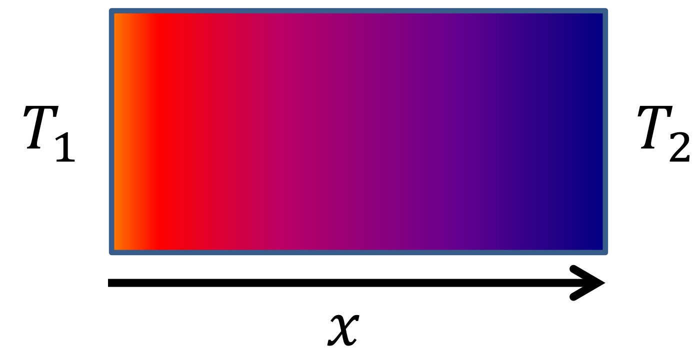
współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha_L = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT}$ długość / temperatura

Gradient (∇)

- Gradient to prędkość zmiany jakiejś wielkości względem *odległości*

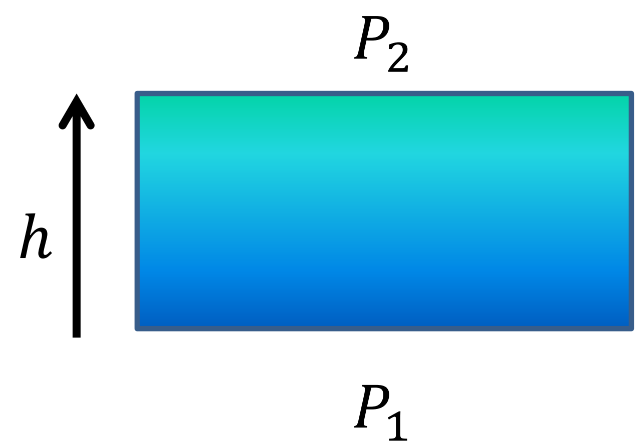
- gradient temperatury:

$$\nabla T = \frac{dT}{dx}$$



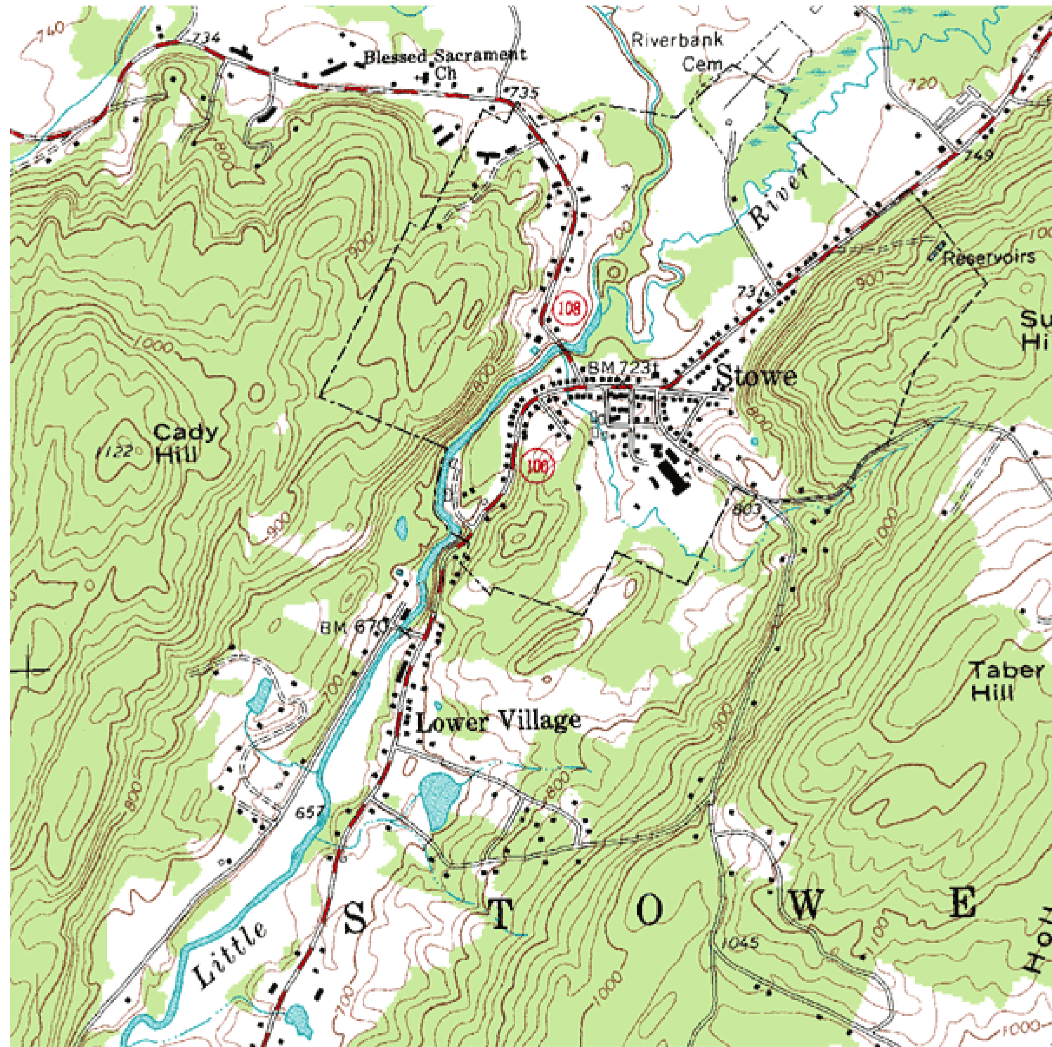
- gradient ciśnienia:

$$\nabla P = \frac{dP}{dh}$$



Gradienty dobrze widać w terenie

- Ale o tym później…



POCHODNE A OBLICZANIE GRANIC

Granice niewłaściwe $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Reguła de l'Hospitala

- Jeżeli dla pewnego $c \in R$ lub $c = \pm\infty$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \mathbf{0} \text{ lub } \pm\infty$$

oraz istnieje (właściwa) granica

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

to

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykłady

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

  bo $\lim\limits_{x \to 0} \frac{[\sin(x)]'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

  bo $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{[\ln(x)]'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$

Reguła de l'Hospitala

- Jest prosta w użyciu, a pochodzi jeszcze z końca XVII wieku
- Bardzo ułatwia znajdowanie granic, gdy nie mamy pod ręką narzędzi informatycznych
- Jednak skoro je mamy, wystarczy świadomość jej istnienia

SZEREGI TAYLORA

Szereg Taylora

- Szereg Taylora funkcji $f(x)$ w punkcie a, w którym ta funkcja jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy, definiuje się wzorem

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots$$

czyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Zbieżność

- Nie ma gwarancji, że szereg Taylora funcji f względem a jest zbieżny do f dla każdego x
- Bywa, że jest zbieżny tylko w pewnym otoczeniu punktu a
- O funkcji f, dla której jej szereg Taylora w punkcie a jest zbieżny do $f(x)$ w pewnym otoczeniu tego punktu, mówi się, że jest ***funkcją analityczną*** w a.

Aproksymacja

- Szereg Taylora często się ucina na kilku pierwszych wyrazach, tworząc tzw. wielomian Taylora
- Jest to zwykle doskonały sposób aproksymacji funkcji w pobliżu wybranego punktu
- Wielomian Taylora stopnia 1 daje znany nam wzór

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Pochodna numeryczna

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\approx \frac{f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-f(x)}{h} \approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$\approx \frac{f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\left[f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2\right]}{2h}$$

Pochodna numeryczna

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\approx \frac{f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-f(x)}{h} \approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$\approx \frac{\cancel{f(x)}+f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}-\left[\cancel{f(x)}-f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}\right]}{2h}$$

Pochodna numeryczna

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \approx \frac{f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-f(x)}{h} \approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h)}$$

dokładniejszy wzór

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \approx \frac{\cancel{f(x)}+f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}-\left[\cancel{f(x)}-f'(x)h+\cancel{\frac{1}{2}f''(x)h^2}\right]}{2h} \approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h^2)}$$

Dygresja: notacja $O(h)$ dla $h \to 0$

Zapis

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx \boldsymbol{f'(x)} + \boldsymbol{O(h^2)}$$

Oznacza, że błąd przybliżenia jest rzędu h^2 (np. $10h^2$ lub mniejszy (np. $5h^3$) w granicy bardzo małych h ($h \to 0$)

(w praktyce ten zapis podaje dokładny rząd wielkości)

Przykłady notacji $O(h)$ dla $h \to 0$

- $O(1)$: $1, \pi, 100$ (ale też $h, h^2, \ldots$)
- $O(h)$: $h, 20h, h + h^2$ (ale też $h^2, h^3, \ldots$)
- $O(h^2)$: $h^2, 5h^2, 0.01h^2 + h^3$ (ale też h^3)

- $O(h^n)$ oznacza „wielkość o wartości bezwzględnej mniejszej niż $c \cdot h^n$ dla pewnego $c > 0$ i dostatecznie małego h"
- Notacja O służy do identyfikacji czynnika wiodącego wyrażenia w odpowiedniej granicy