Uniwersytet Wrocławski

PDE

czyli równania różniczkowe cząstkowe [*Partial Differential Equation(s)*] – wstęp do wstępu

Zbigniew Koza

Wydział Fizyki i Astronomii

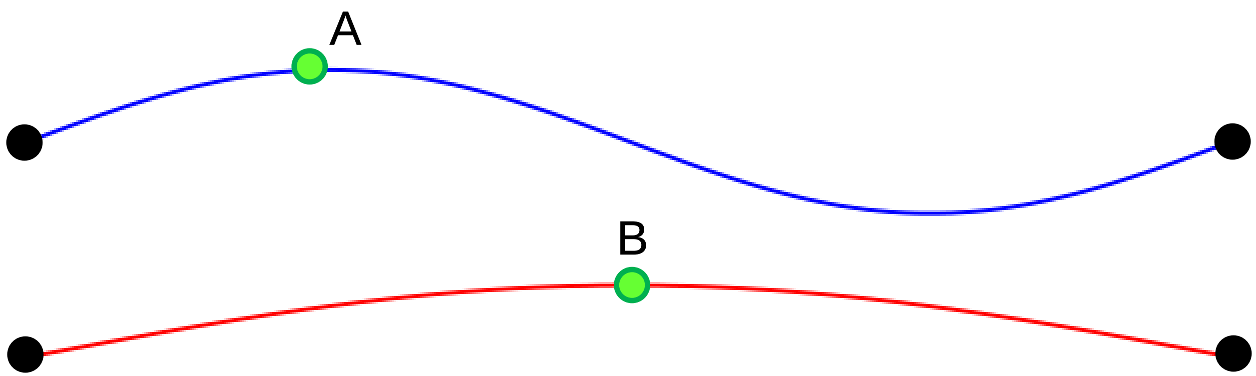
Wrocław, 2016

WSTĘP

Motywacja

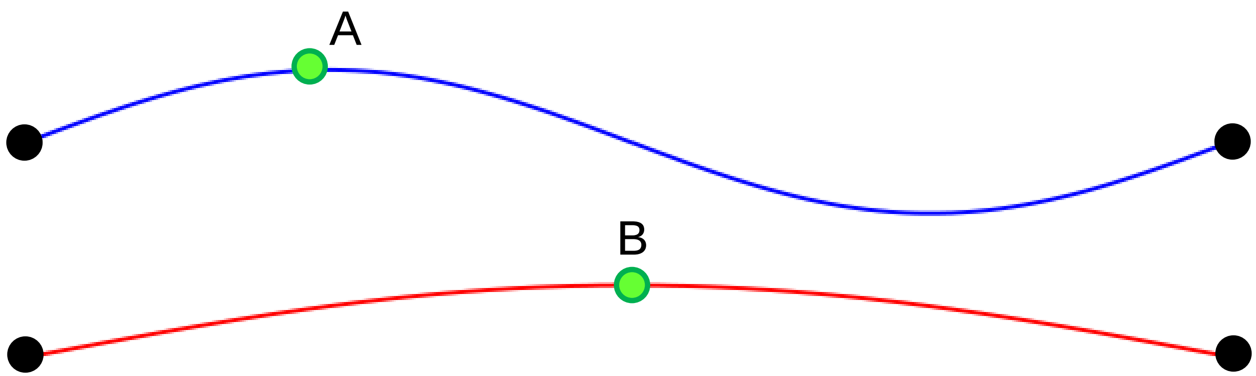
- Dotychczas zajmowaliśmy się równaniami różniczkowymi, w których istniała tylko ***jedna zmienna niezależna*** (zwyczajowo nazywana t lub x): ***równania różniczkowe zwyczajne***
- Czy istnieją zagadnienia naukowo-inżynierskie, w których przydatne byłoby wprowadzenie kilku zmiennych niezależnych?

Drgania struny



- Przy jednakowym naprężeniu struny siły działające na nią w punkach A i B zależą od jej kształtu („promienia krzywizny”) w otoczeniu tych punktów
- Dlatego równanie ruchu struny zależy nie tylko od pochodnych po czasie (t), ale i przestrzeni (x)

Drgania struny



- Skoro jednak równanie ruchu struny powinno zależeć zarówno od pochodnych po czasie, jak i przestrzennych, to nie może być równaniem różniczkowym zwyczajnym

Przepływ ciepła

- Jeśli w otoczeniu pewnego punktu temperatura jest wszędzie taka sama jak w tym punkcie, to przez ten punkt nie przepływa ciepło
- To oznacza, że równanie transportu ciepła powinno zależeć nie tylko od pochodnych po czasie, ale i przestrzennych (trzech!), bo tylko tak można uwzględnić wpływ otoczenia danego punktu na to, co się w nim dzieje
- Równanie to nie może więc być równaniem różniczkowym zwyczajnym

Ruch płynu

- Równanie transportu płynu lepkiego musi uwzględniać to, że na każdy element tego płynu działają co najmniej dwie siły:
  - siła wynikająca z różnicy ciśnień w sąsiedztwie tego elementu
  - siła wynikająca z różnicy prędkości cząstek płynu w sąsiedztwie tego elementu (lepkość!)
- Równań musi być co najmniej 3 (na trzy składowe prędkości) i muszą zawierać pochodne prędkości po czasie i przestrzeni

Potrzeba nowego typu równań

- Wniosek: wielu ważnych zjawisk nie można opisać ani równaniami algebraicznymi, ani równaniami różniczkowymi zwyczajnymi
- Istnieje więc potrzeba wprowadzenia nowej klasy równań, w których liczba zmiennych niezależnych, względem których wyznacza się pochodne, będzie większa niż 1
- Te równania to

równania różniczkowe cząstkowe

POCHODNE CZĄSTKOWE

Pochodna funkcji wielu zmiennych

- Dla funkcji jednej zmiennej, $f(x)$, pochodną zdefiniowaliśmy jako granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Problem:
  Jak zdefiniować pochodną funkcji, która zależy od kilku zmiennych niezależnych?

Pochodna funkcji wielu zmiennych

- Problem:
  Jak zdefiniować pochodną funkcji, która zależy od kilku zmiennych niezależnych?
- Odpowiedź:
  zdefiniować tyle pochodnych, ile dana funkcja ma argumentów

Pochodna funkcji wielu zmiennych

- Problem:
  Jak zdefiniować pochodną funkcji, która zależy od kilku zmiennych niezależnych?
- Odpowiedź:
  zdefiniować tyle pochodnych, ile dana funkcja ma argumentów
- Ale jak to zrobić?

Pochodna cząstkowa

- Niech $f(x,y)$ będzie funkcją dwóch zmiennych
- Definiujemy **pochodne cząstkowe**:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h},y)-f(\boldsymbol{x},y)}{h}$$

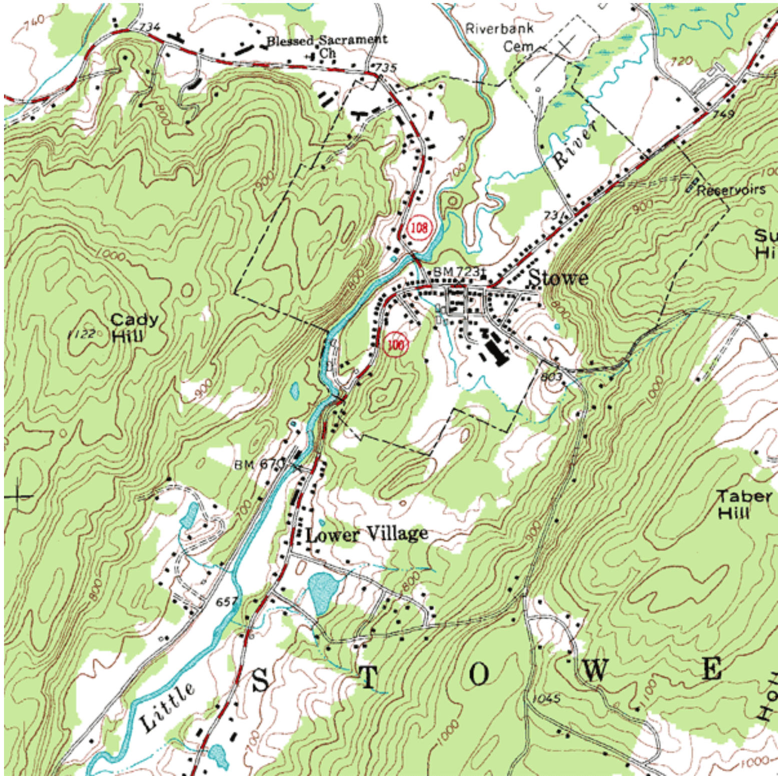
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{y}} = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{f(x,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{h})-f(x,\boldsymbol{y})}{h}$$

Pochodna cząstkowa

- Innymi słowy:
- **Pochodna cząstkowa** $\frac{\partial f}{\partial x}$
  to pochodna z $f(x, y)$ względem zmiennej x, *przy załozeniu, że druga zmienna,* y*, ma wartość stałą*
- Podobnie rozumiemy $\frac{\partial f}{\partial y}$

Interpretacja fizyczna

- Niech $f(x, y)$ oznacza wysokość nad poziomem morza, x – kierunek E, y – kierunek N
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ to szybkość wznoszenia się (opadania) terenu w kierunku W-E
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ to szybkość wznoszenia się (opadania) terenu w kierunku S-N



Symbol pochodnej cząstkowej

- Symbol

$$\partial$$

  to stylizowana litera ***d***; czyta się go „de”

- Używa się go, by odróżnić pochodną cząstkową od zwyczajnej

- Inne znaczenie: **brzeg**, zwłaszcza objętości (np. jeśli V jest kulą, to ∂V oznacza sferę)

Przykłady

- $f(x,y) = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$
- $f(x,y) = x + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$
- $u(x,t) = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 6t, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- $g(a,b) = a \ln b \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial a} = \ln b, \quad \frac{\partial g}{\partial b} = \frac{a}{b}$

3D i więcej…

- Funkcje 3 i więcej zmiennych traktujemy podobnie
- Przykład:

$$f(x, y, z) = \frac{2x}{y} + xz^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{y} + z^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz$$

Notacja

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f, \qquad \partial_x f, \qquad f'_x, \qquad f_x$$

Ponadto zapis:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{V}}\right)_{\boldsymbol{P}}$$

oznacza, że G jest funkcją $\boldsymbol{V}$ i $\boldsymbol{P}$: $G(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{P})$

PRZYBLIŻANIE FUNKCJI 2 ZMIENNYCH PŁASZCZYZNĄ

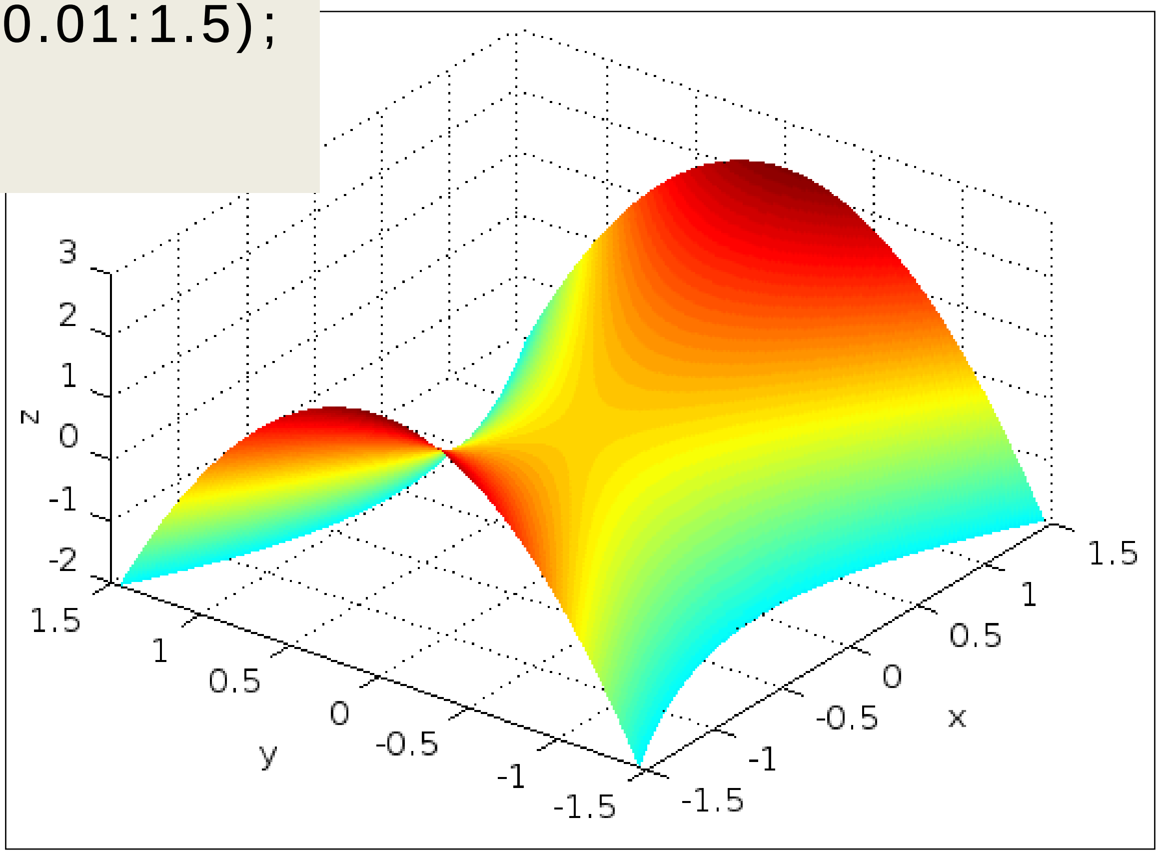
Każda „gładka” powierzchnia jest lokalnie płaska

- Powyższe twierdzenie powinno być oczywiste dla każdego mieszkańca kuli (ziemskiej)

Przykład: paraboloida hiperboliczna

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2$$

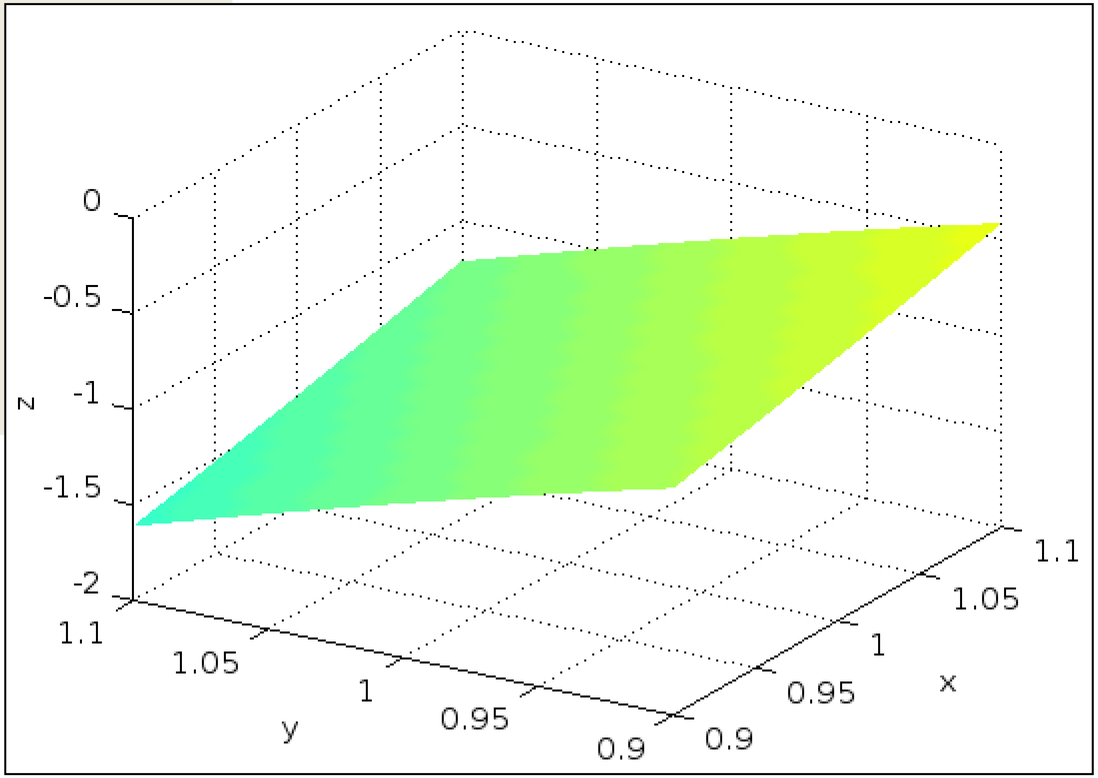
```
[x,y] = meshgrid(-1.5:0.01:1.5);
z = x.^2 - 2*y.^2;
surf(x, y, z);
```



Przykład: paraboloida hiperboliczna

jest **lokalnie płaska**...

```
[x,y] = meshgrid(-1.5:0.01:1.5);
z = x.^2 - 2*y.^2;
surf(x, y, z);
# powiększenie
# otoczeniu (x=1, y=1)
xlim([0.9, 1.1]);
ylim([0.9, 1.1]);
zlim([-2,0]);
```



JAK OPISAĆ PŁASZCZYZNĘ W PRZESTRZENI?

Równanie prostej na płaszczyźnie

- Zacznijmy od **prostej** na płaszczyźnie przechodzącej przez punkt **(0, 0)**
- Równanie „szkolne” (funkcyjne):

$$y = mx$$

- Nieco bardziej ogólne równanie prostej:

$$\boldsymbol{Ax + By = 0}$$

- Powyższe równanie opisuje wszystkie proste, także tę, która jest prostopadła do osi „x”

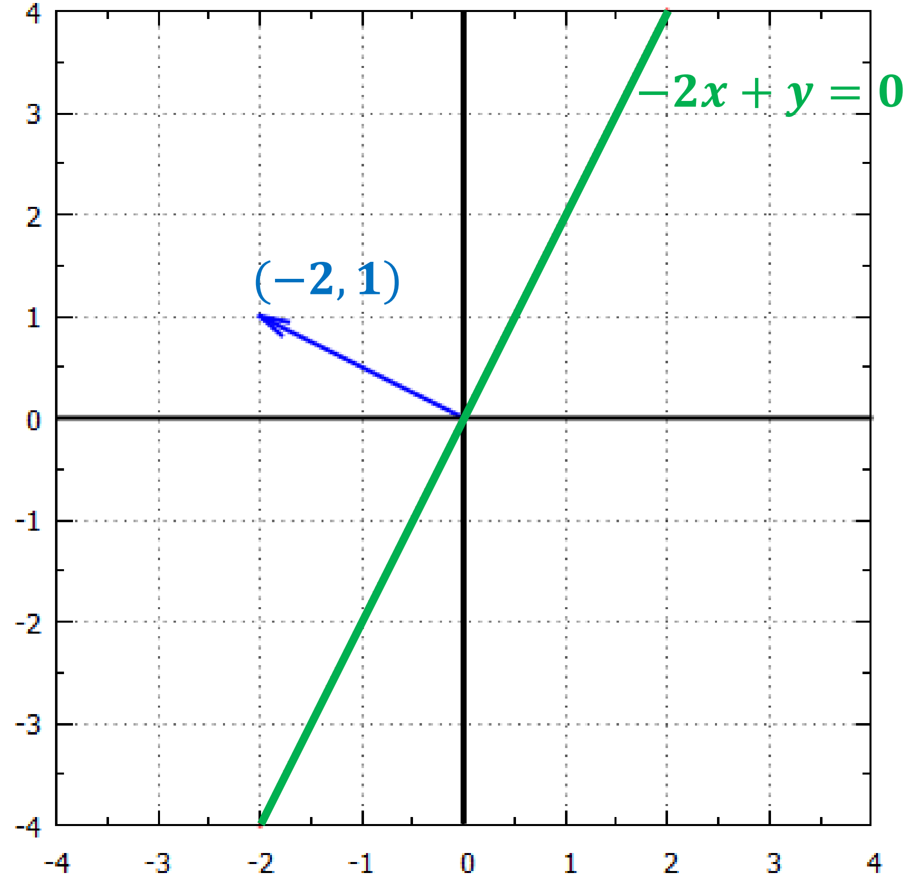
Równanie prostej na płaszczyźnie

$$Ax + By = 0$$

Przykład:

$$-2x + y = 0$$

Uzyskana prosta jest prostopadła do wektora $(-2, 1)$

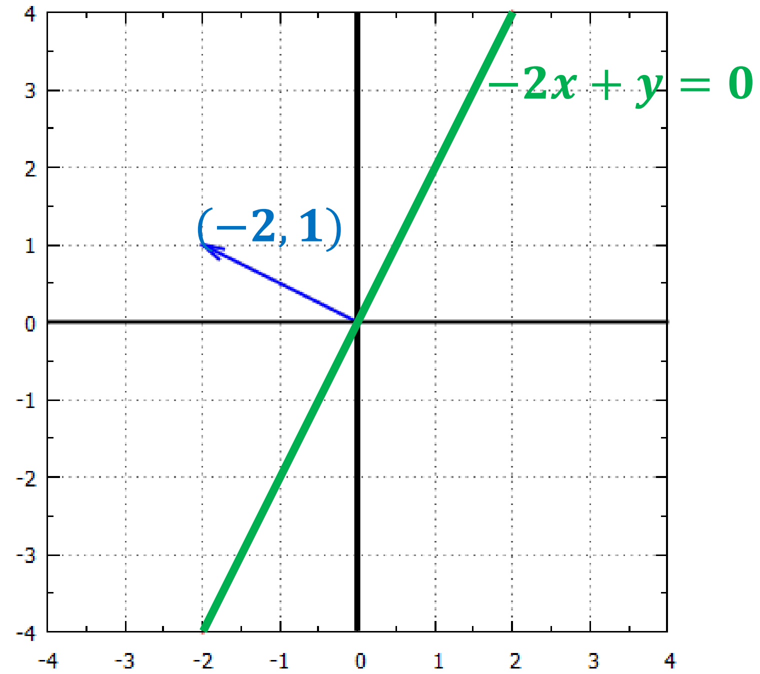


Wektor prostopadły do prostej na płaszczyźnie

$$Ax + By = 0$$

Wektor (A, B) jest prostopadły do prostej zadanej równaniem

$$Ax + By = 0$$



Równanie płaszczyzny w przestrzeni

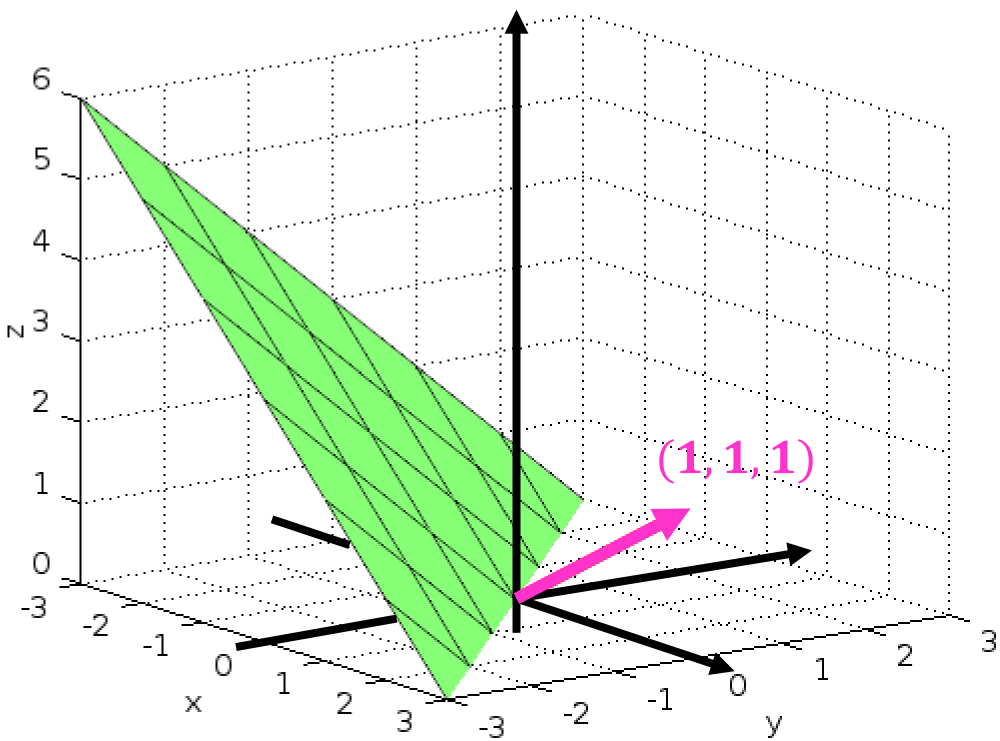
- Analogicznie do przypadku 2D, ogólne równanie płaszczyzny w 3D przechodzącej przez punkt $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ ma postać

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} = \mathbf{0}$$

- Wektor $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ jest <u>prostopadły</u> do tej płaszczyzny

Wektor prostopadły do płaszczyzny

- Przykład: płaszczyzna $\boldsymbol{x + y + z = 0}$ jest prostopadła do wektora (1, 1, 1)



Płaszczyzna
i wektor do niej prostopadły

- Ogólne równanie płaszczyzny przechodzącej przez dowolny punkt (x_0, y_0, z_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- Wektor prostopadły do tej płaszczyzny:

$$(A, B, C)$$

Wektor normalny do powierzchni

Wektor (A, B, C) ma długość $\mathrm{r} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Dlatego wektor

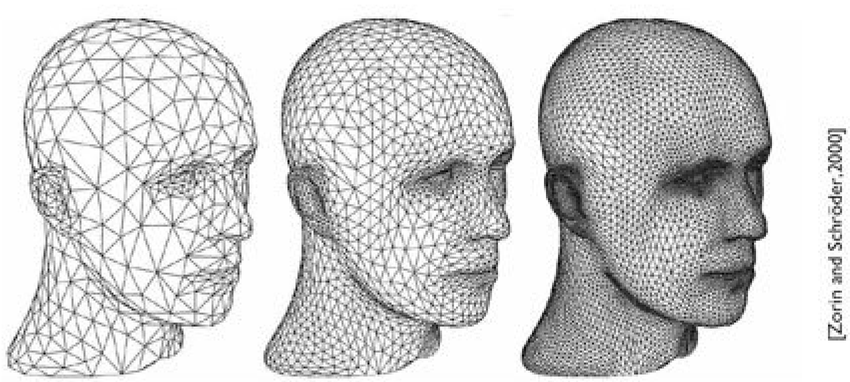
$$\widehat{\boldsymbol{n}} = \left(\frac{A}{r}, \frac{B}{r}, \frac{C}{r}\right)$$

ma długość 1. Taki wektor nazywa się **wektorem normalnym** do powierzchni. Wektor normalny ma długość 1 (tzn. jest ***unormowany***) i jest prostopadły do danej powierzchni.

Pożytek z wektorów normalnych

Wektor normalny określa orientację powierzchni (np. trójkąta) w przestrzeni

- Grafika komputerowa: obliczanie oświetlenia powierzchni
- Fizyka/matematyka: wyznaczanie strumienia przez powierzchnię



RÓŻNICZKA ZUPEŁNA

Przypadek 1D

- Jeśli $y = y(x)$, to jak pamiętamy, różniczka dy inforumuje nas, jak szybko zmienia się y, jeśli znamy szybkość zmiany x

$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

Przypadek 2D

- Dana jest płaszczyzna $z = ax + by + c$

$$
\begin{array}{rl}
 & z_1 = ax_1 + by_1 + c \\
- & z_0 = ax_0 + by_0 + c \\
\hline
 & \Delta z = a\Delta x + b\Delta y
\end{array}
$$

- Ale: $a = \partial z/\partial x, b = \partial z/\partial y$
- Czyli:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{d}y$$

Przypadek ogólny

Dowolna różniczkowalna funkcja 2 zmiennych

$$\boxed{\mathbf{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{d}y}$$

bo każdą powierzchnię gładką w pewnym punkcie
można w otoczeniu tego punktu przybliżyć
płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie

Przypadek jeszcze bardziej ogólny

Dowolna różniczkowalna funkcja N zmiennych:

$$\boxed{\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_N}\mathbf{d}x_N}$$

Przykład

$$f(x, y) = xy^2$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$df = y^2\, dx + 2xy\, dy$$

Przykład:
szacowanie błędów pomiarowych

$$R = \frac{U}{I}$$

prawo Ohma

$$\mathrm{d}R = \frac{\partial}{\partial U}\frac{U}{I}\mathrm{d}U + \frac{\partial}{\partial I}\frac{U}{I}\mathrm{d}I$$

różniczka

$$|\boldsymbol{\Delta} R| \approx \frac{1}{I}|\boldsymbol{\Delta} U| + \frac{U}{I^2}|\boldsymbol{\Delta} I|$$

błąd bezwzględny

lub:

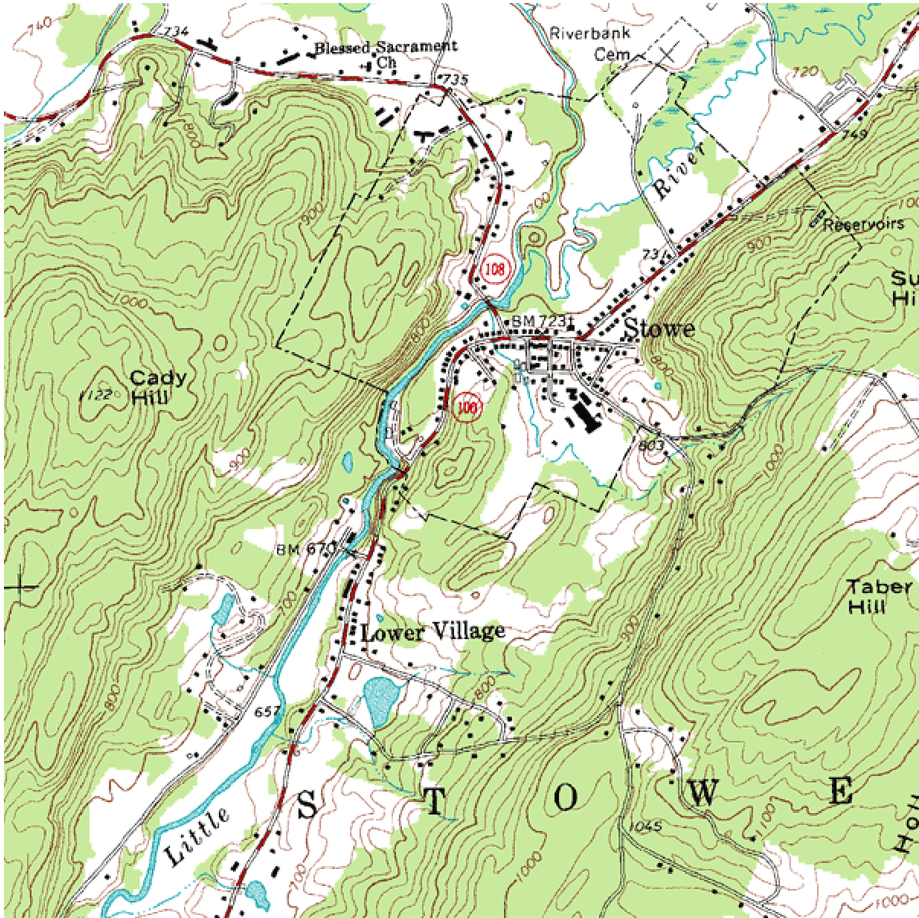
$$\left|\frac{\Delta R}{R}\right| \approx \left|\frac{\Delta U}{U}\right| + \left|\frac{\Delta I}{I}\right|$$

błąd względny

GRADIENT

Jak wyznaczyć przebieg poziomic i kierunek największego spadku?

- Kierunek spadku: w terenie wystarczy puścić kulkę lub wylać wodę
- Jak to zrobić, jeśli mamy tylko *równanie* opisujące „nierówność terenu”?



Jak wyznaczyć przebieg poziomic?

Dana jest płaszczyzna $z = ax + by + c$

$$z_1 = ax_1 + by_1 + c$$

$$z_0 = ax_0 + by_0 + c$$

$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y$ = **0** (poziomica!)

czyli

$$a\Delta x + b\Delta y = 0$$

wzdłuż poziomicy

To nam ustala kierunek poziomicy: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{b}$

Jak wyznaczyć kierunek spadku?

- Skoro wzdłuż poziomicy

$$a\Delta x + b\Delta y = 0$$

To wektor $(\Delta x, \Delta y)$ przesunięcia na poziomicy musi być **prostopadły** do wektora (a, b)

- Wektor $(a, b) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ wyznacza więc kierunek najszybszego spadku/nachylenia funkcji
- Ten **wektor** nazywamy ***gradientem***

Notacja nabla

- Gradient zwykle oznacza się symbolem „nabla”

$$\nabla$$

$$\nabla z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

- Alternatywna notacja:

$$\mathbf{grad}\ (z)$$

Gradient w 3D

- W przypadku 3D, $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ gradient zdefiniowany jest jako **wektor**

$$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Gradient

- W przypadku 3D, $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ gradient zdefiniowany jest jako **wektor**

$$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- Ogólnie, dla **skalarnych funkcji *N* zmiennych**

$$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$$

Gradient a kierunek największego wzrostu

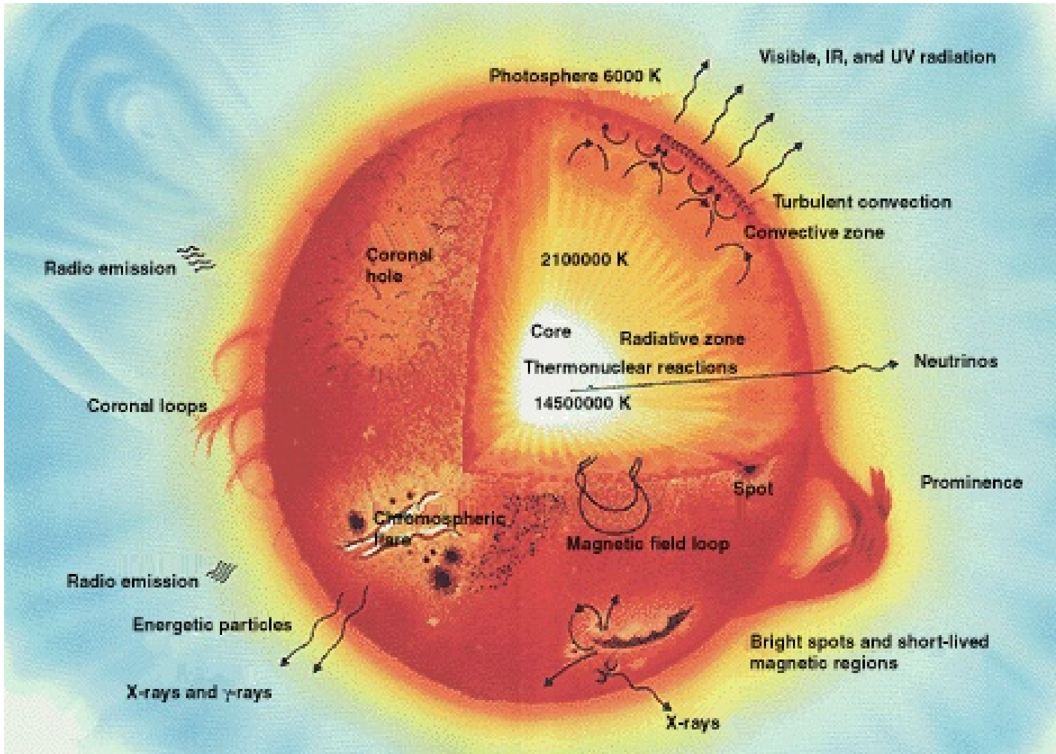
- Gradient wyznacza kierunek najszybszej zmiany wartości skalarnej funkcji wielu zmiennych (w 2D, 3D,…)
- Płaszczyzna prostopadła do $\nabla f(x, y, z)$ jest płaszczyzną „poziomicową” (lokalnie wartość f na tej płaszczyźnie jest stała)
- W przypadku funkcji 1 zmiennej gradient redukuje się do zwykłej pochodnej

Przykłady gradientów

- Prawo Fouriera:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

- Czy bez pochodnych cząstkowych można by modelować zjawiska wewnątrz Słońca?



$\vec{q}$ – natężenie strumienia ciepła
λ – przewodność cieplna
T – temperatura

Przykłady gradientów

- Prawo Fouriera:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

Ciepło płynie
w kierunku
obszaru o niższej
temperaturze

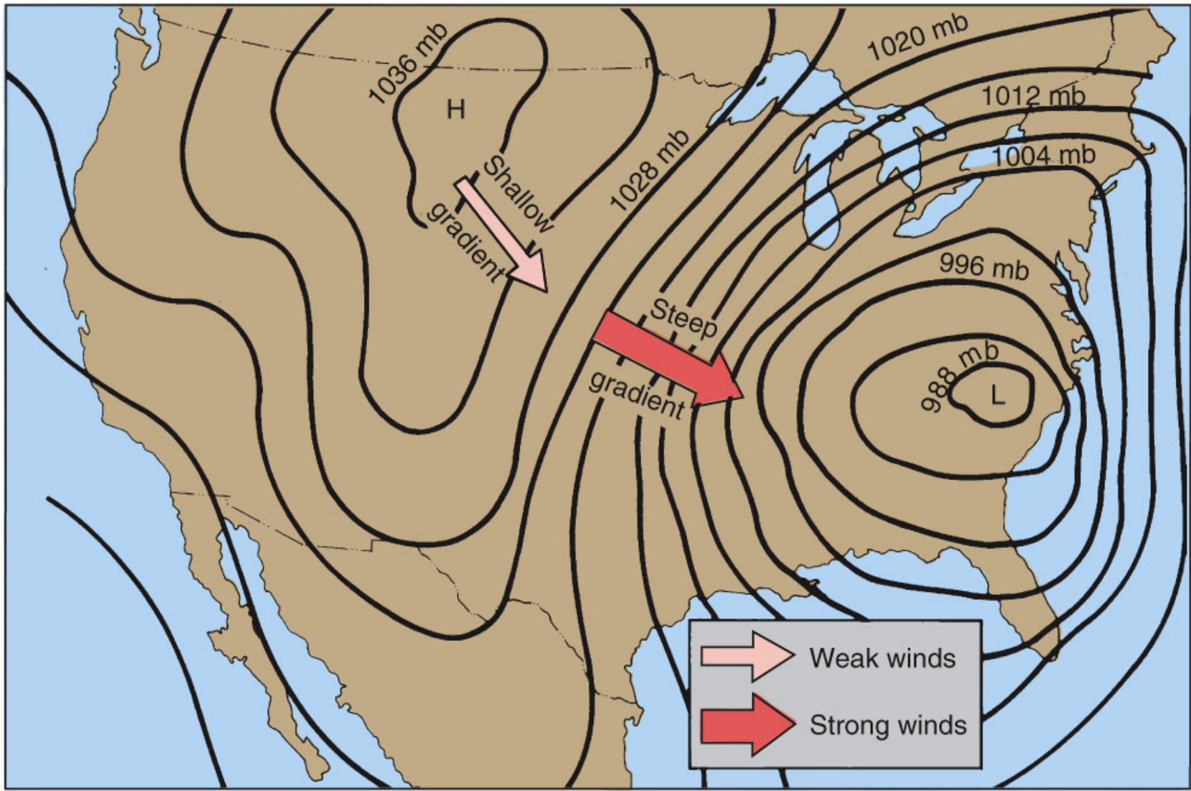
Gradient jest
skierowany
w stronę
maksimum!

Przykłady gradientów

- Przyspieszenie cząstki płynu:

$$\vec{a} = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

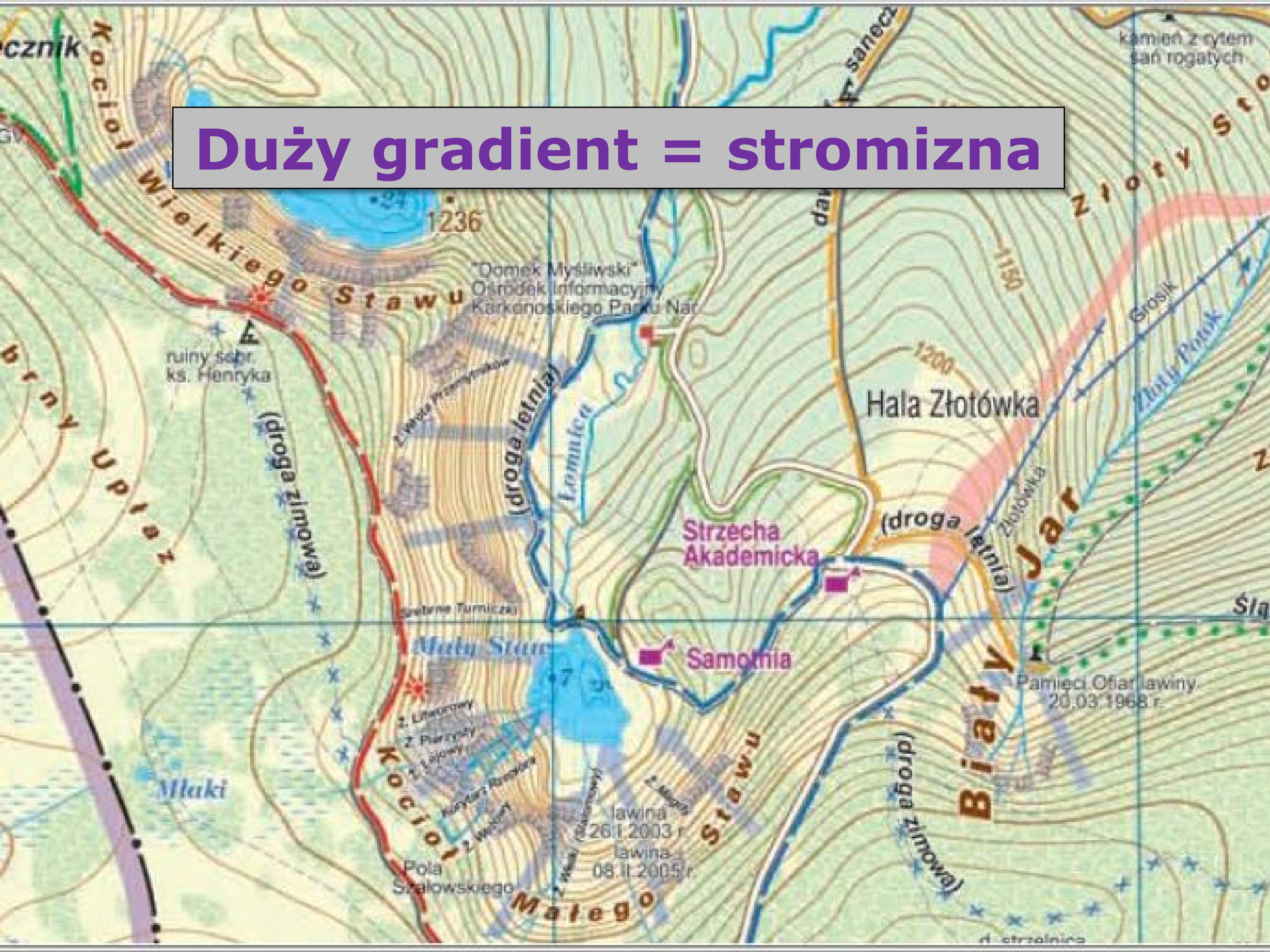
- Czy bez pochodnych cząstkowych potrafilibyśmy przewidywać pogodę?



$\vec{a}$ – przyspieszenie
P – ciśnienie
ρ – gęstość`

geogrify.net/GEO1/Images/FOPG/0404.jpg

Duży gradient = stromizna



Gradienty w nauce

- $\vec{F} = -\nabla E_{\mathrm{p}}$

  $\vec{F}$ – siła (wektor)

  E_{p} – energia potencjalna (skalar)

- $\vec{E} = -\nabla \varphi$

  $\vec{E}$ – natężenie pola elektrycznego (wektor)

  φ – potencjał pola elektrycznego (skalar)

DYWERGENCJA

Iloczyn skalarny (ang. *dot product*)

- Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$ oraz $\vec{w} = \left(w_x, w_y, w_z\right)$ jest liczba (czyli „skalar”)
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z$$
- $\vec{u} \cdot \vec{w} = uw \cos \alpha$ (α: kąt między $\vec{u}$ i $\vec{w}$)
- Dwa wektory są prostopadłe ⇔ $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$
- $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$

Dywergencja

- Dywergencja to charakterystyka ***pola wektorowego*** [punkt w przestrzeni (wektor) → skalar]
- Dywergencję definiujemy jako „iloczyn skalarny" operatora $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ i wartości pola wektorowego:

$$\mathbf{div}\,\vec{u} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Interpretacja dywergencji

- Wyobraźmy sobie sferę o środku w (x, y, z)
  i bardzo, bardzo małym promieniu r
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ jest miarą strumienia pola wektorowego $\vec{u}$ przez powierzchnię tej sfery
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} > 0$ oznacza, że w (x, y, z) znajduje się „źródło płynu" lub płyn ulega rozprężaniu
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} < 0$ oznacza, że w (x, y, z) znajduje się „anihilator płynu" lub płyn ulega sprężaniu
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ oznacza, że przepływ jest bezźródłowy

Pole bezźródłowe

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Przykłady:

- Przepływ cieczy nieściśliwej
- Pole magnetyczne
- Pole elektryczne w próżni

ROTACJA

Definicja

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

- Rotacja opisuje ***wirowość*** pola wektorowego
- Oznaczenia: $\vec{\nabla} \times \vec{u}$, $\mathbf{rot}\,\vec{u}$, $\mathbf{curl}\,\vec{u}$

Interpretacja

Niech $\vec{u}$ oznacza pole prędkości cieczy lub gazu w dużym pojemniku. W wybranym miejscu ($\vec{r}$) pojemnika umieszczamy kulkę. Opływający ją płyn wprawi ją w ruch obrotowy. Wtedy oś obrotu jest równoległa do $(\vec{\nabla} \times \vec{u})(\vec{r})$, zwrot wyznacza reguła korkociągu, a prędkość kątowa kulki jest proporcjonalna do $|\vec{\nabla} \times \vec{u}|(\vec{r})$.

LAPLASJAN

Definicja

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- Określa, na ile wartość średnia u (skalar) w otoczeniu jakiegoś punktu przewyższa wartość u w tym punkcie
- Alternatywny zapis:

$$\Delta u, \qquad \mathbf{div\,grad}\, u$$

FUNDAMENTALNE TWIERDZENIA

Twierdzenie o gradiencie

$$\int_{\Gamma[\vec{p},\vec{q}]} \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{q}) - \varphi(\vec{p})$$

- Całka krzywoliniowa z gradientu pola skalarnego równa jest różnicy wartości tego pola na końcach krzywej całkowania
- W fizyce: gwarantuje sensowność pojęcia energii potencjalnej

$$\int_{\Gamma[\vec{r}_0,\vec{r}_1]} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_1) - E_p(\vec{r}_0)$$

Twierdzenie o gradiencie

$$\int_{\Gamma[\vec{p},\vec{q}]} \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{q}) - \varphi(\vec{p})$$

- To twierdzenie uogólnia podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

  na przestrzenie o wymiarze większym niż 1
- Gradient jest tu uogólnieniem zwykłej pochodnej

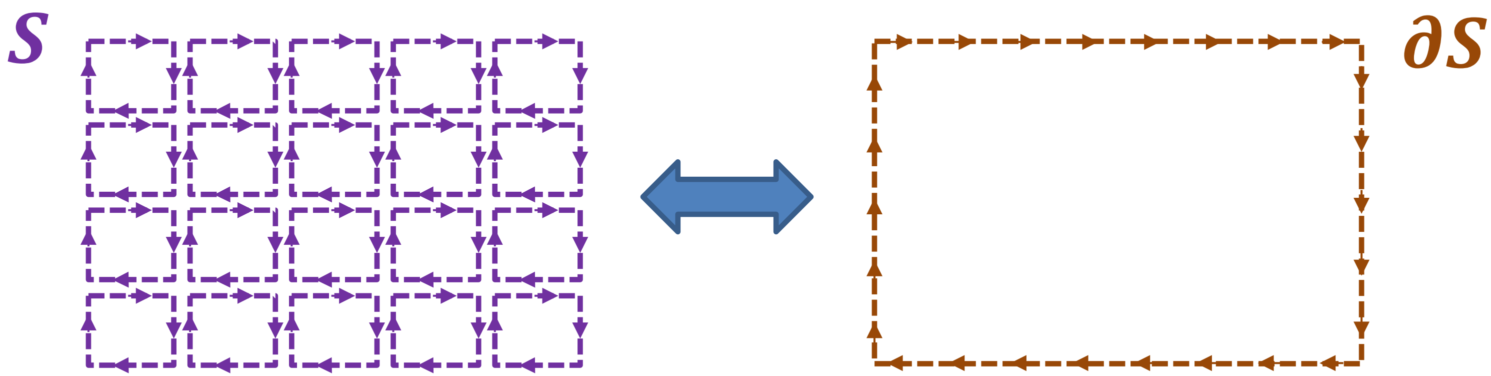
Twierdzenie Kelvina-Stokesa

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot dS = \oint_{\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

Całka powierzchniowa ze strumienia rotacji pola wektorowego ($\vec{u}$) poprzez powierzchnię S równa jest całce krzywoliniowej z tego pola wzdłuż (zamkniętego) brzegu powierzchni (∂S); powierzchnia nie musi być płaska (np. może być półsferą)

Twierdzenie Kelvina-Stokesa

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot dS = \oint_{\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$



wkład wirów
wewnątrz
powierzchni
się znosi

zostaje całka
po brzegu

Znane od 1762 r

Twierdzenie o dywergencji (Gaussa)

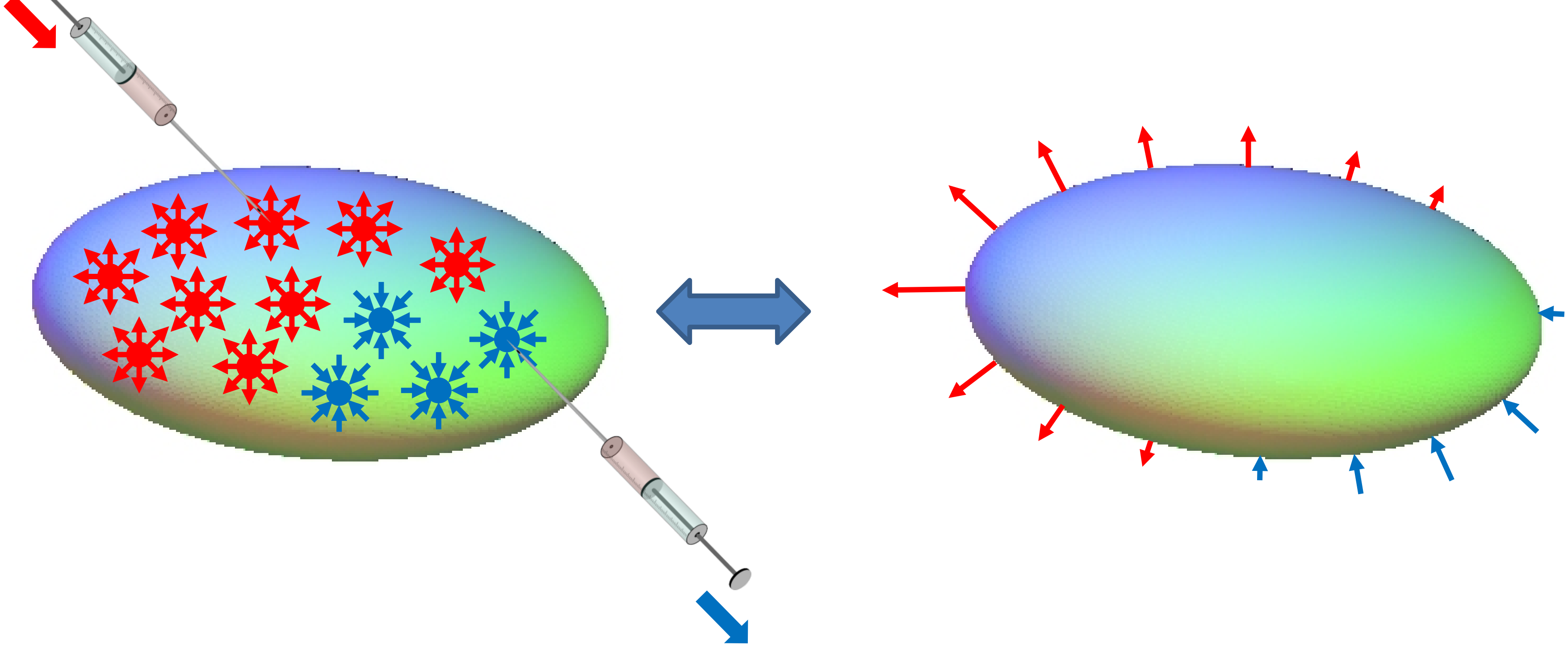
$$\underbrace{\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\, dV}_{\text{suma źródeł + i −}} = \underbrace{\oiint_{\partial V} (\vec{u} \cdot \vec{n})\, dS}_{\text{strumień przez brzeg}}$$

Całka objętościowa z dywergencji pola wektorowego ($\vec{u}$) w objętości V równa jest całce powierzchniowej ze strumienia tego pola na powierzchni (brzegu, ∂V) tej objętości

Znane od 1762 r

Twierdzenie o dywergencji (Gaussa)

$$\underbrace{\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\, dV}_{\text{suma źródeł + i −}} = \underbrace{\oiint_{\partial V} (\vec{u} \cdot \vec{n})\, dS}_{\text{strumień przez brzeg}}$$



Znaczenie twierdzeń

- Zaprezentowane tu twierdzenia umożliwiają redukcję wymiaru przestrzeni, w której wyznacza się całki, o jeden $(1 \to 0, 2 \to 1, 3 \to 2)$
- Są powszechnie stosowane w naukach przyrodniczych oraz… wyrafinowanych metodach numerycznych
- Tak, wiem że nic nie mówiliśmy o całkach objętościowych, powierzchniowych i krzywoliniowych

FUNDAMENTALNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE (PRZYKŁADY)

Zasada zachowania masy (mechanika płynów)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \vec{u})$$

dywergencja

czyli

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}$$

ρ – gęstość płynu

$\vec{u}$ – prędkość płynu

t – czas

„prędkość zmiany masy płynu w małej kulce równa jest strumieniowi masy płynu przez powierzchnię kulki”

Warunek na nieściśliwość płynu (mechanika płynów)

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$$

czyli

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$\vec{u}$ – prędkość płynu

t – czas

„strumień masy płynu przepływającego przez powierzchnię kulki równa się zeru – tyle, ile płynu wpływa, tyle wypływa”

Równanie dyfuzji (także: przewodnictwa cieplnego)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho$$

W jednym wymiarze:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

ρ – koncentracja (skalar!)
D – współczynnik dyfuzji

Równanie falowe

Drugi rząd w t

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

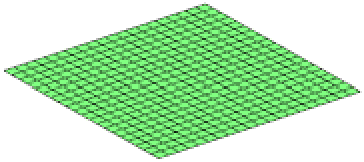
Laplasjan

czyli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

W jednym wymiarze:

c – prędkość fali
u – wychylenie fali od położenia równowagi



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Równania Maxwella

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t}$$

rotacja

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\varepsilon\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial t}$$

rotacja

$$\varepsilon\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

dywergencja

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

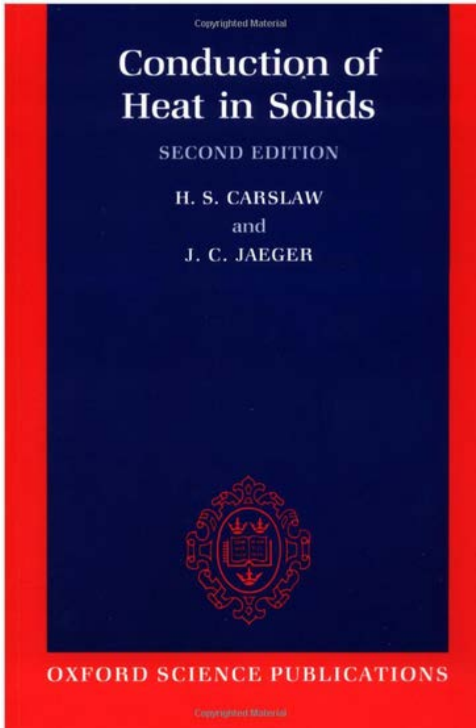
dywergencja

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

Rozwiązywanie PDE

- Rozwiązywaniu pojedynczych (układów) równań różniczkowych zwyczajnych poświęcono wiele grubych podręczników lub wręcz całych działów fizyki:
  - Elektrodynamika
  - Hydrodynamika
  - Teoria sprężystości
  - Termodynamika
  - Mechanika kwantowa
  - Ogólna teoria względności
  - …

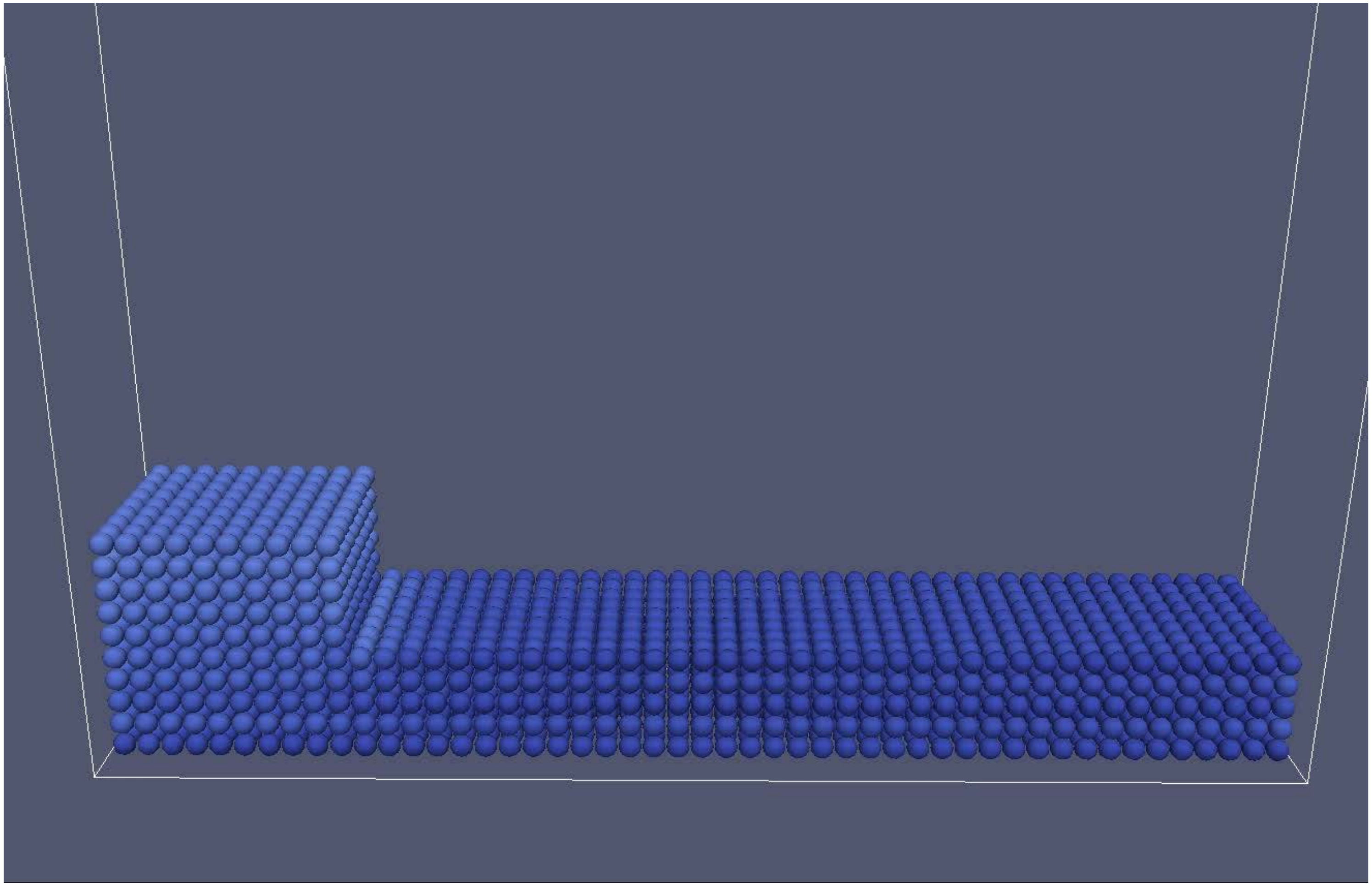
500 stron

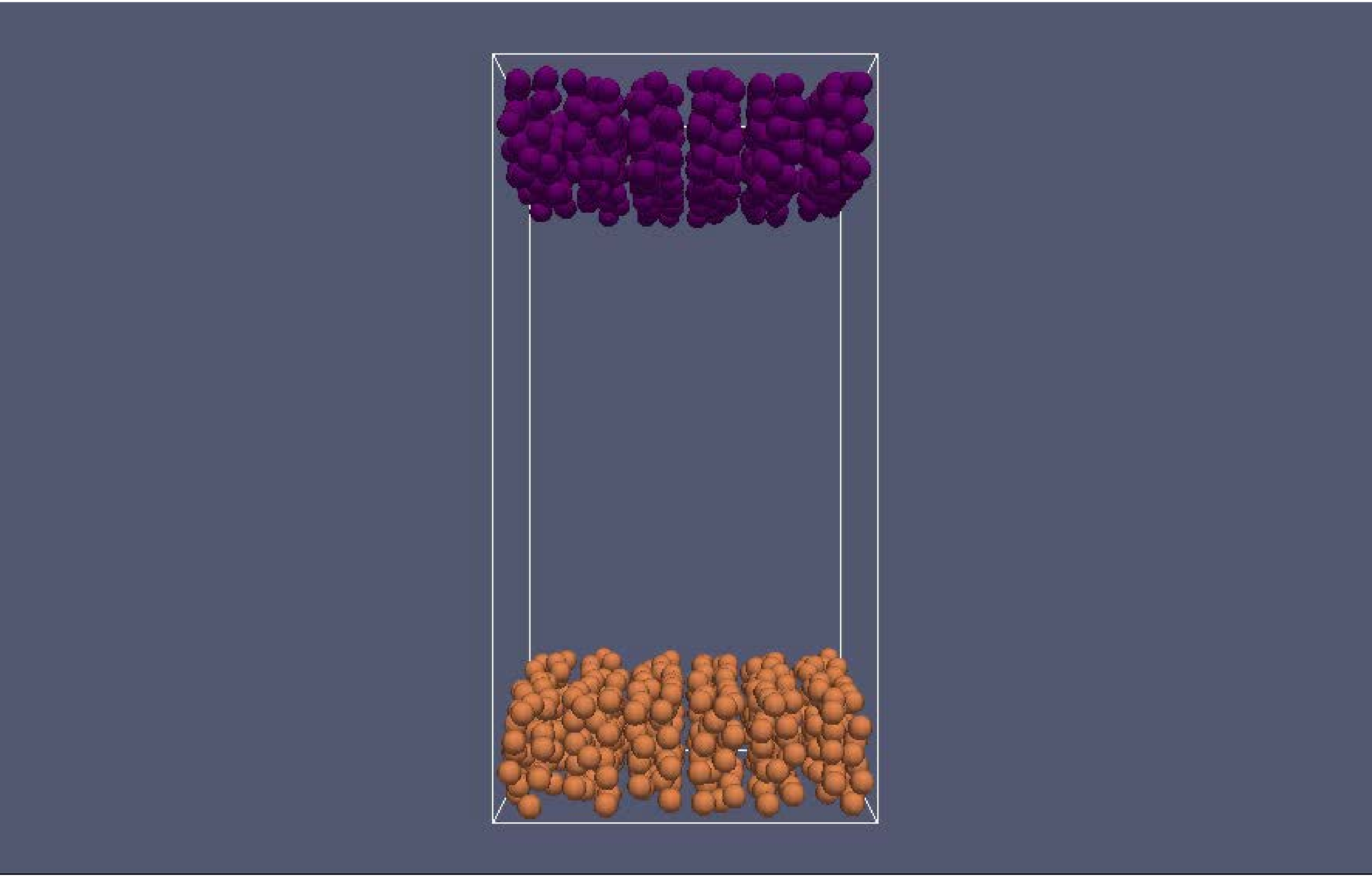


Rozwiązywanie PDE

- Różne typy równań wymagają specyficznych metod rozwiązywania (mechanika kwantowa jednak *nieco* się różni od hydrodynamiki, etc.)
- Octave nie ma gotowych metod dla PDE
- Dostępne programy numeryczne są baaaardzo złożone w obsłudze
- Dlatego zapraszam na bardziej zaawansowane kursy, np. analizę matematyczną lub – zwłaszcza! – **metody numeryczne**

Te równania daje się rozwiązać jeszcze na studiach!





Wnioski

- Pochodna cząstkowa to zwykła pochodna z „zamrożonymi” wszystkimi zmiennymi oprócz jednej
- Równania różniczkowe cząstkowe są powszechnie używane w nauce i technice
- Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych to odrębna gałąź wiedzy
- Niemniej, wykształconemu człowiekowi wypada przynajmniej rozumieć język równań różniczkowych cząstkowych