Uniwersytet Wrocławski

Funkcje wielu zmiennych

oraz ich wykresy

Zbigniew Koza
Wydział Fizyki i Astronomii

Wrocław, 2016

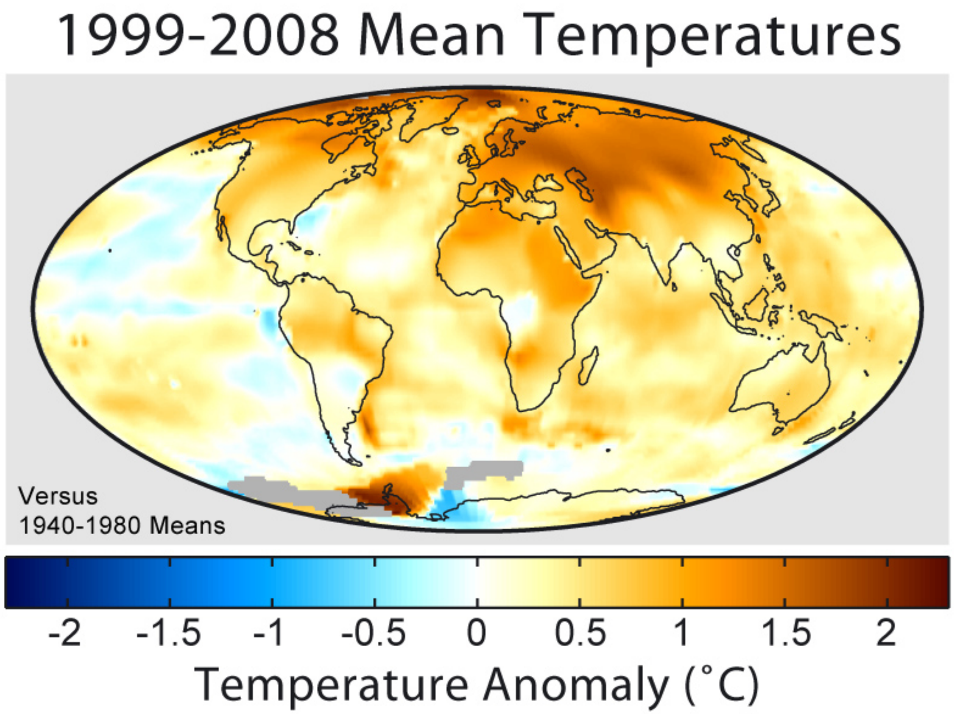
WSTĘP

Funkcje wielu zmiennych

- Dotychczas zajmowaliśmy się funkcjami rzeczywistymi: argumentem była *jedna* liczba rzeczywista i podobnie wartością była *jedna* liczba rzeczywista
- Takie funkcje nie nadają się do opisu złożonych problemów fizycznych, takich jak przepływ wody w rzece czy klimat Ziemi

$$(\phi, \theta) \to \mathrm{T}$$

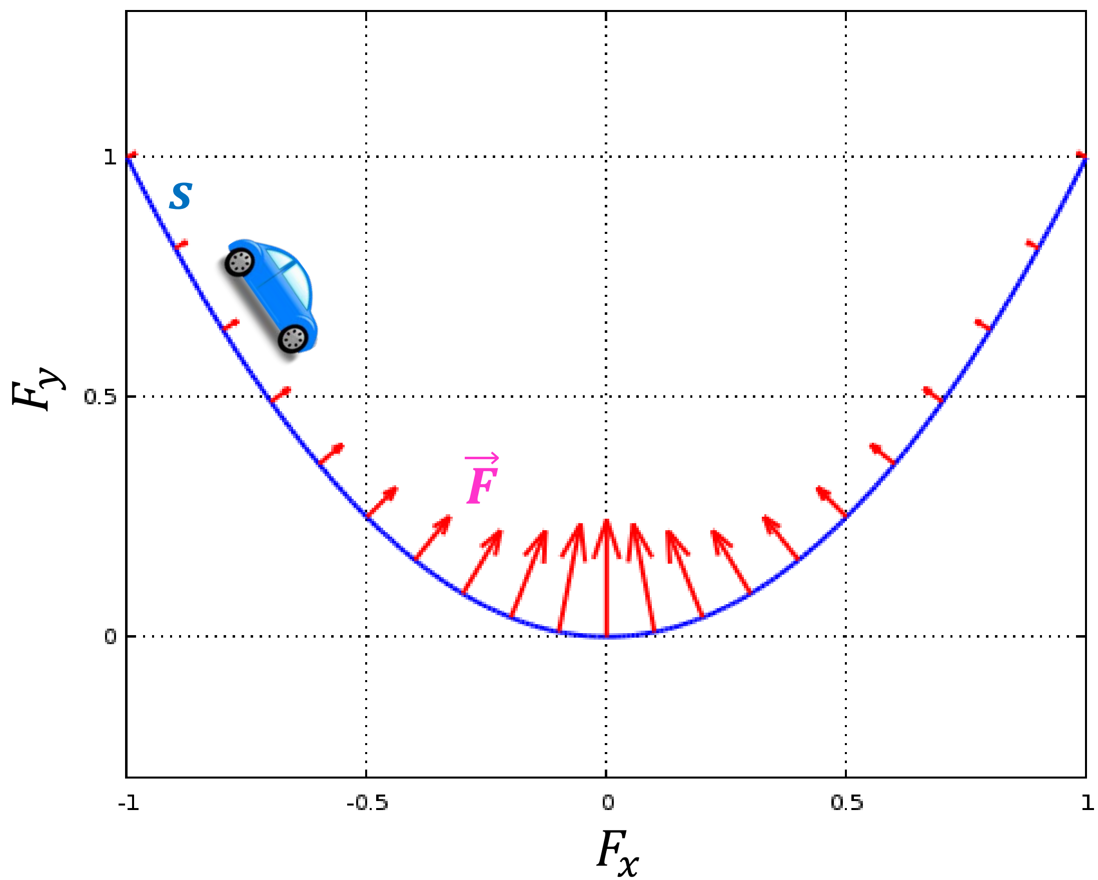
Opis zjawisk zachodzących na powierzchni może wymagać funkcji, które dwóm liczbom przypisują trzecią



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8c/Global_Warming_Map.jpg

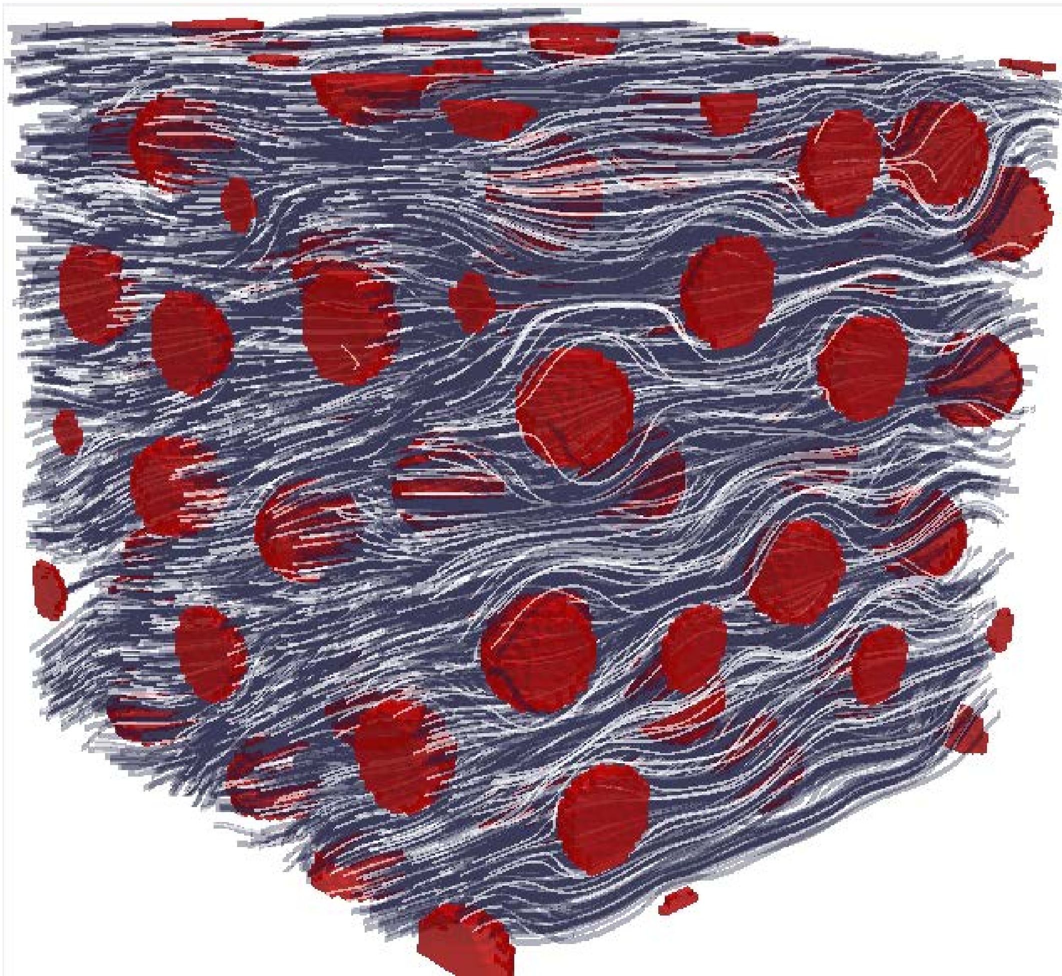
$$s \rightarrow (F_x, F_y) = \vec{F}$$

Zagadnienia mechaniczne mogą wymagać użycia funkcji, które jednej liczbie przypisują dwie [tu: droga s → wektor siły reakcji $\vec{F}(x,y)$]



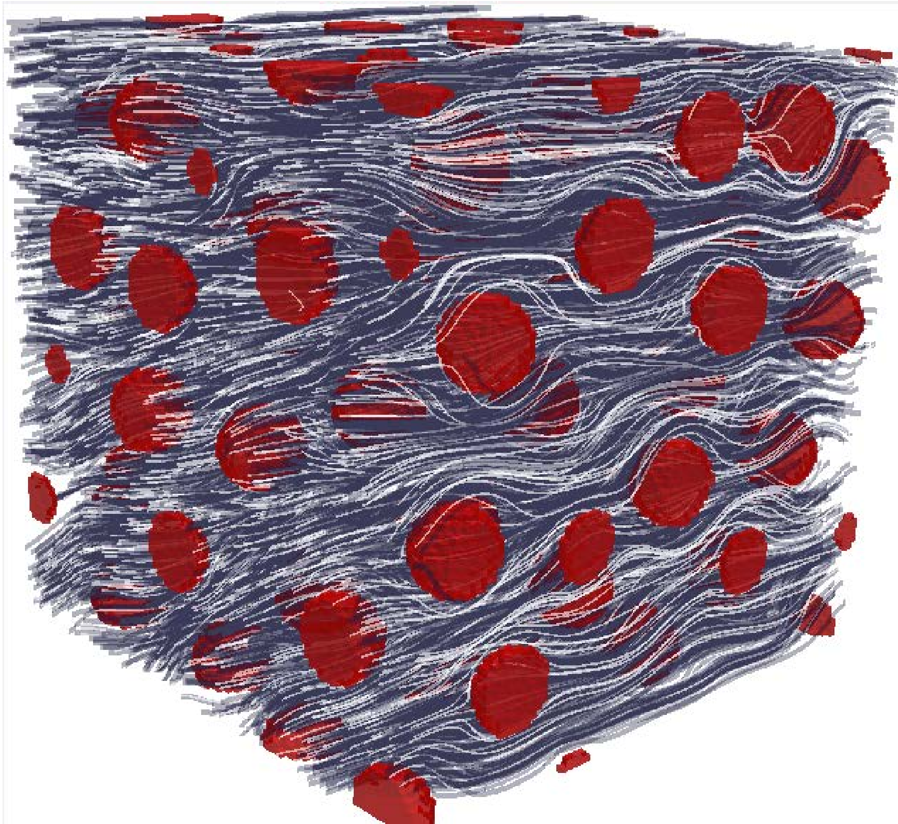
$$(x, y, z, t) \to (v_x, v_y, v_z)$$

Badanie przepływów wymaga użycia funkcji, które czwórce liczb (składowe położenia i czas) przyporządkowują trzy liczby (składowe wektora prędkości)



$$(x, y, z, t) \to (v_x, v_y, v_z)$$

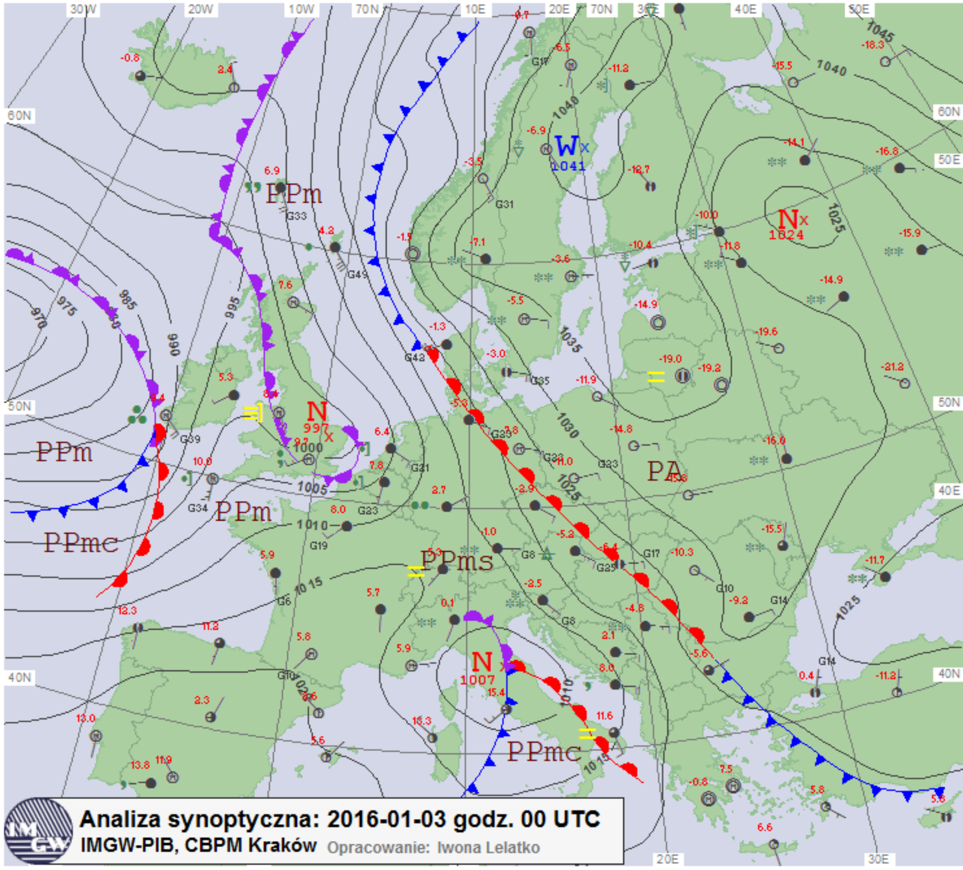
O funkcji „*N*-wartościowej” często mówi się „funkcja wektorowa” lub „funkcja o wartościach wektorowych”



$$(x, y, z, t) \rightarrow (v_x, v_y, v_z, T, P, a, \dots)$$

Funkcję „*N*-wartościową” można zastąpić *N* funkcjami „1-wartościowymi”

$$v_x(x, y, z, t)$$
$$v_y(x, y, z, t)$$
$$v_z(x, y, z, t)$$
$$T(x, y, z, t)$$
$$P(x, y, z, t)$$
$$a(x, y, z, t)$$
$$\dots$$



Skalar a wektor

- „Skalar” to po prostu liczba
- „Wektor” ma wiele znaczeń:
  - Matematyka:
    „element przestrzeni wektorowej” (→ semestr 2)
  - Octave/C++/etc.: wektor to synonim ciągu
  - Fizyka: „wielkość mająca wartość, kierunek i zwrot”, np. przesunięcie, prędkość, siła
- Wektory fizyczne mają 3 składowe, których wartości *zależą od układu odniesienia*
- Dlatego (bez wyraźnej potrzeby) nie redukuje się wektorów do ich składowych

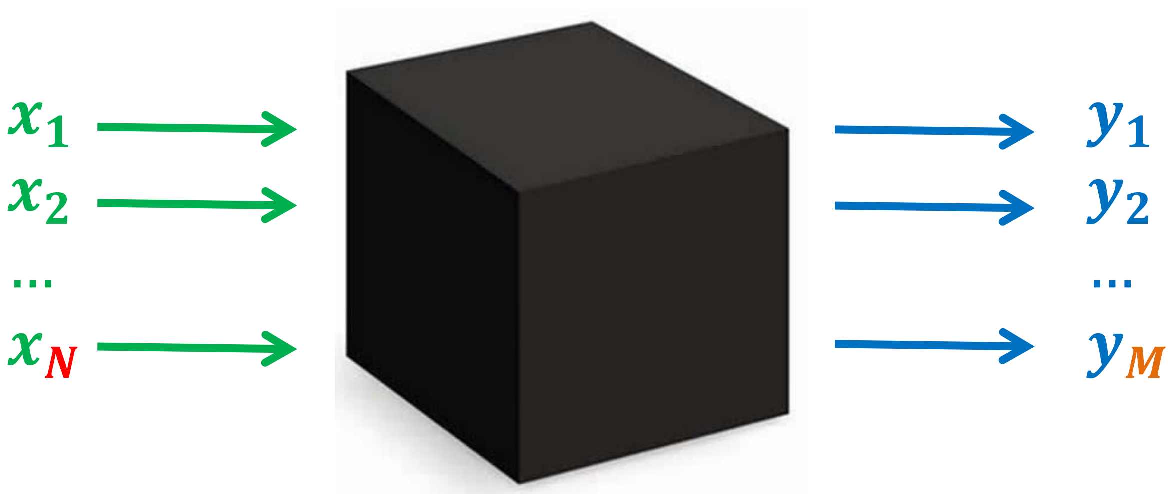
Skalar a wektor

Odróżniaj skalary od wektorów!

Funkcja jako „czarna skrzynka”

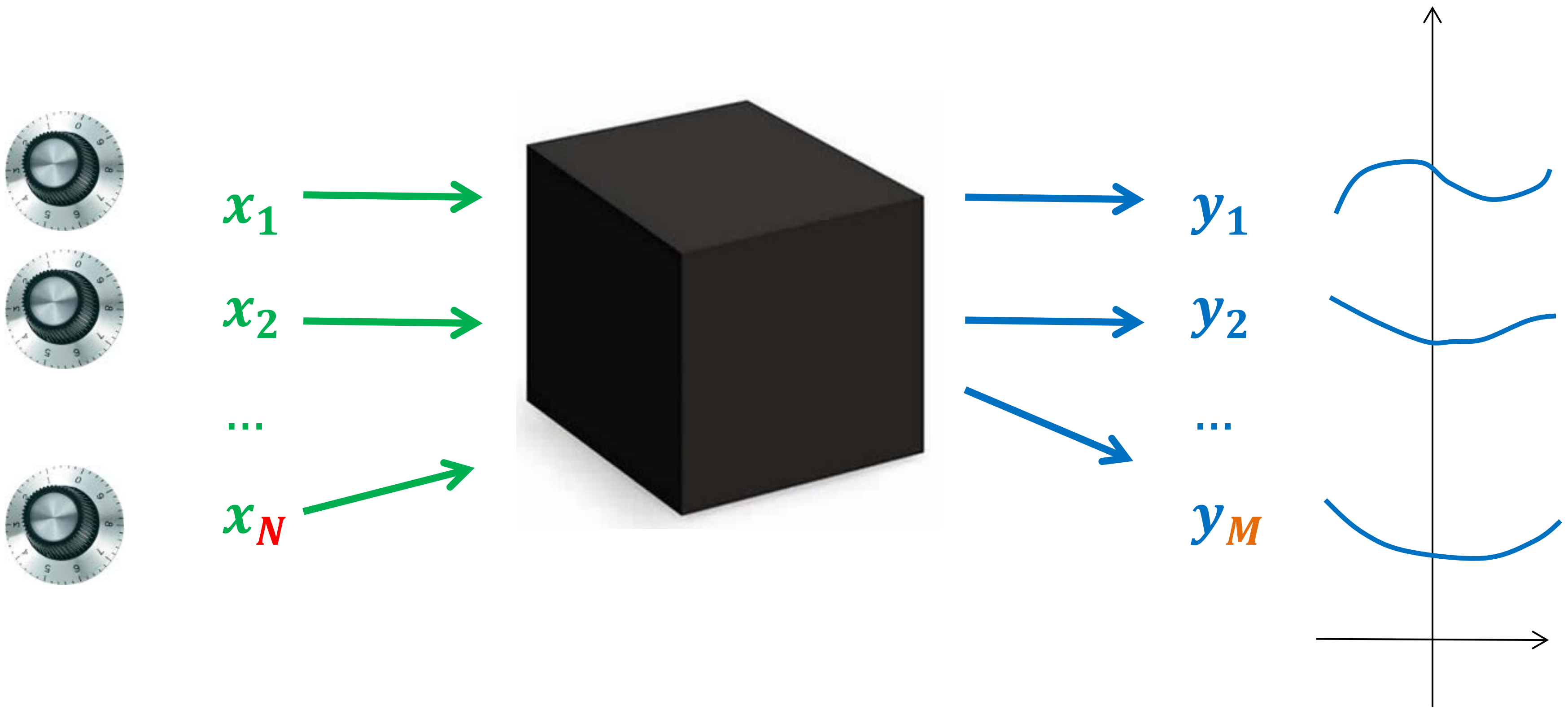
Jedna lub więcej zmiennych na wejściu

Jedna lub więcej zmiennych na wyjściu



Interesują nas tylko funkcje ciągłe

- Dostatecznie drobne zmiany na wejściu powodują dowolnie małe zmiany na wyjściu



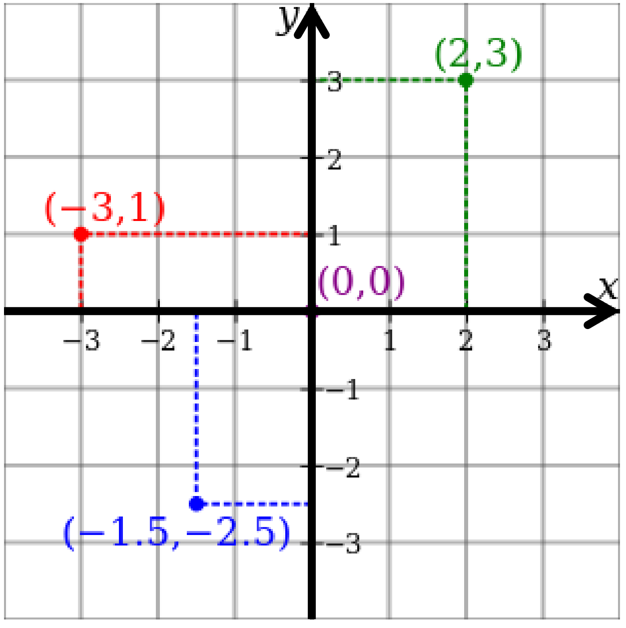
UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

Układy współrzędnych

- Kartezjański układ współrzędnych nie jest jedynym, jaki się *powszechnie* stosuje
- Inne popularne układy:
  - Biegunowy [2D]
  - Walcowy (cylindryczny) [3D]
  - Sferyczny [3D]
- Dodatkowo każdy z tych układów można przesunąć i/lub obrócić

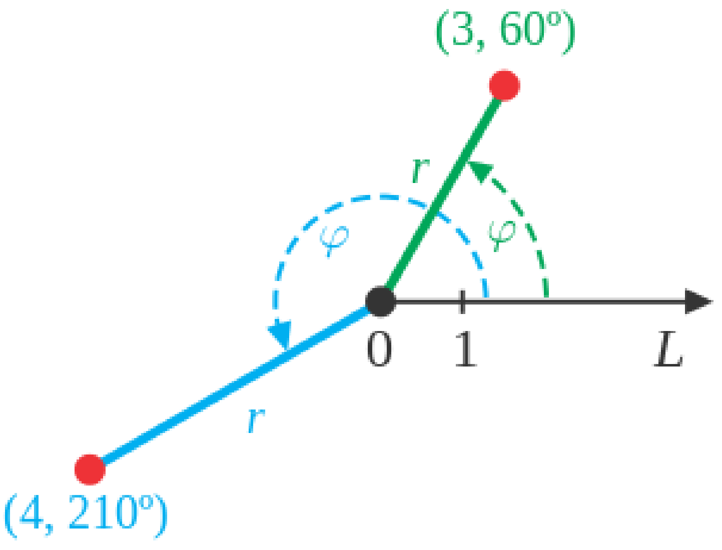
Kartezjański układ współrzędnych

- 2D: środek układu i 2 prostopadłe osie
- Położenie każdego punktu na płaszczyźnie identyfikowane jest poprzez rzuty tego punktu na osie
- Łatwo uogólnia się na N wymiarów



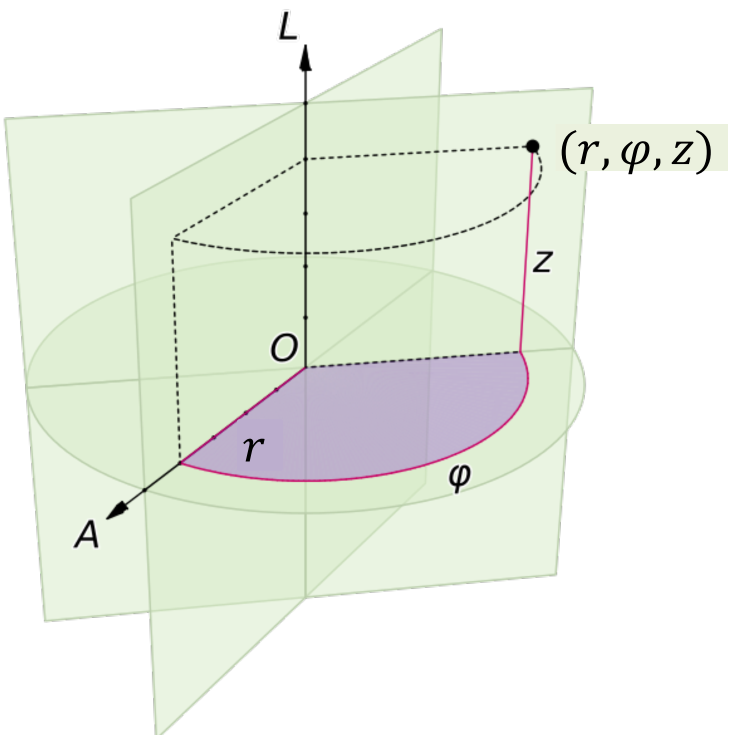
Biegunowy układ współrzędnych

- Dwuwymiarowy układ współrzędnych zdefiniowany przez punkt (biegun) i półprostą (oś biegunowa)
- Współrzędne punktu wyznaczone są przez jego odległość od bieguna (r) i kąt do osi (φ)



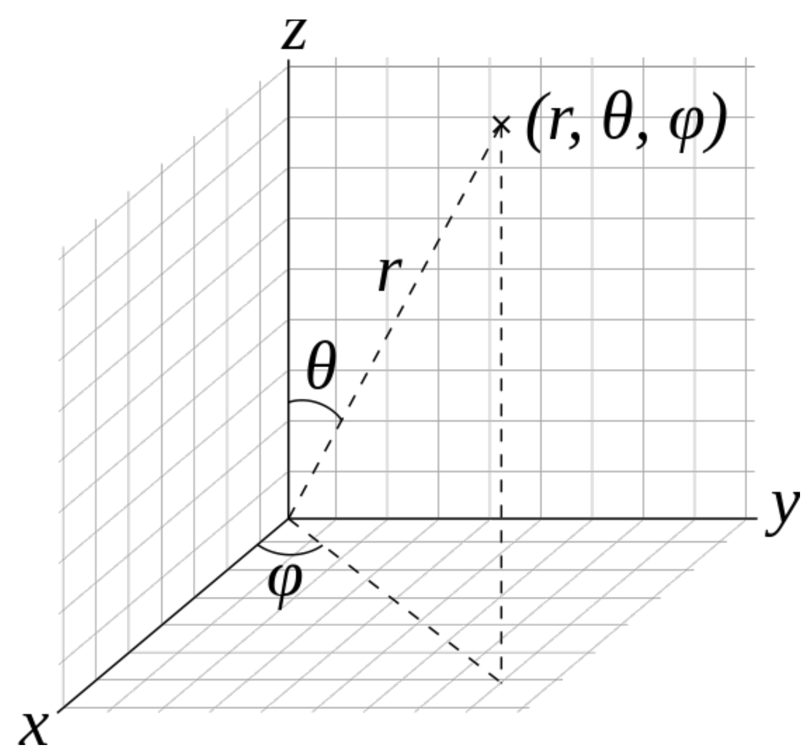
Cylindryczny układ współrzędnych

- Trójwymiarowy układ współrzędnych zdefiniowany przez punkt (środek układu) i dwie wzajemnie prostopadłe półproste
- Współrzędne punktu wyznaczone są przez jego odległość (z) od płaszczyzny prostopadłej do osi OL i współrzędne biegunowe (r, φ) rzutu punktu na tę płaszczyznę



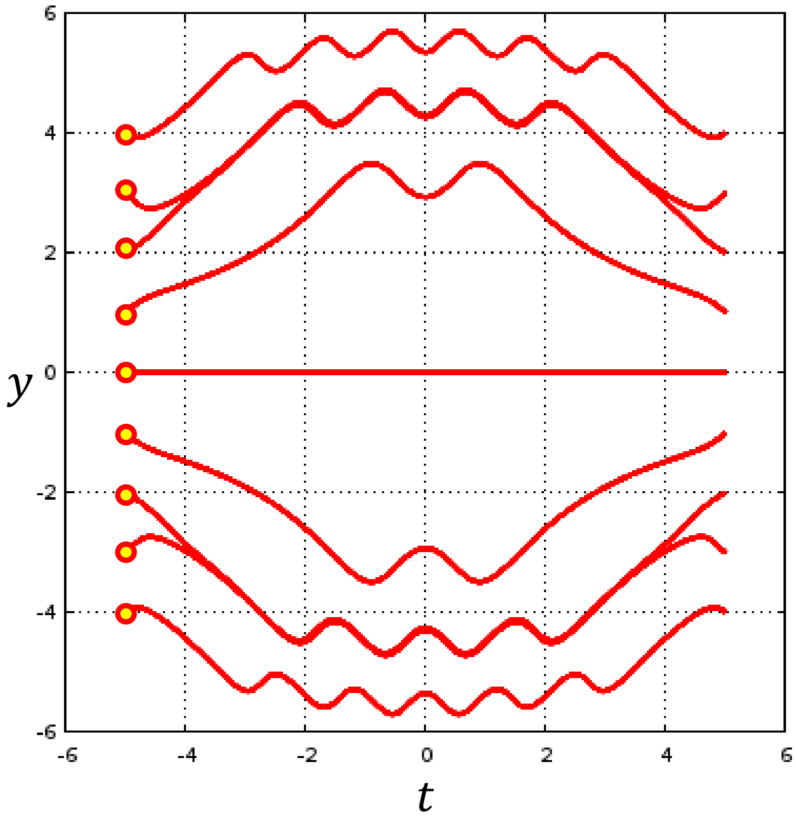
Sferyczny układ współrzędnych

- Trójwymiarowy układ współrzędnych
- r – odległość od środka układu współrzędnych
- θ, ϕ – dwa kąty jak na rysunku obok („szerokość i długość geograficzna”)



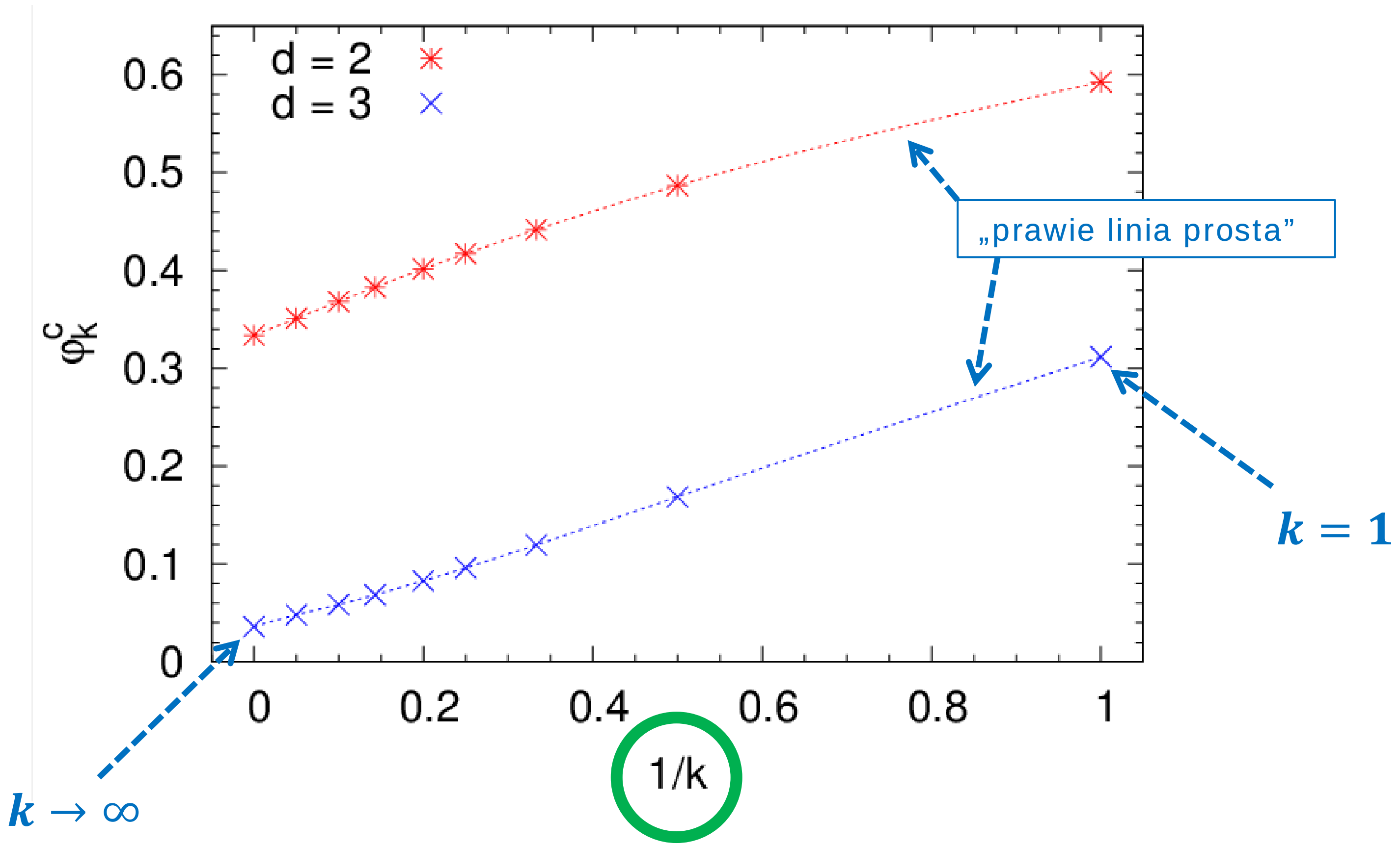
Krzywoliniowy układ współrzędnych

- Dowolny układ nieprzecinających się krzywych gęsto wypełniających przestrzeń 2D lub 3D lub *n*D może być jedną ze współrzędnych…
- Czyli np. jakieś krzywe całkowe idealnie się nadają…



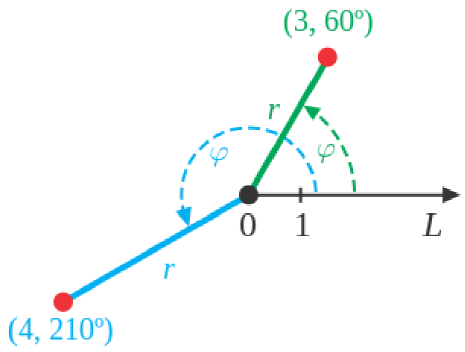
Nietypowe osie wykresów

- To też rodzaj „innego” układu współrzędnych

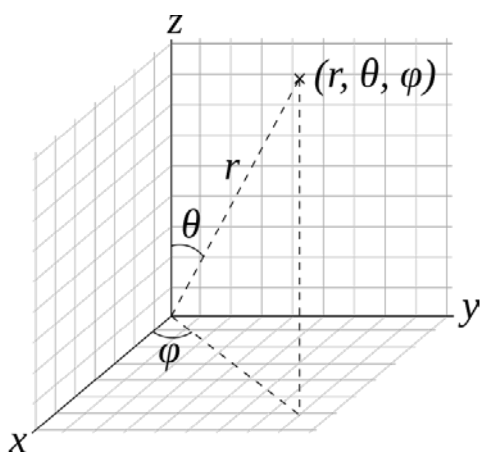


Po co stosuje się różne układy współrzędnych?

- Ruch po okręgu: współrzędne biegunowe, bo wtedy r = const. i zostaje tylko jedna niewiadoma: φ

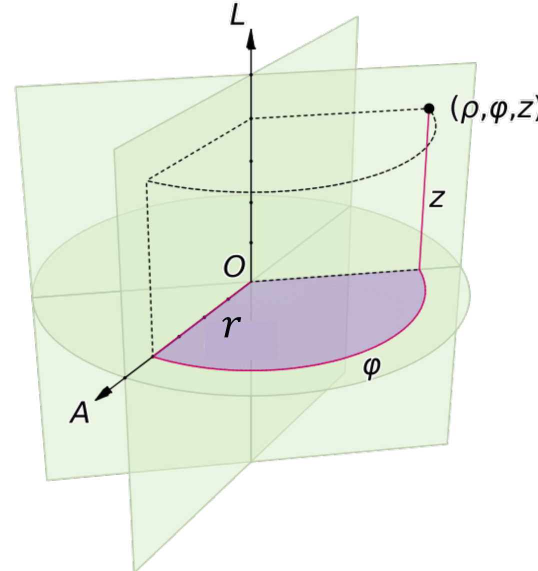


- Ruch po sferze: współrzędne sferyczne, bo wtedy r = const. i zostają tylko φ, θ



Po co stosuje się różne układy współrzędnych?

- Pole elektryczne wokół naładowanego nieskończonego prostoliniowego przewodnika: współrzędne cylindryczne, bo wtedy $\boldsymbol{E}(z, r, \phi) = E(r) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}$ (tylko jedna zmienna jest „ważna”!)



Po co stosuje się różne układy współrzędnych?

- Generalnie różne układy współrzędnych stosuje się po to, by uprościć problem, np. poprzez redukcję liczby współrzędnych, wykorzystując symetrię układu

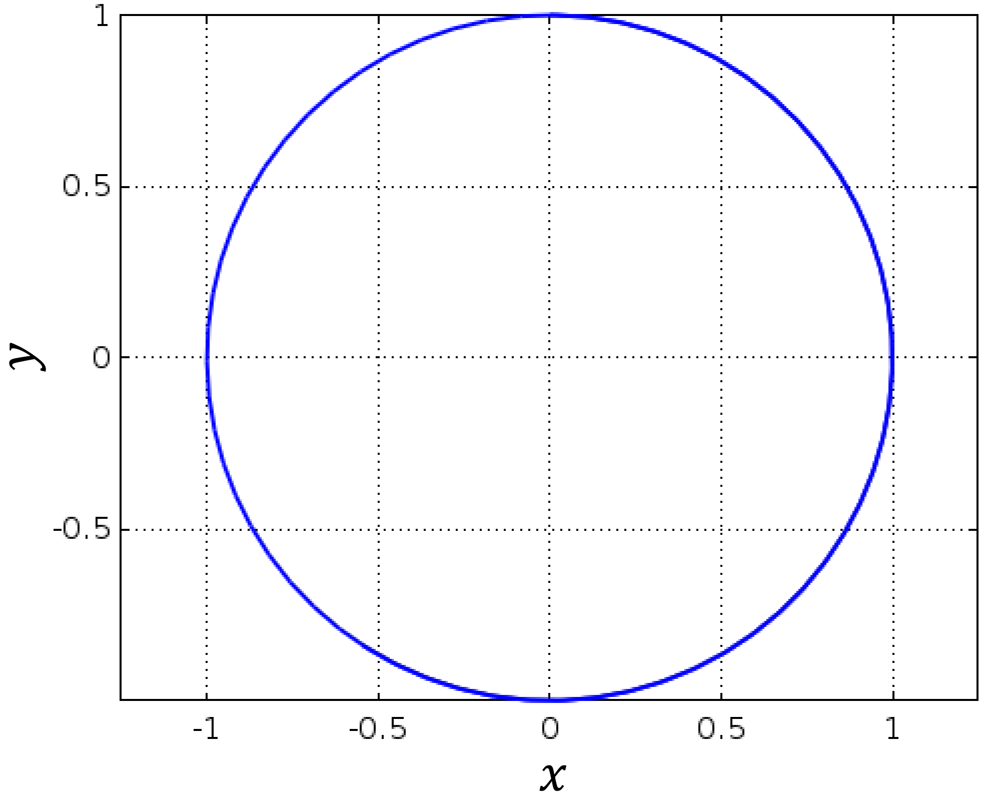
KRZYWE PARAMETRYCZNE

Krzywe parametryczne

- ***Krzywą parametryczną*** nazywamy zbiór punktów $(x(t), y(t))$, gdzie $x(t)$ i $y(t)$ są funkcjami ciągłymi na odcinku $a \leq t \leq b$
- Podobnie definiujemy krzywe w 3D
(i wyższych wymiarach)

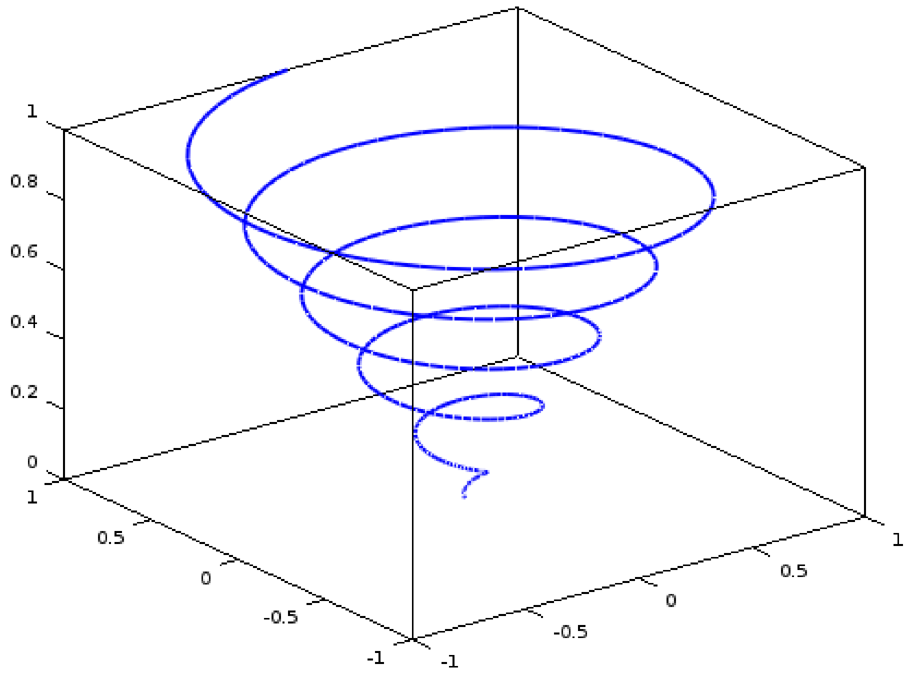
Krzywe parametryczne w Octave

```
t = 0:0.1:10;
plot (sin(t), cos(t), "linewidth", 2);
```



Krzywe parametryczne 3D

```
t = 0:0.1:10*pi;
r = linspace (0, 1, numel (t));
z = linspace (0, 1, numel (t));
plot3 (r.*sin(t), r.*cos(t), z);
```



Parametryczne równanie prostej

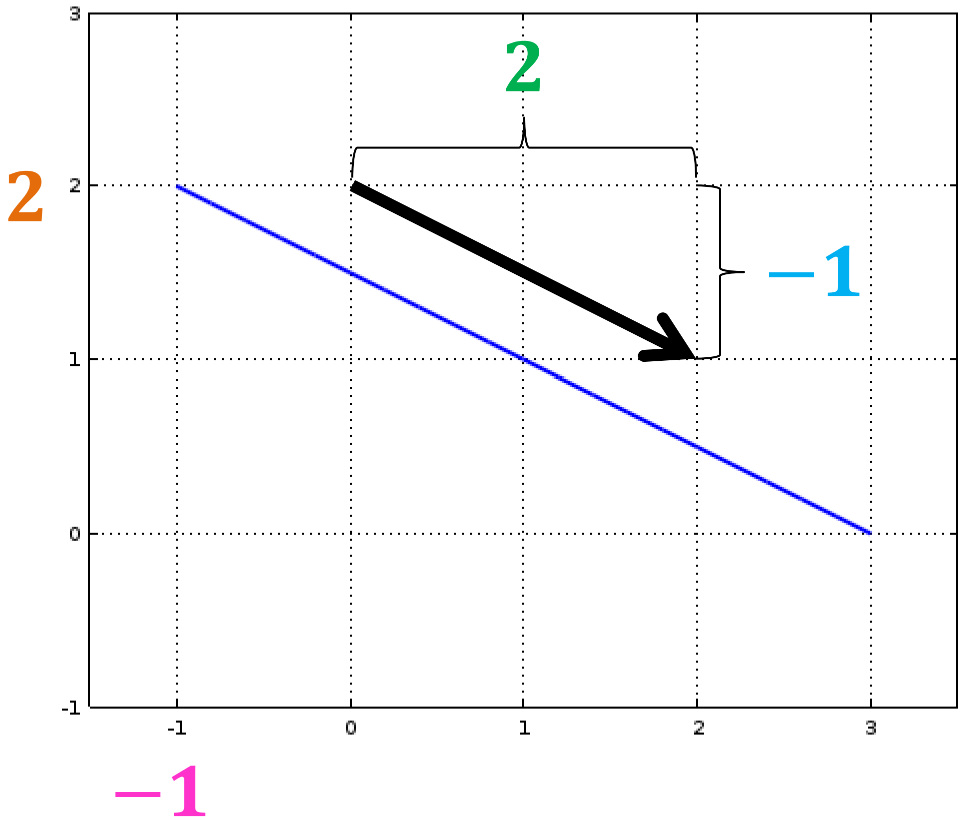
```
t = 0:0.1:2;
plot (-1+2*t, 2-1*t);
```

- Równanie prostej przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) o nachyleniu (a, b):

$$x(t) = x_0 + at$$
$$y(t) = y_0 + bt$$

- Podobnie w wyższych wymiarach

$$x(t) = x_0 + at$$
$$y(t) = y_0 + bt$$
$$z(t) = z_0 + ct$$



Parametryczne równanie prostej

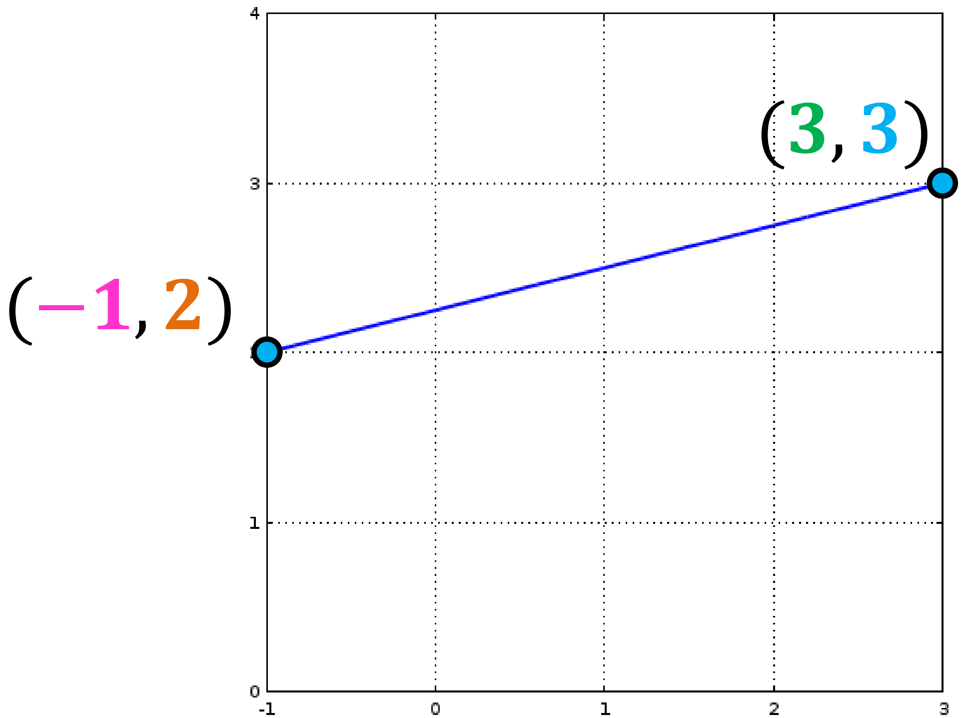
```
t = 0:0.1:2;
plot (-1+(3-(-1))*t, 2-(3-2)*t);
```

- Równanie prostej przechodzącej przez punkty (x_0, y_0) i (x_1, y_1):

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t$$
$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t$$

- Podobnie w wyższych wymiarach

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t$$
$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t$$
$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$$

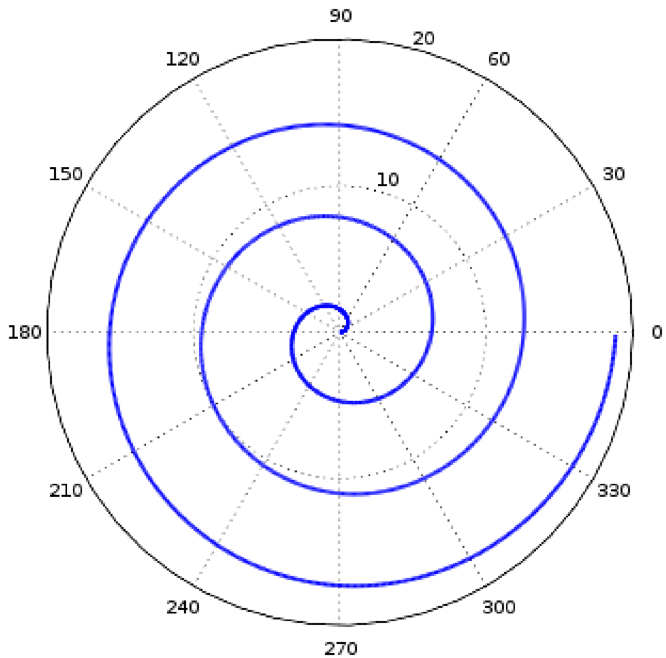


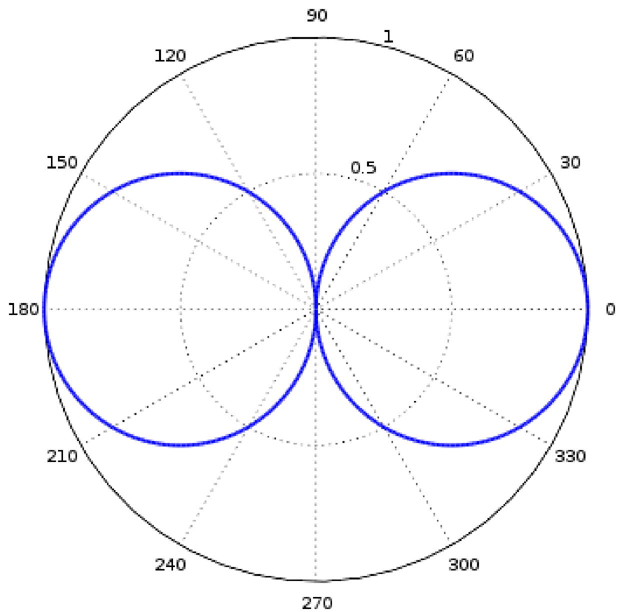
WYKRESY FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Współrzędne biegunowe: polar(θ, r)

```
# spirala Archimedesa
t = 0:0.01:6*pi;
polar(t, t);
```

```
# dwa okręgi
t = 0:0.01:2*pi;
polar(t, abs(cos(t)));
```

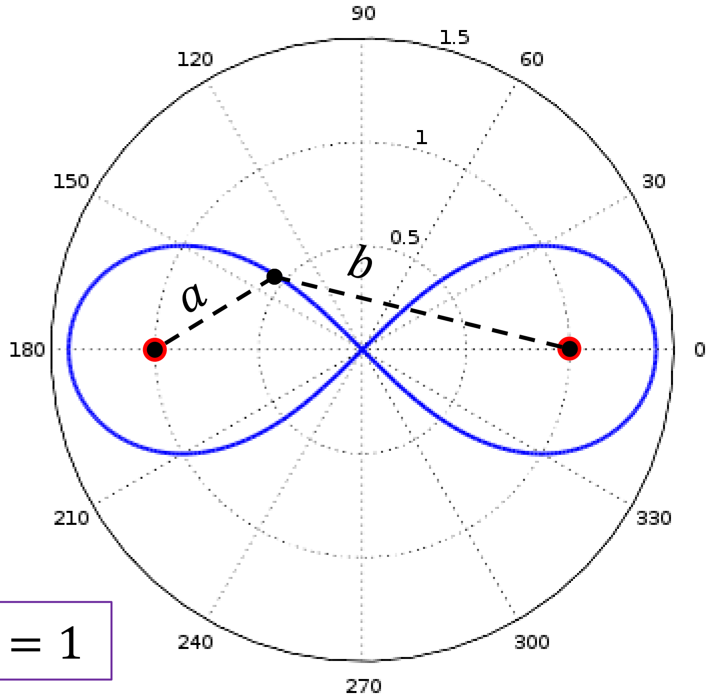




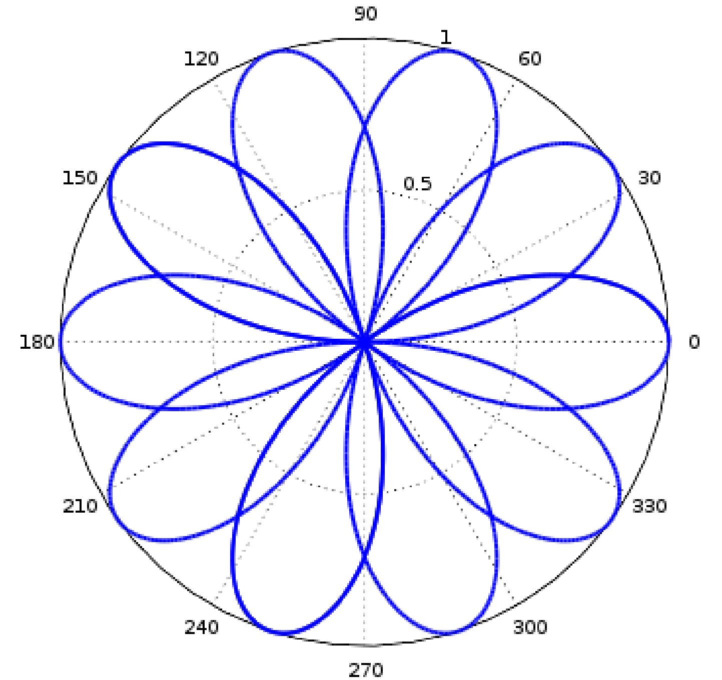
Współrzędne biegunowe: polar(θ, r)

```
# lemniskata (1694)
t = 0:0.01:2*pi;
polar(t, sqrt(2*cos(2*t)));
```

```
# róża dla k=5/2
t = 0:0.01:4*pi;
polar(t, cos(5/2*t));
```



$ab = 1$



scatter („rozrzut”)

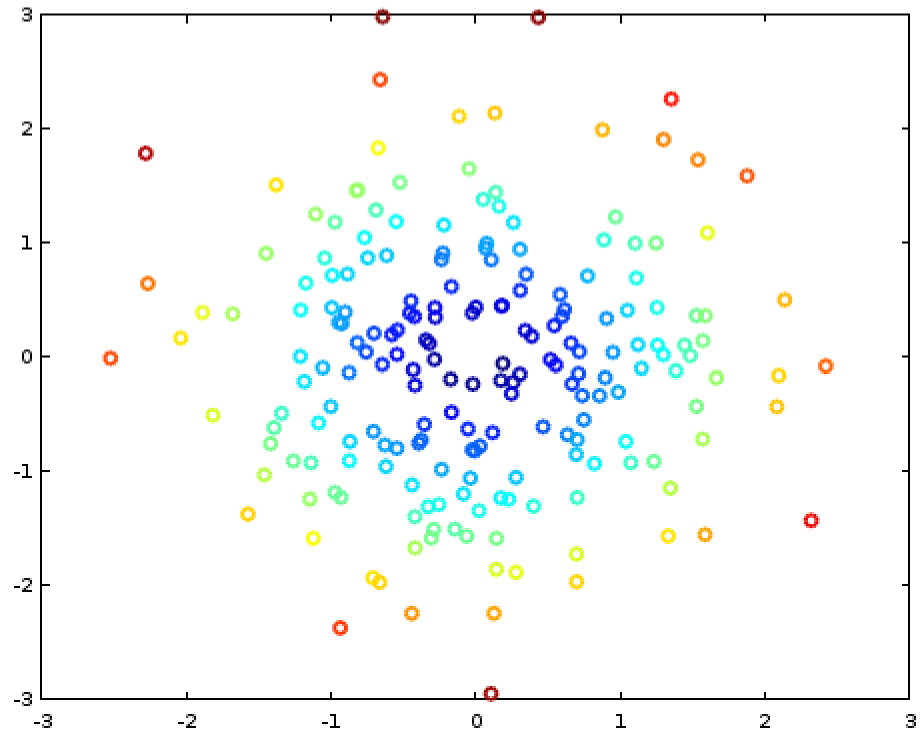
x = **randn** (200, 1); # 200 liczb losowych, rozkł. norm.

y = **randn** (200, 1); # 200 liczb losowych

scatter (**x**, **y**, **[]**, **sqrt (x.^2 + y.^2)**);

rozmiar symbolu: „użyj wartości domyślnej” (8 pkt.)

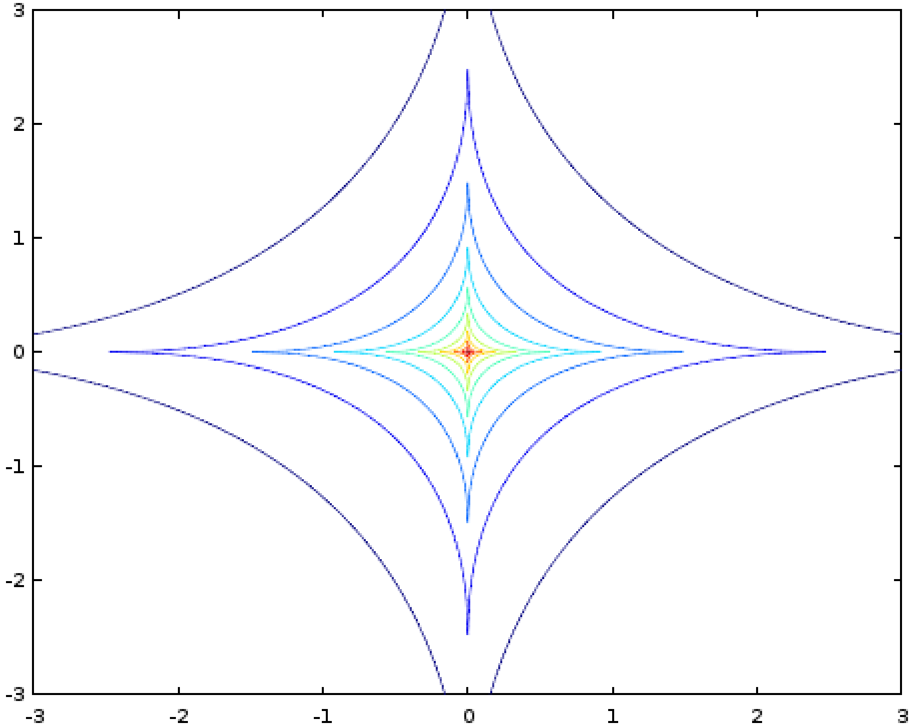
tablica kolorów



`contour` (mapa konturowa)

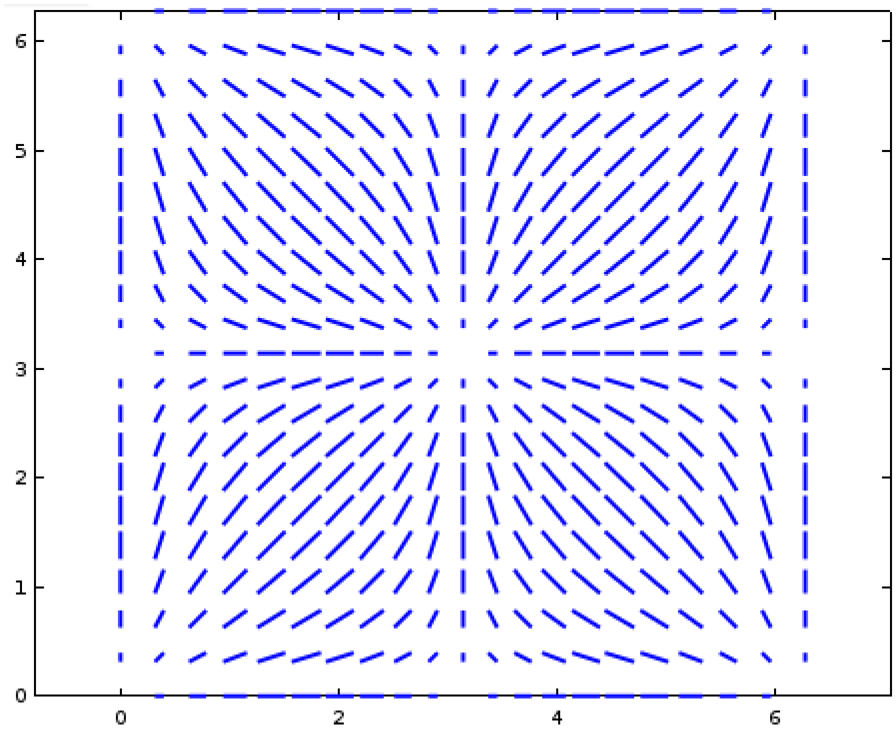
[x,y] = **meshgrid**([-3:0.01:3]);

contour (x, y, exp(-sqrt(abs(x)) - sqrt(abs(y))));



quiver (pole wektorowe 2D)

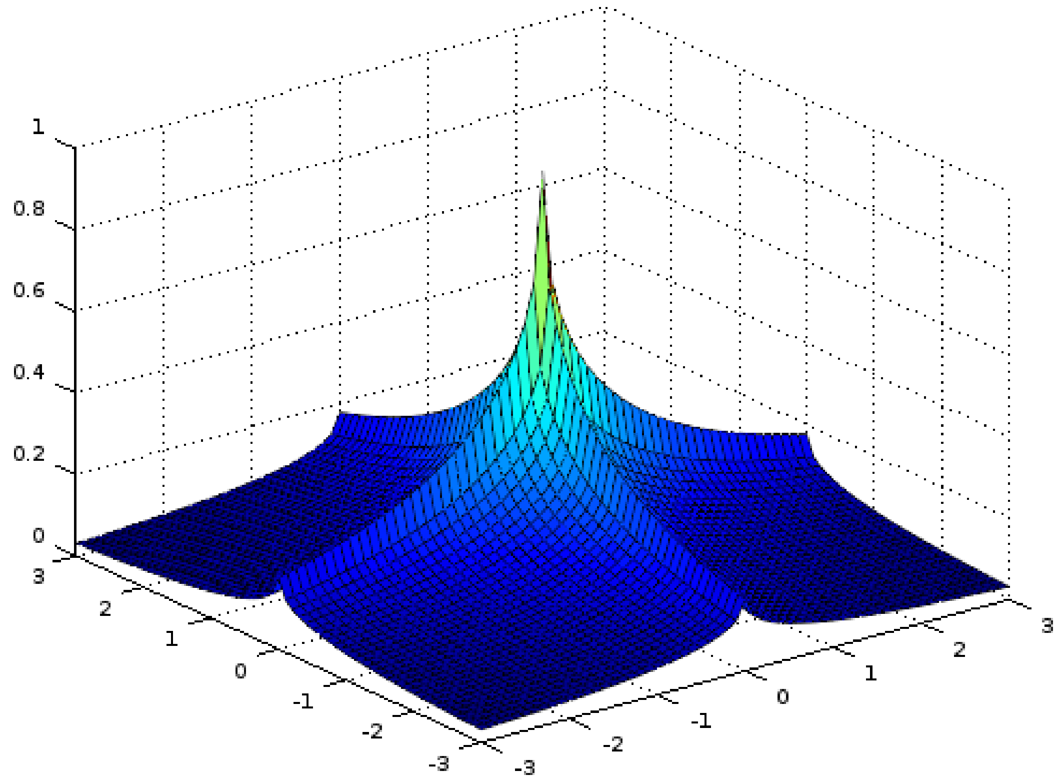
```
[x, y] = meshgrid (0:pi/10:2*pi);
h = quiver (x, y, sin (x), sin (y));
set (h, "maxheadsize", 0);
```



surf (powierzchnia)

```
[x,y] = meshgrid([-3:0.1:3]);
surf (x, y, exp( -sqrt(abs(x)) - sqrt(abs(y) ) ) );
```

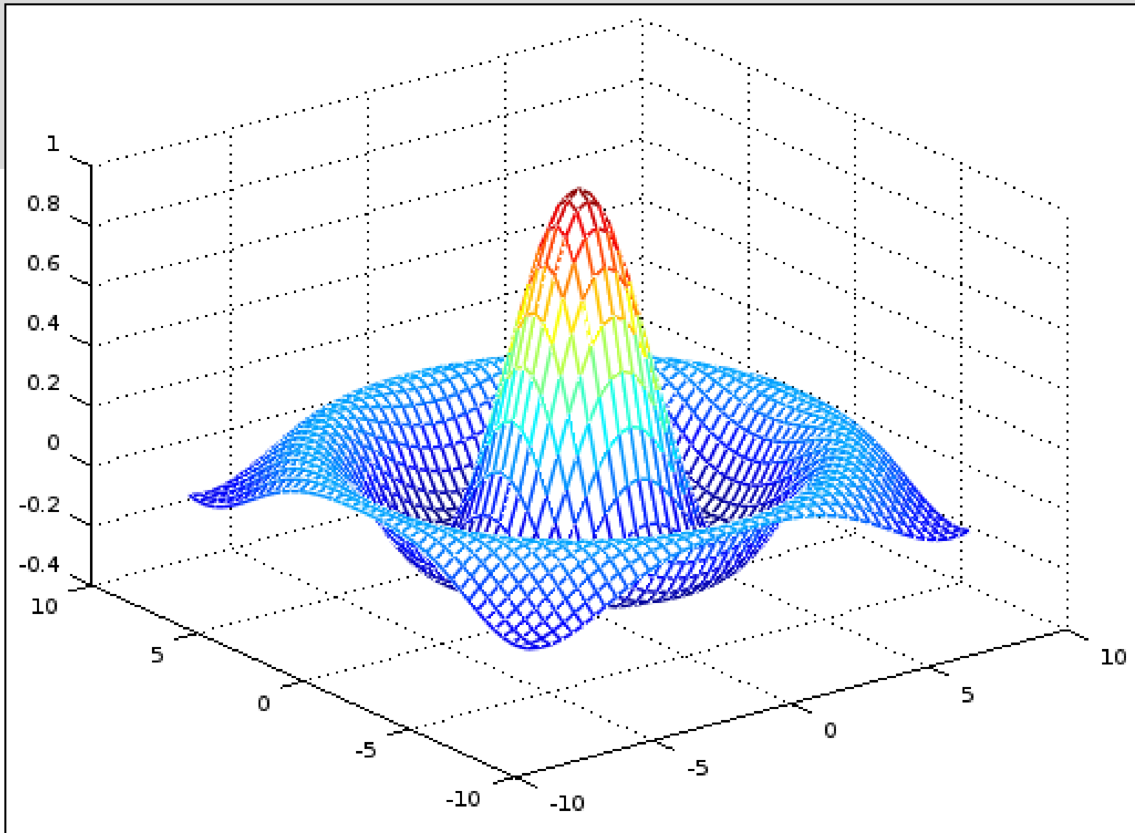
$$f(x,y) = e^{-\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}}$$



`mesh` (siatka)

```
[x, y] = meshgrid (linspace(-8, 8, 41)); # 41 punktów
r = sqrt (x .^ 2 + y .^ 2) + eps;        # r > 0
z = sin (r) ./ r;
mesh (x, y, z);
```

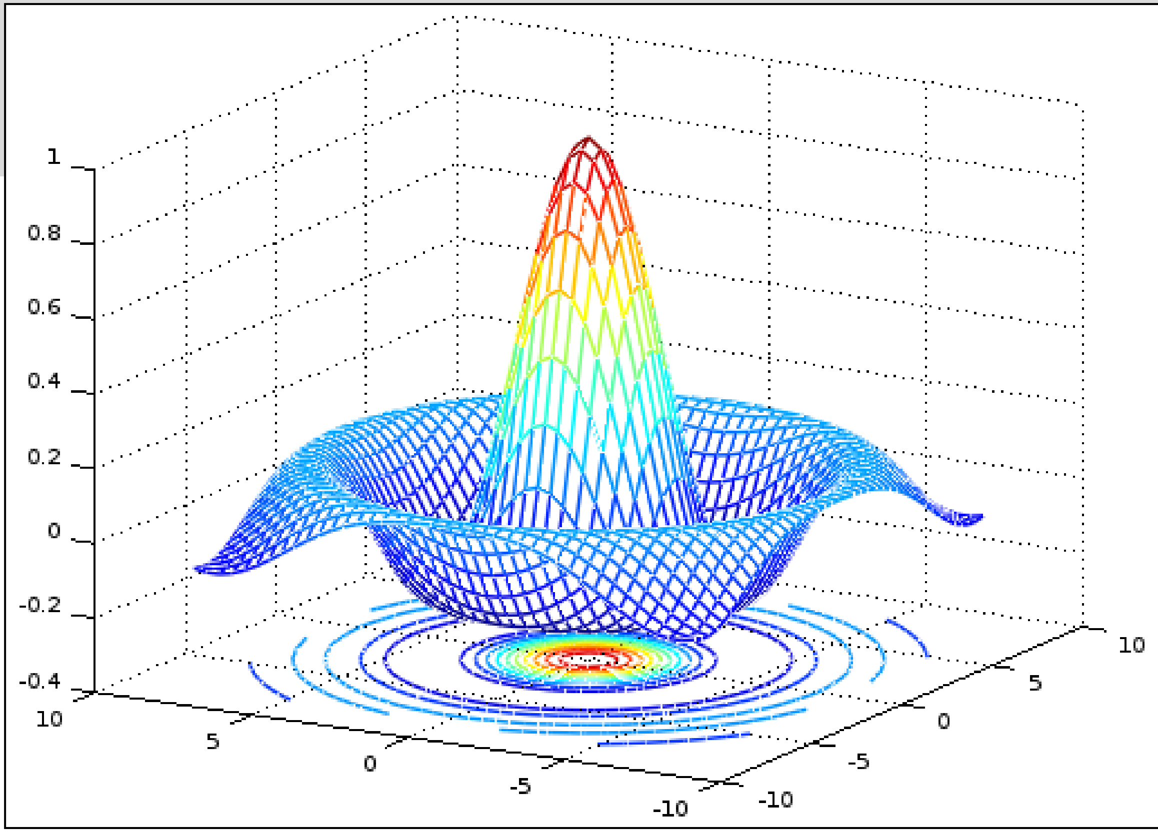
$$f(x,y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



meshc (siatka + kontury)

```
[x, y] = meshgrid (linspace(-8, 8, 41));
r = sqrt (x .^ 2 + y .^ 2) + eps;
z = sin (r) ./ r;
meshc (x, y, z);
```

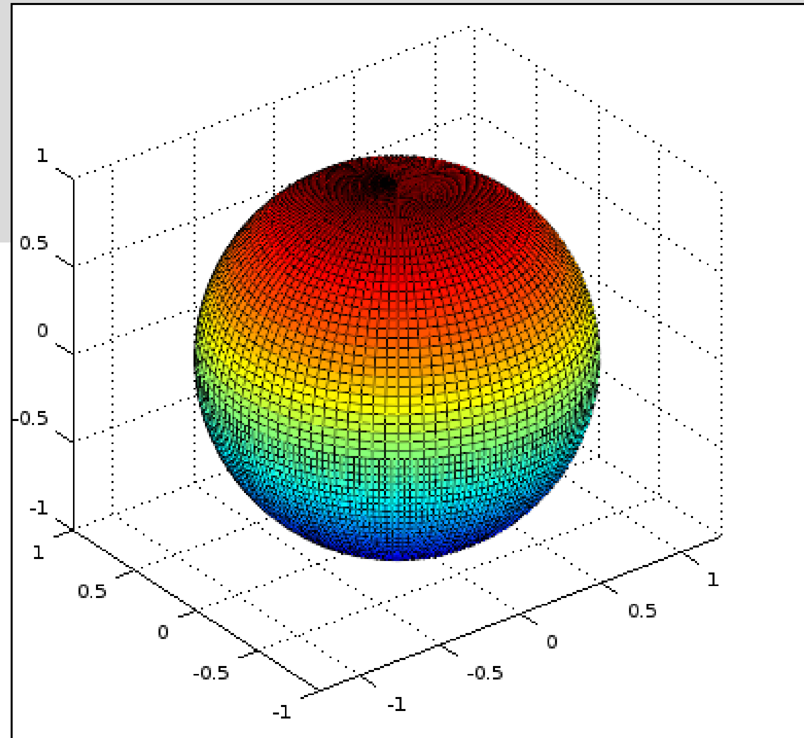
$$f(x,y) = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



Współrzędne sferyczne

```
N = 100;
lth = linspace (0, 2*pi, N);
lph = linspace (-pi/2, pi/2, N);
[theta, phi] = meshgrid (lth, lph); # siatka 2D
r = 0*theta + 1; # same jedynki
[x, y, z] = sph2cart (theta, phi, r);
surf (x, y, z);
```

konwersja
współrzędnych
sferycznych
na kartezjańskie



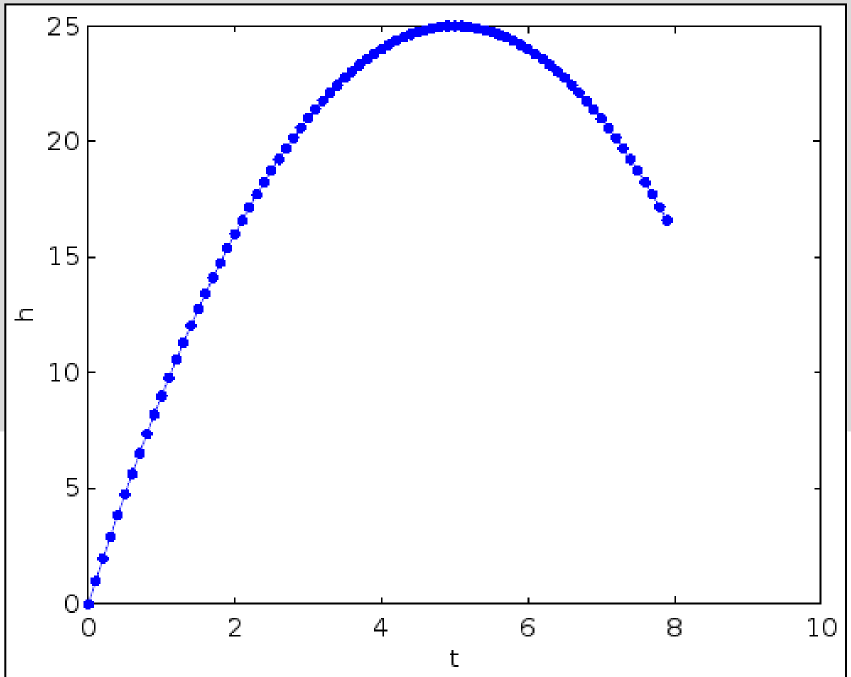
Wykresy logarytmiczne

- Jak już wiemy, Octave umożliwia tworzenie wykresów półlogarytmicznych i podwójnielogarytmicznych:
  - **semilogx**
  - **semilogy**
  - **loglog**

ANIMACJE

Prosta animacja w Octave

```
x = 0:0.1:10;
y = 25 - (x-5).^2;
h = plot (x(1), y(1), "markersize", 10);  # inicjalizacja
axis ([min(x), max(x), min(y), max(y)]); # scena
for i = 2:length(x)
   set (h, "YData", y(1:i));
   set (h, "XData", x(1:i));
   pause (0.05);
end
```



Filmy

- Filmy można utworzyć z pojedynczych klatek
- Klatki można wygenerować w Octave, np. w formacie png
- Przykład (linux): http://www.krizka.net/2009/11/06/creating-animations-with-octave/
- W innych programach, np. GnuPlot, animacje można tworzyć od razu jako plik w formacie „animated gif”

Podsumowanie

- Poważne problemy inżynierskie z reguły dotyczą funkcji wielu zmiennych
- Właściwy układ współrzędnych ułatwia pracę
- Odróżniaj skalary od wektorów
- Wizualizacja obiektów matematycznych ma duże znaczenie dla zrozumienia (i popularyzacji) zagadnień naukowych i technicznych